

凸関数について

安達謙三*

(平成5年10月29日受理)

Note on Convex Functions

Kenzō ADACHI

(Received October 29, 1993)

Department of Mathematics, Faculty of Education,
Nagasaki University, Nagasaki 852, Japan

Abstract

It is well known that the arithmetic mean is greater than or equal to the geometric mean. However, there are few books in which the condition for the equality is interpreted. In this paper, by applying the nice proof of Jensen's inequality obtained by professor Akihiro Nishi at the Saga University, we give the proof by means of the convex function, including the case of the equality.

1. はじめに

相加平均が相乗平均より大であることはよく知られており、特に凸関数を使った証明はよくみかけられる。しかしながら等号が成立する場合の条件まで説明してある本は意外と少ない。ここでは佐賀大学教育学部の西晃央先生の Jensen の不等式についての巧妙な証明の紹介を兼ねて、このことについて述べてみたい。

2. 凸関数

まず開区間 $(a, b) = \{x \mid a < x < b\}$ における凸関数の定義から始める。

定義. 開区間 (a, b) で定義された関数 $f(x)$ が凸であるとは、 $x, y \in (a, b)$, $0 < \lambda < 1$, $x \neq y$ となる x, y, λ に対して

$$(1) \quad f((1-\lambda)x + \lambda y) \leq (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y)$$

*長崎大学教育学部数学教室

が成立することである。(1)において \leq が成立するとき、 $f(x)$ は狭義凸 (strictly convex) (または強凸 (strongly convex)) であるという。

凸関数について次の定理が成立する。

定理1. (a) $f(x)$ が开区間 (a, b) で凸であるためには $a < x_1 < x_2 < x_3 < b$ のとき

$$(2) \quad \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}$$

が成立することが必要十分である。

(b) $f(x)$ が开区間 (a, b) で狭義凸であるためには (2) において $<$ が成立することが必要十分である。

証明 (a) (2) を変形すると

$$(3) \quad f(x_2) \leq \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1} f(x_1) + \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} f(x_3).$$

$f(x)$ は (a, b) で凸とする。

$$\lambda = \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1}$$

とおくと

$$1 - \lambda = \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1}, \quad (1 - \lambda)x_1 + \lambda x_3 = x_2, \quad 0 < \lambda < 1$$

となる。 $f(x)$ は凸だから、

$$(4) \quad f((1 - \lambda)x_1 + \lambda x_3) = (1 - \lambda)f(x_1) + \lambda f(x_3)$$

となり、(3)が成立する。したがって(2)が成立する。

逆に(2)が成立すると仮定すると(3)が成立する。

$a < x < y < b$, $0 < \lambda < 1$ とする。 $(1 - \lambda)x + \lambda y = t$ とおくと $x < t < y$ となるから(3)より

$$(5) \quad f(t) \leq \frac{y - t}{y - x} f(x) + \frac{t - x}{y - x} f(y) = (1 - \lambda)f(x) + \lambda f(y)$$

となり(1)が成立する。

(b) $f(x)$ は狭義凸とすると、(4)において $<$ が成立するから、(3)において $<$ が成立し、したがって(2)において $<$ が成立する。逆に(2)において $<$ が成立すれば、(5)において $<$ が成立する。したがって(1)において $<$ が成立する。

次の証明法は西晃央先生による。([2] 参照)

定理 2. (a) $f(x)$ は开区間 (a, b) で凸とする。 $a < x_i < b$ ($i=1, 2, \dots, n$) と $\alpha_i > 0$, $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$ となる α_i に対して,

$$(6) \quad f\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \alpha_i f(x_i)$$

が成立する。

(b) $f(x)$ は开区間 (a, b) で狭義凸とする。(a) における x_i, α_i に対して, $x_i \neq x_j$ となる i, j が存在するならば,

$$(7) \quad f\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i\right) < \sum_{i=1}^n \alpha_i f(x_i)$$

が成立する。

証明 (a) n に関する帰納法で証明する。 $n=2$ のときは凸関数の定義に他ならない。 $n-1$ のとき (6) は成立したと仮定する。 $m=1, 2, \dots, n$ に対して,

$$\sum_{i \neq m} (1 - \alpha_m)^{-1} \alpha_i = (1 - \alpha_m)^{-1} \sum_{i \neq m} \alpha_i = 1$$

だから帰納法の仮定より,

$$f\left(\sum_{i \neq m} (1 - \alpha_m)^{-1} \alpha_i x_i\right) \leq \sum_{i \neq m} (1 - \alpha_m)^{-1} \alpha_i f(x_i)$$

が成立する。ここで $\sum_{i \neq m}$ は m 以外のすべての i について和をとることを意味する。一方,

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i = (1 - \alpha_m) \sum_{i \neq m} (1 - \alpha_m)^{-1} \alpha_i x_i + \alpha_m x_m$$

が成立するから,

$$X = \sum_{i \neq m} (1 - \alpha_m)^{-1} \alpha_i x_i, \quad Y = x_m$$

とおくと,

$$\begin{aligned} f\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i\right) &= f((1 - \alpha_m)X + \alpha_m Y) \leq (1 - \alpha_m)f(X) + \alpha_m f(Y) \\ &\leq (1 - \alpha_m) \sum_{i \neq m} (1 - \alpha_m)^{-1} \alpha_i f(x_i) + \alpha_m f(x_m) \\ &= \sum_{i=1}^n \alpha_i f(x_i). \end{aligned}$$

したがって n のときも成立する。

(b) $f(x)$ は狭義凸とする。もしすべての m について

$$\sum_{i \neq m} (1 - \alpha_m)^{-1} \alpha_i x_i = x_m$$

となったと仮定すると

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i = \sum_{i \neq m} \alpha_i x_i + \alpha_m x_m = (1 - \alpha_m) x_m + \alpha_m x_m = x_m$$

となるから, $x_1 = \dots = x_n$ となる。これは仮定に反するから, ある m が存在して

$$\sum_{i \neq m} (1 - \alpha_m)^{-1} \alpha_i x_i \neq x_m$$

となる。したがって $f(x)$ が狭義凸であることより,

$$\begin{aligned} f\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i\right) &= f\left((1 - \alpha_m) \sum_{i \neq m} (1 - \alpha_m)^{-1} \alpha_i x_i + \alpha_m x_m\right) \\ &< (1 - \alpha_m) f\left(\sum_{i \neq m} (1 - \alpha_m)^{-1} \alpha_i x_i\right) + \alpha_m f(x_m) \\ &\leq (1 - \alpha_m) \sum_{i \neq m} (1 - \alpha_m)^{-1} \alpha_i f(x_i) + \alpha_m f(x_m) \\ &= \sum_{i=1}^n \alpha_i f(x_i) \end{aligned}$$

となり, (7) が示された。

今までは $f(x)$ の微分可能性は仮定しなかったが, $f(x)$ が2回微分可能のときは次の定理が成立する。

定理3. $f(x)$ は开区間 (a, b) で2回微分可能とする。

(a) $f(x)$ が凸であるための必要十分条件は $f''(x) \geq 0$ である。

(b) $f''(x) > 0$ ならば $f(x)$ は狭義凸である。

証明 (a) $f(x)$ は凸とする。 $a < x_1 < x_2 < b$ とする。いま ξ, η を $x_1 < \xi < \eta < x_2$ とするようにとる。すると

$$(8) \quad \frac{f(\xi) - f(x_1)}{\xi - x_1} \leq \frac{f(\eta) - f(\xi)}{\eta - \xi} \leq \frac{f(x_2) - f(\eta)}{x_2 - \eta}$$

が成立する。(8)において $\xi \rightarrow x_1$ とすると

$$(9) \quad f'(x_1) \leq \frac{f(\eta) - f(x_1)}{\eta - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(\eta)}{x_2 - \eta}$$

となる。したがって

$$(10) \quad f'(x_1) \leq \frac{f(x_2) - f(\eta)}{x_2 - \eta}$$

において $\eta \rightarrow x_2$ とすると $f'(x_1) \leq f'(x_2)$ となるから, $f'(x)$ は単調増加関数になり, $f''(x) \geq 0$ となる。

逆に $f''(x) \geq 0$ とする。 $a < x_1 < x_2 < x_3 < b$ とすると, 平均値の定理より,

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(\xi_1), \quad \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2} = f'(\xi_2)$$

をみたとす ξ_1, ξ_2 ($x_1 < \xi_1 < x_2 < \xi_2 < x_3$) が存在する。 $f'(x)$ は単調増加だから,

$f'(\xi_1) \leq f'(\xi_2)$ となる。したがって

$$(11) \quad \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}$$

となり, $f(x)$ は凸になる。

(b) $f''(x) > 0$ とすると $f'(x)$ は狭義単調増加関数だから (11) において $<$ が成立する。したがって $f(x)$ は狭義凸になる。

3. 凸関数の応用

これから前節の定理を応用して, よく知られた2つの不等式を証明する。また相加平均と相乗平均については, 帰納法による別証明があることを最後に示す。

例1. $0 < x < \frac{\pi}{2}$ のとき $\frac{\sin x}{x} > \frac{2}{\pi}$

が成立する。

証明 $f(x) = -\sin x$ ($0 < x < \frac{\pi}{2}$) とおくと, $f''(x) = \sin x > 0$ 。したがって, 定理3 (b) より $f(x)$ は $(0, \frac{\pi}{2})$ で狭義凸である。 $0 < a < x < b < \frac{\pi}{2}$ とすると, 定理1より

$$(12) \quad \frac{f(x) - f(a)}{x - a} < \frac{f(x) - f(b)}{x - b}$$

が成立する。(2) は

$$\frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}$$

とも同値だから, $0 < \xi < a < x < b < \eta < \frac{\pi}{2}$ のとき

$$(13) \quad \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} < \frac{f(x) - f(a)}{x - a}, \quad \frac{f(b) - f(x)}{b - x} < \frac{f(\eta) - f(x)}{\eta - x}$$

が成立する。(13) において, $\xi \rightarrow 0, \eta \rightarrow \frac{\pi}{2}$ とすると

$$(14) \quad \frac{f(x)}{x} \leq \frac{f(x) - f(a)}{x - a} < \frac{f(x) - f(b)}{x - b} \leq \frac{f(\frac{\pi}{2}) - f(x)}{\frac{\pi}{2} - x}$$

を得る。(14) を変形することにより, 求める式を得る。

例2. $x_i \geq 0$ ($i=1, 2, \dots, n$) のとき

$$(15) \quad \frac{x_1 + \dots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}$$

が成立する。ここで等号が成立するのは $x_1 = x_2 = \dots = x_n$ のときに限る。

証明 $x_i = 0$ となる i が存在すれば (15) は明らかに成立する。したがって $x_i > 0$ ($i=1, 2, \dots, n$) と仮定する。 $x > 0$ に対して, $f(x) = -\log x$ とおくと,

$$f''(x) = \frac{1}{x^2} > 0$$

となるから, $f(x)$ は $x > 0$ で狭義凸である。 $\alpha_i = \frac{1}{n}$ ($i=1, \dots, n$) とすると

$$f\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \alpha_i f(x_i) = -\sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \log x_i = -\log \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}$$

となるから (15) が成立する。 $x_i \neq x_j$ となる i, j が存在すれば

$$-\log \frac{x_1 + \dots + x_n}{n} = f\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i\right) < \sum_{i=1}^n \alpha_i f(x_i) = -\log \sqrt[n]{x_1 \dots x_n}$$

が成立する。

最後に帰納法による例2の別証明を与える。([1] 参照)

[例2の別証明] まず n が2のべきのとき (15) が成立することを示す。すなわち $n=2^m$ (m は自然数) と書けているとする。 $m=1$ のとき (15) は明らかに成立する。 m のとき (15) は成立したと仮定する。

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{2^{m+1}} \sum_{k=1}^{2^{m+1}} x_k \right)^{2^{m+1}} = \left(\left(\frac{1}{2^{m+1}} \sum_{k=1}^{2^{m+1}} x_k \right)^2 \right)^{2^m} \\ & = \left(\frac{1}{2^{2m}} \left(\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{2^m} x_k + \frac{1}{2} \sum_{k=2^{m+1}}^{2^{m+1}} x_k \right)^2 \right)^{2^m} \geq \left(\frac{1}{2^{2m}} \sum_{k=1}^{2^m} x_k \sum_{k=2^{m+1}}^{2^{m+1}} x_k \right)^{2^m} \\ & = \left(\frac{1}{2^m} \sum_{k=1}^{2^m} x_k \right)^{2^m} \left(\frac{1}{2^m} \sum_{i=1}^{2^m} x_{2^{m+1}+i} \right)^{2^m} \geq \prod_{k=1}^{2^m} x_k \prod_{i=1}^{2^m} x_{2^{m+1}+i} = \prod_{k=1}^{2^{m+1}} x_k \end{aligned}$$

上の式で等号が成立するならば

$$\sum_{k=1}^{2^m} x_k = \sum_{k=2^{m+1}}^{2^{m+1}} x_k, \quad x_1 = \dots = x_{2^m}, \quad x_{2^{m+1}} = \dots = x_{2^{m+1}}$$

とならなければならないから, x_i ($i=1, \dots, 2^{m+1}$) はすべて相等しくなる。

よって, $n=2^m$ (m は自然数) と書けている場合には (15) は成立する。

つぎに一般の場合を証明する。自然数 n ($n \geq 2$) に対して $2^{m-1} \leq n < 2^m$ となる自然数 m が存在する。

$$x = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k$$

とおく。 $x_1, x_2, \dots, x_n, \underbrace{x, \dots, x}_{2^m - n \text{個}}$ に対しては、前半で証明されているから、

$$(16) \left(\frac{1}{2^m} \left(\sum_{k=1}^n x_k + (2^m - n)x \right) \right)^{2^m} \geq x_1 \cdots x_n x^{2^m - n}$$

が成立する。(16) の左辺は x^{2^m} に等しいから、(16) より

$$(17) x^n \geq x_1 \cdots x_n$$

となり、定理は成立する。(17) で等号が成立するならば (16) で等号が成立するから、 $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = x$ となる。

参考文献

- [1] 小松勇作：解析概論 [I]，廣川書店
- [2] AKIHIRO NISHI, A proof of Jensen's strict inequality, INT. J. MATH. EDUC. SCI. TECHNOL., 1990, VOL.21, NO. 5, 781-825.