Bulletin of Faculty of Education, Nagasakı University : Curriculum and Teaching 1995, No. 24, 17-28

指数関数について

安達謙三

(平成6年10月30日受理)

Not on the Exponential Function

Kenzō ADACHI

(Received October 30, 1994)

1．はじめに

高等学校において，指数関数の定義とその連続性はグラフで理解させ，その連続性を用いて指数関数の微分可能性を導いている。指数関数が連続であることの厳密な証明は実数の連続性から導かれるのであるが，微分積分学の専門書で，丁寧に説明してある本は少ない。ここでは Dedekind が導入した有理数の切断によって実数を定義する方法で実数の連続性を証明し，それを用いて指数関数が連続関数であることを示す。

2．実数の連続性

有理数全体の集合を$\mathbf{Q}$で表す。A，Bを$\mathbf{Q}$の部分集合とする。(A，B) が有理数の切断であるとは，次の（1），（2），（3）が成立するときをいう。

（1） $A \neq \phi$，$B \neq \phi$．（ϕは空集合を表す）

（2） $A \cup B = \mathbf{Q}$，$A \cap B = \phi$．

（3） $a \in A$，$b \in B$ ならば $a < b$.

このとき，Aを切断の下組，Bを上組という。

例1．$A = \{x \in \mathbf{Q} \mid x < 1\}$，$B = \{x \in \mathbf{Q} \mid x \geqq 1\}$
とすると，(A，B) は有理数の切断である。

例2．$A = \{x \in \mathbf{Q} \mid x^2 < 2,\ x > 0\} \cup \{x \in \mathbf{Q} \mid x \leqq 0\}$，
$B = \{x \in \mathbf{Q} \mid x^2 > 2,\ x > 0\}$

とすると，（A，B）は有理数の切断である。

有理数の切断（A，B）には，次の（イ），（ロ），（ハ）の場合が考えられる。
（イ）Aに最大数があり，Bに最小数がない。
（ロ）Aに最大数がなく，Bに最小数がある。
（ハ）Aに最大数がなく，Bに最小数がない。

これ以外にもAに最大数aがあり，Bに最小数bがある場合が考えられるが，このときは $a<(a+b)/2<b$ となり，$(a+b)/2$ はAにもBにも属さないから，この場合は起らない。また（イ）の場合はAの最大数をBに移すと，（ロ）の場合になる。したがって，今後有理数の切断を考える場合は（ロ）または（ハ）の場合だけとする。

有理数の切断（A，B）を実数という。実数全体の集合を$\mathbf{R}$で表す。

r が有理数のとき，

$\mathrm{A}=\{x\in\mathbf{Q}\mid x<r\}$，$\mathrm{B}=\{x\in\mathbf{Q}\mid x\geqq r\}$

とすると，（A，B）は有理数の切断であるから，$(\mathrm{A},\mathrm{B})\in\mathbf{R}$ となる。このときrと（A，B）を同一視する。したがって，$\mathbf{Q}\subset\mathbf{R}$ が成立する。

次に実数 α_1，α_2 に次のように大小関係を定義する。

α_1，α_2 は有理数の切断だから，$\alpha_1=(\mathrm{A}_1,\mathrm{B}_1)$，$\alpha_2=(\mathrm{A}_2,\mathrm{B}_2)$ と表される。

$\mathrm{A}_1=\mathrm{A}_2$ のとき　$\alpha_1=\alpha_2$，

$\mathrm{A}_1\subsetneqq\mathrm{A}_2$ のとき　$\alpha_1<\alpha_2$

と定義する。切断の定義より，$\alpha_1=\alpha_2$，$\alpha_1<\alpha_2$，$\alpha_2<\alpha_1$ のいずれか一つだけが成立する。次の有理数の稠密性が成立する。

定理１．α，$\beta\in\mathbf{R}$，$\alpha<\beta$ ならば $\alpha<m<\beta$ となる有理数mが存在する。

証明．$\alpha=(\mathrm{A}_1,\mathrm{B}_1)$，$\beta=(\mathrm{A}_2,\mathrm{B}_2)$ とすると，仮定より，$\mathrm{A}_1\subsetneqq\mathrm{A}_2$であるから，$c\in\mathrm{A}_2$，$c\notin\mathrm{A}_1$をみたす有理数$c$が存在する。$\mathrm{A}_2$ に最大数はないから，$c<m$ となる $m\in\mathrm{A}_2$ が存在する。$\mathrm{E}_1=\{x\in\mathbf{Q}\mid x<m\}$，$\mathrm{E}_2=\{x\in\mathbf{Q}\mid x\geqq m\}$ とおくと，$(\mathrm{E}_1,\mathrm{E}_2)$ は有理数の切断で $m=(\mathrm{E}_1,\mathrm{E}_2)$ である。$c\in\mathrm{E}_1$ だから $\mathrm{A}_1\subsetneqq\mathrm{E}_1$ となる。したがって，$\alpha<m$ となる。$m\notin\mathrm{E}_1$，$m\in\mathrm{A}_2$ だから $\mathrm{E}_1\subsetneqq\mathrm{A}_2$ となり，$m<\beta$ となる。

[証終]

つぎに有理数の切断と全く同様に実数の切断を定義する。

$\mathbf{R}$の部分集合 **A**，**B**に対して（**A**，**B**）が実数の切断であるとは，
（１）$\mathbf{A}\neq\phi$，$\mathbf{B}\neq\phi$（ϕは空集合を表す）
（２）$\mathbf{A}\cup\mathbf{B}=\mathbf{R}$，$\mathbf{A}\cap\mathbf{B}=\phi$
（３）$a\in\mathbf{A}$，$b\in\mathbf{B}$ ならば $a<b$

が成立するときをいう。

実数の切断については次の定理２が成立する。すなわち，有理数の切断の（ハ）は起こりえない。これを実数の連続性という。

定理２．$(\mathbf{A},\ \mathbf{B})$ を実数の切断とすると，$\mathbf{A}$ に最大数があるか，$\mathbf{B}$ に最小数があるか，いずれか一方だけが成立する。

証明．$\mathbf{A}$ に最大数があり，$\mathbf{B}$ に最小数がある場合は有理数の切断の場合と同様にして，ありえない。

いま $A_1=\mathbf{A}\cap\mathbf{Q}$，$B_1=\mathbf{B}\cap\mathbf{Q}$ とする。ここで $\mathbf{Q}$ は有理数全体の集合である。

$A_1\cup B_1=(\mathbf{A}\cup\mathbf{B})\cap\mathbf{Q}=\mathbf{Q}$，$A_1\cap B_1=(\mathbf{A}\cap\mathbf{B})\cap\mathbf{Q}=\phi$

が成立する。$\mathbf{A}\neq\phi$ だから，$x\in\mathbf{A}$ が存在する。x は有理数の切断だから，$x=(\mathrm{E},\ \mathrm{F})$ と表される。$\mathrm{E}\neq\phi$ だから $\mathrm{E}\ni a$ とすると，$\{r\in\mathbf{Q}\mid r<a\}\subsetneqq\mathrm{E}$ だから，$a<x$ となる。よって $a\in\mathbf{A}\cap\mathbf{Q}=A_1$ となるから $A_1\neq\phi$ となる。同様にして $B_1\neq\phi$ となる。したがって $(A_1,\ B_1)$ は有理数の切断である。$(A_1,\ B_1)=\alpha$ とすると $\alpha\in\mathbf{R}=\mathbf{A}\cup\mathbf{B}$ であるから $\alpha\in\mathbf{A}$ または $\alpha\in\mathbf{B}$ である。いま $\alpha\in\mathbf{A}$ としてみる。$\alpha<\xi$ とすると $\alpha<m<\xi$ となる有理数 m がある。$\mathrm{E}_1=\{r\in\mathbf{Q}\mid r<m\}$，$\mathrm{E}_2=\{r\in\mathbf{Q}\mid r\geqq m\}$ とすると $m=(\mathrm{E}_1,\ \mathrm{E}_2)$ である。$\alpha<m$ より $A_1\subsetneqq\mathrm{E}_1$ だから $m\notin A_1$ となる。したがって $m\in B_1$ となるから，$m\in\mathbf{B}$ となり，$m<\xi$ だから $\xi\in\mathbf{B}$ となる。したがって α は $\mathbf{A}$ の最大数である。$\alpha\in\mathbf{B}$ のときは $\eta<\alpha$ とすると $\eta<s<\alpha$ となる有理数 s がある。$s=(\mathrm{F}_1,\ \mathrm{F}_2)$ とすると $\mathrm{F}_2=\{r\in\mathbf{Q}\mid r\geqq s\}$ である。$s<\alpha$ より $B_1\subsetneqq\mathrm{F}_2$ だから $s\notin B_1$ となり，したがって $s\in A_1$ となる。よって $s\in\mathbf{A}$ で，$\eta<s$ だから $\eta\in\mathbf{A}$ となる。したがって α は $\mathbf{B}$ の最小数である。　［証終］

$\mathbf{R}$ の部分集合Ｓが上に有界である（下に有界である）とは，実数Ｍが存在して，すべての $x\in\mathrm{S}$ に対して $x\leqq\mathrm{M}$（$x\geqq\mathrm{M}$）が成立するときをいう。このときＭをＳの上界（下界）という。上にも下にも有界な集合を有界集合という。Ｓの上界の中で最小の数 α が存在するとき α をＳの上限という。同様にＳの下界の中で最大の数 β が存在するとき β をＳの下限という。このとき実数の連続性から次の定理が成立する。

定理３．$\phi\neq\mathrm{S}$，$\mathrm{S}\subset\mathbf{R}$ とする。

（１）Ｓが上に有界ならば，Ｓの上限が存在する。

（２）Ｓが下に有界ならば，Ｓの下限が存在する。

証明．（１）を示す。Ｓは上に有界とする。Ｓの上界全体の集合を $\mathbf{B}$ とする。$\mathbf{A}=\{x\in\mathbf{R}\mid x\notin\mathbf{B}\}$ とおく。このとき $(\mathbf{A},\ \mathbf{B})$ は実数の切断である。定理２より，$\mathbf{A}$ に最大数があるか $\mathbf{B}$ に最小数があるか，いずれか一方だけが成立する。いま $\mathbf{A}$ に最大数 a があると仮定する。$a\in\mathbf{A}$，$a\notin\mathbf{B}$ だから a はＳの上限ではない。したがって $a<x$ となる $x\in\mathrm{S}$ が存在する。定理１より $a<m<x$ となる有理数 m が存在する。m はＳの上界ではないから $m\in\mathbf{A}$ となる。これは a がＳの最大数であることに矛盾する。よって $\mathbf{A}$ に最大数は存在しない。したがって $\mathbf{B}$ に最小数 b が存在する。b はＳの上界の中で最小だから，Ｓの上限である。　［証終］

次に一見自明と思われる次の定理を証明する。

定理４．（アルキメデスの原理）$a>0$，$b>0$ に対して，$na>b$ となる自然数 n が存在する。

証明．すべての自然数 n について $na \leqq b$ が成立したと仮定する。

$$A=\{a,\ 2a,\ 3a,\ \cdots\cdots,\ na,\ \cdots\cdots\}$$

は b を上界としてもつから，上に有界である。したがって上限 α をもつ。
$\alpha-a$ はAの上界ではないから，$\alpha-a<ma$ となる自然数 m が存在する。$\alpha<(m+1)a$ となり，α がAの上限であることに矛盾する。［証終］

数列 $\{a_n\}$ が α に収束するとは，
任意の $\varepsilon>0$ に対して，自然数N（Nは ε に関係する）が存在して，

$$n \geqq N \text{ ならば } |a_n-\alpha|<\varepsilon$$

が成立するときをいう。このとき $\lim_{n\to\infty} a_n=\alpha$ または $a_n \to \alpha$ と表す。

アルキメデスの原理から次のことが示される。

例題．$\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0$．

解．$\varepsilon>0$ とする。アルキメデスの原理より，$N\varepsilon>1$ となる自然数Nが存在する。
$n \geqq N$ ならば

$$\frac{1}{n} \leqq \frac{1}{N}<\varepsilon$$

となるから，$\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0$ となる。

３．指数関数

定理５．有界な単調数列は収束する。

証明．$\{a_n\}$ は単調増加とする。

$$A=\{a_1,\ a_2,\ \cdots\cdots,\ a_n,\ \cdots\cdots\}$$

とすると，集合Aは上に有界だから，上限 α をもつ。すなわち

$$a_n \leqq \alpha\ (n=1,\ 2,\ \cdots\cdots)$$

となる。$\varepsilon>0$ に対して $\alpha-\varepsilon$ はAの上界ではないから，$\alpha-\varepsilon<a_N$ をみたす a_N が存在する。$n \geqq N$ ならば

$$\alpha-\varepsilon<a_N \leqq a_n \leqq \alpha$$

となるから，$|a_n-\alpha|<\varepsilon$ となり，$\lim_{n\to\infty} a_n=\alpha$ が成立する。［証終］

次に収束数列と有界数列との関係について述べる。例えば $a_n=(-1)^n$ とすると，$\{a_n\}$ は有界数列だが，収束しない。しかし逆は成立する。

補題１．収束数列は有界数列である。

証明．$\lim_{n\to\infty} a_n = a$ とする。収束の定義において，$\varepsilon = 1$ とすると，自然数Ｎが存在して，

$$n \geqq N \text{ ならば } |a_n - a| < 1$$

となる。したがって，$n \geqq N$ ならば $|a_n| < |a| + 1$ となる。

$$M = \max\{|a_1|, |a_2|, \cdots, |a_{N-1}|, |a| + 1\}$$

とおくと，$|a_n| \leqq M\ (n = 1, 2, \cdots)$ となるから，$\{a_n\}$ は有界数列である。

［証終］

有界数列は必ずしも収束しないが，部分列をうまく抜き出せば収束させることができる。

定理６．有界数列から収束する部分列が取り出せる。

証明．$\{a_n\}$ は有界数列とする。

（ｉ）$A = \{a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots\}$
が有限集合のとき。

このときは $\{a_n\}$ の中に同じものが（それを例えばＰとする）くり返し出てくるから，それを順番に抜き出したものを $\{a_{kn}\}_{n=1}^{\infty}$ とする。すなわち，

$$a_{k1} = a_{k2} = a_{k3} = \cdots = P$$

となる。したがって，$\lim_{n\to\infty} a_{kn} = P$ となるから，収束する部分列 $\{a_{kn}\}$ が抜き出せる。

（ii）$A = \{a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots\}$ が無限集合のとき。

$|a_n| < M\ (n = 1, 2, \cdots)$ となっているから，区間 $[-M, M]$ を２等分すると，$[-M, 0]$，$[0, M]$ のどちらかにＡの元が無限個含まれる。それを I_1 とする（両方とも無限個含むときは右側と決めておく）。I_1 を２等分すると，その少なくとも一方はＡの元を無限個含む。それを I_2 とする。この操作をくり返す。I_1 にはＡの元が無限個含まれるから，１つ取り出したものを a_{k1} とする。I_2 にもＡの元が無限個含まれるから，$k_1 < k_2$ となるＡの元 a_{k2} を１つ取り出す。これをくり返す。このとき

$$I_1 \supset I_2 \supset \cdots \supset I_n \supset I_{n+1} \supset \cdots$$

となり，I_n の長さは I_{n-1} の長さの $\frac{1}{2}$ である。$I_n = [\alpha_n, \beta_n]$ とすると，

$$-M \leqq \alpha_n < \beta_n \leqq M$$

$$\alpha_1 \leqq \alpha_2 \leqq \cdots \leqq M$$

$$\beta_1 \geqq \beta_2 \geqq \cdots \geqq -M$$

となっている。$\{\alpha_n\}$，$\{\beta_n\}$ は有界な単調数列だから収束する。

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \alpha,\ \lim_{n\to\infty} \beta_n = \beta$$

とする。一方 $\beta_n - \alpha_n = M / 2^{n-1}$ であるから，$n \to \infty$ とすると，$\alpha = \beta$ となる。a_{kn} は I_n に含まれるから，

$$\alpha_n \leqq a_{kn} \leqq \beta_n$$

となる。$n \to \infty$ とすると，

$$\lim_{n\to\infty} a_{kn} = \alpha\ (= \beta)$$

となって $\{a_{k_n}\}$ は収束する。 [証終]

数列 $\{a_n\}$ がコーシー列であるとは

$n,\ m\to\infty$ のとき $a_n-a_m\to 0$

をみたすときをいう。これを論理記号を使って定義すると，次のようになる。

$$\left(\begin{array}{l}\{a_n\}\ \text{はコーシー列である。}\\ \Leftrightarrow\\ \text{任意の}\ \varepsilon>0\ \text{に対して，自然数Nが存在して，}\\ \quad m,\ n\geqq \mathrm{N}\ \text{ならば}\ \ |a_n-a_m|<\varepsilon\\ \text{が成立する。}\end{array}\right)$$

収束数列とコーシー列との関係はどうなっているか。実は同値であることが Cauchy によって証明された。

定理７．$\{a_n\}$ が収束するための必要十分条件は $\{a_n\}$ がコーシー列になることである。

証明.（必要条件）$\{a_n\}$ は収束すると仮定する。すなわち $\lim_{n\to\infty} a_n=a$ と仮定する。

$$|a_n-a_m|<|a_n-a|+|a_m-a|\to 0$$
$$(n,\ m\to\infty\text{のとき})$$

となるから $\{a_n\}$ はコーシー列である。

（十分条件）$\{a_n\}$ はコーシー列とする。

（１）$\{a_n\}$ は有界数列であることを示す。

$\varepsilon=1$ とすると，コーシー列の定義から，自然数Nが存在して，

$$m,\ n\geqq \mathrm{N}\ \text{ならば}\ |a_n-a_m|<1$$

となる。特に $m=N$ とすると，

$$|a_n-a_\mathrm{N}|\leqq 1\quad(n\geqq \mathrm{N})$$

となる。

$$\mathrm{M}=\max\{|a_1|,\ |a_2|,\ \cdots\cdot,\ |a_{\mathrm{N}-1}|,\ |a_\mathrm{N}|+1\}$$

とおくと，$|a_n|\leqq \mathrm{M}$ $(n=1,\ 2,\ \cdots\cdot)$ となるから $\{a_n\}$ は有界数列である。

（２）$\{a_n\}$ は収束することを示す。

定理６より $\{a_n\}$ から収束する部分列 $\{a_{k_n}\}_{n=1}^{\infty}$ が取り出せる。

$$\lim_{n\to\infty} a_{k_n}=a$$

とする。

$$|a_n-a|\leqq|a_n-a_{k_n}|+|a_{k_n}-a|$$

となる。$n\to\infty$ のとき $k_n\to\infty$ となるから $a_n-a_{k_n}\to 0$，$a_{k_n}\to a$

となり，したがって，$\lim_{n\to\infty} a_n=a$ が成立する。 [証終]

次の定理の証明は Rudin［３］による。

定理8．実数 $x>0$ と自然数nに対して $y^n=x$ となる実数 $y>0$ がただ一つ存在する。このyを $\sqrt[n]{x}$ または $x^{\frac{1}{n}}$ で表す。

証明. $A=\{t\in\mathbf{R}\mid t>0,\ t^n<x\}$
とする。$x/(1+x)=s$ とおくと $s^n\leqq s<x$ より $s\in A$ となるから $A\neq\phi$ である。$t>1+x$ ならば $t^n\geqq t>x$ となり $t\notin A$ となる。したがって，$t\in A$ ならば $t\leqq 1+x$ となるから，Aは上に有界である。したがって，定理3よりAの上限yが存在する。ここで $y>0$ である。$y^n=x$ となることを次に示す。そのために次の不等式が成立することを注意しておく。

$$(*)\qquad \left(\begin{array}{l} 0<a<b \text{ のとき} \\ b^n-a^n=(b-a)(b^{n-1}+b^{n-2}a+\cdots\cdots+a^{n-1}) \\ \qquad\quad \leqq(b-a)nb^{n-1} \end{array}\right)$$

いま $y^n<x$ が成立したと仮定する。h を

$$0<h<1,\ h<\frac{x-y^n}{n(y+1)^{n-1}}$$

となるようにとる。(＊) より

$$(y+h)^n-y^n\leqq hn(y+h)^{n-1}<x-y^n$$

となるから，$(y+h)^n<x$ となり $y+h\in A$ となる。これはyがAの上限であることに矛盾する。

次に $y^n>x$ が成立したと仮定する。

$$k=\frac{y^n-x}{ny^{n-1}}$$

とおくと $0<k<y$ となる。いま $t\geqq y-k$ とすると (＊) より

$$y^n-t^n\leqq y^n-(y-k)^n\leqq kny^{n-1}=y^n-x$$

となり，$t^n\geqq x$ となるから，$t\notin A$ となる。したがって，$t\in A$ ならば $t\leqq y-k$ となるから，$y-k$ はAの上界である。これはyがAの上限であることに矛盾する。

以上のことから，$y^n=x$ となる。もし $y_1{}^n=y_2{}^n=x$ となる正数 y_1，y_2 があったとすると

$$(y_1-y_2)(y_1{}^{n-1}+y_1{}^{n-2}y_2+\cdots\cdots+y_2{}^{n-1})=0$$

より $y_1=y_2$ となる。　[証終]

$a>0$ とする。nが負の数のとき

$$a^{\frac{1}{n}}=\left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{1}{(-n)}}$$

と定義する。rが有理数のとき，$r=\dfrac{p}{q}$ (p，q は整数で $q>0$)
とすると，

$$a^r=(a^p)^{\frac{1}{q}}$$

と定義する。$r=p_1/q_1$ (p_1，q_1 は整数で $q_1>0$) とも表されたとする。$p_1q=pq_1$ だから，

$$\left\{(a^{p_1})^{\frac{1}{q_1}}\right\}^{pq_1}=a^{pp_1}=\left\{(a^{p})^{\frac{1}{q}}\right\}^{pq_1}$$

となり，$(a^{p_1})^{1/q_1}=(a^{p})^{1/q}$ が成立する。したがって，a^r の定義は r の表し方によらない。

次の補題3，補題4の証明は容易であるが，証明を与えることにする。

補題3．$a>0$ とする。r, s が有理数ならば

$$a^{r+s}=a^r a^s$$

証明．

$$r=\frac{p_1}{q_1},\ s=\frac{p_2}{q_2}\quad(p_1,\ p_2,\ q_1,\ q_2 \text{は整数で，} q_1>0,\ q_2>0)$$

とすると，

$$(a^{r+s})^{q_1q_2}=a^{p_1q_2+p_2q_1}=(a^r a^s)^{q_1q_2}$$

となるから，$a^{r+s}=a^r a^s$ が成立する。　[証終]

補題4．r, s は有理数で $r<s$ とする。このとき

（1）$a>1$ ならば $a^r<a^s$

（2）$0<a<1$ ならば $a^r>a^s$,

証明．

$$r=\frac{p_1}{q_1},\ s=\frac{p_2}{q_2}\quad(p_1,\ p_2,\ q_1,\ q_2 \text{は整数で} q_1>0,\ q_2>0)$$

とする。$a>1$ とする。仮定より $q_2p_1<p_2q_1$ だから

$$(a^s)^{q_1q_2}-(a^r)^{q_1q_2}=a^{p_2q_1}-a^{p_1q_2}=a^{p_1q_2}(a^{p_2q_1-p_1q_2}-1)>0$$

となるから $a^s>a^r$ が成立する。（2）も同様にして成立する。　[証終]

補題5．$a>1$，$|r|\leqq 1$，r は有理数とする。このとき

$$|a^r-1|\leqq|r|a(a-1)$$

が成立する。

証明．$0<r\leqq 1$ とすると $r=\dfrac{p}{q}$（p, q は整数で，$1\leqq p\leqq q$）と表される。$b=a^{1/q}$ とおくと $b>1$ となる。

$$a-1=b^q-1=(b-1)(b^{q-1}+\cdots\cdots+b+1)\geqq(b-1)q$$

となるから，

$$b-1\leqq\frac{1}{q}(a-1)$$

が成立する。一方

$$b^p-1=(b-1)(b^{p-1}+\cdots\cdots+b+1)\leqq(b-1)pb^{p-1}$$

が成立するから，

$$a^r-1=b^p-1\leqq(b-1)pb^{p-1}\leqq\frac{p}{q}(a-1)b^{p-1}\leqq r(a-1)a$$

が成立する。$-1\leqq r<0$ のときは $-r=s$ とおくと $s>0$ だから

$$|a^r-1|=\frac{a^s-1}{a^s}\leqq\frac{sa(a-1)}{a^s}\leqq sa(a-1)=|r|a(a-1)$$

となり定理は成立する。 [証終]

補題６．有理数列 $\{r_n\}$ が収束するならば，$\{a^{r_n}\}$ は収束する。特に $\{r_n\}$ が０に収束すれば $\{a^{r_n}\}$ は１に収束する。

証明．$a>1$ とする。$r_m-r_n\to 0$ $(m,\ n\to\infty)$ であるから，$|r_n-r_m|\leqq 1$ と仮定してよい。補題５より

$$|a^{r_m}-a^{r_n}|=a^{r_n}|a^{r_m-r_n}-1|\leqq a^{r_n}|r_m-r_n|a(a-1)$$

が成立する。一方 $\{r_n\}$ は有界数列だから（補題１），有理数Mが存在して，$|r_n|<\mathrm{M}$ となる。したがって

$$|a^{r_m}-a^{r_n}|\leqq a^{\mathrm{M}}|r_m-r_n|a(a-1)\to 0\quad(m,\ n\to\infty)$$

となるから，$\{a^{r_n}\}$ はコーシー列になり，定理３より収束する。

$0<a<1$ のときは

$$|a^{r_m}-a^{r_n}|=\left(\frac{1}{a}\right)^{-r_m}\left|1-\left(\frac{1}{a}\right)^{r_m-r_n}\right|\leqq\left(\frac{1}{a}\right)^{\mathrm{M}}|r_m-r_n|\frac{1}{a}\left(\frac{1}{a}-1\right)$$

となるから $\{a^{r_n}\}$ は収束する。後半は $r_n\to 0$ だから $|r_n|\leqq 1$ と仮定してよい。$a>1$ のとき

$$|a^{r_n}-1|\leqq|r_n|a(a-1)$$

より $\lim_{n\to\infty}a^{r_n}=1$ となる。$0<a<1$ のときも同様にして成立する。 [証終]

実数 x に対して，x に収束する有理数列 $\{r_n\}$ をとり，

$$a^x=\lim_{n\to\infty}a^{r_n}$$

と定義する。$\{s_n\}$ も x に収束する有理数列とすると，

$$\lim_{n\to\infty}a^{s_n}=\lim_{n\to\infty}a^{r_n}a^{s_n-r_n}=\lim_{n\to\infty}a^{r_n}$$

となるから，a^x の定義は x に収束する有理数列のとり方によらない。

定理９．$a>0$ とする。実数 $x,\ y$ に対して

$$a^{x+y}=a^x a^y$$

が成立する。特に a^x は０にならない。

証明．$\lim_{n\to\infty}r_n=x,\ \lim_{n\to\infty}s_n=y$ となる有理数列 $\{r_n\}$，$\{s_n\}$ をとる。補題３より

$$a^{x+y}=\lim_{n\to\infty}a^{r_n+s_n}=\lim_{n\to\infty}a^{r_n}\,a^{s_n}=a^x a^y$$

が成立する。

定理10．（１）$a>1$ のとき $f(x)=a^x$ は $-\infty<x<\infty$ で狭義単調増加関数である。（２）$0<a<1$ のとき $f(x)=a^x$ は $-\infty<x<\infty$ で狭義単調減少関数である。

証明．（１）を示す。$x<y$ となる実数 $x,\ y$ に対して定理１より $x<\alpha<\beta<y$ となる有理数 $\alpha,\ \beta$ がある。$\{r_n\}$ を x に収束する有理数列とすると，自然数 N が存在して，$n\geqq\mathrm{N}$ ならば $r_n<\alpha$ となるから補題４より $a^{r_n}\leqq a^{\alpha}$ となる。$n\to\infty$ とすると

$a^x \leqq a^\alpha$ となる。同様にして $a^\beta \leqq a^y$ となる。したがって

$$a^x \leqq a^\alpha < a^\beta \leqq a^y$$

となるから $a^x < a^y$ が成立する。(2)も同様にして成立する。　[証終]

$f(x)$ は $a<x<c$ で定義された関数とする。任意の $\varepsilon>0$ に対して $\delta>0$ ($\delta<c-a$) が存在して (δ は ε に関係する),

$$0<x-a<\delta \text{ ならば } |f(x)-A|<\varepsilon$$

が成立するとき, $\lim_{x \to a+0} f(x)=A$ または $A=f(a+0)$ と表す。

$f(x)$ は $c<x<a$ で定義された関数とする。任意の $\varepsilon>0$ に対して $\delta>0$ ($\delta<a-c$) が存在して,

$$0<a-x<\delta \text{ ならば } |f(x)-B|<\varepsilon$$

となるとき $\lim_{x \to a-0} f(x)=B$ または $B=f(a-0)$ と表す。

$f(x)$ は $0<|x-a|<c$ で定義された関数とする。任意の $\varepsilon>0$ に対して $\delta>0$ ($\delta<c$) が存在して,

$$0<|x-a|<\delta \text{ ならば } |f(x)-A|<\varepsilon$$

となるとき $\lim_{x \to a} f(x)=A$ と表す。定義より

$$\lim_{x \to a} f(x)=A \Leftrightarrow \lim_{x \to a+0} f(x)=\lim_{x \to a-0} f(x)=A$$

が成立する。

a の近傍で定義された関数 $f(x)$ が a で連続であるとは

$$\lim_{x \to a} f(x)=f(a)$$

が成立するときをいう。すなわち

$f(x)$ が a で連続 $\Leftrightarrow \lim_{x \to a} f(x)=f(a) \Leftrightarrow \lim_{x \to a+0} f(x)=\lim_{x \to a-0} f(x)=f(a)$
$\Leftrightarrow f(a)=f(a+0)=f(a-0)$

次に単調関数は右極限値と左極限値をもつことを示す。

定理11. $f(x)$ は $a<x<b$ で単調増加(単調減少)とすると, $f(x+0)$, $f(x-0)$ が存在して,

$$f(x-0) \leqq f(x) \leqq f(x+0) \quad (f(x-0) \geqq f(x) \geqq f(x+0))$$

が成立する。

証明. $f(x)$ は単調増加関数とする。$a<x<b$ に対して

$$A=\{f(t) \mid a<t<x\}$$

とおくと $f(x)$ はAの上界だから, A の上限 α が存在する。$\varepsilon>0$ に対して $\alpha-\varepsilon<f(x_0)$ となる x_0 ($a<x_0<b$) が存在する。$x_0<t<x$ ならば

$$\alpha-\varepsilon<f(x_0)<f(t) \leqq \alpha \leqq f(x)$$

となるから, $x-x_0=\delta$ とおくと

$$0<x-t<\delta \text{ ならば } |f(t)-\alpha|<\varepsilon$$

となるから, $\alpha=f(x-0)$ となる。次に

$$\mathrm{B}=\{f(t) \mid x<t<b\}$$
とおくと $f(x)$ はBの下界だからBは下限βをもち，$\beta=f(x+0) \geqq f(x)$ が成立する。$f(x)$ が単調減少のときも同様である。　[証終]

以上の準備のもとで，指数関数の連続性を証明する。

定理12. $a>0$とする。指数関数 $f(x)=a^x$ は $-\infty<x<\infty$で連続である。

証明. $a>1$とする。$x_0 \in \mathrm{R}$ とする。自然数nに対して
$$p<x_0<q,\ q-p<\frac{1}{n}$$
となる整数 p，q をとる。$f(x)$ は単調増加だから
$$a^p<a^{x_0}<a^q$$
となる。一方
$$a^p \leqq f(x_0-0) \leqq f(x_0) \leqq f(x_0+0) \leqq a^q$$
となるから，
$$0=f(x_0+0)-f(x_0-0) \leqq a^q-a^p=a^p(a^{q-p}-1) \leqq a^{x_0}(a^{\frac{1}{n}}-1)$$
が成立する。補題6より　$a^{\frac{1}{n}} \to 1$　だから
$$f(x_0+0)=f(x_0-0)=f(x_0)$$
となり，$f(x)$ はx_0で連続である。x_0は任意の実数だから，$f(x)$ は $(-\infty,\ \infty)$ で連続である。

系. $a>0$，$b>0$，x，yは実数とする。このとき
$$(ab)^x=a^x b^x, \qquad (a^x)^y=a^{xy}$$
が成立する。

証明. x が正の有理数のとき。$x=\dfrac{p}{q}$ (p，q は自然数) とする。
$$(a^x b^x)^q=(a^{\frac{p}{q}} b^{\frac{p}{q}})^q=(a^{\frac{p}{q}})^q(b^{\frac{p}{q}})^q=a^p b^p=\{(ab)^{\frac{p}{q}}\}^q=\{(ab)^x\}^q$$
となるから，$a^x b^x=(ab)^x$ が成立する。xが負の有理数のときは
$$a^x b^x=(a^{-x}b^{-x})^{-1}=\{(ab)^{-x}\}^{-1}=(ab)^x$$
となって成立する。x が無理数のときは x に収束する有理数列 $\{x_n\}$ をとると
$$a^x b^x=(\lim_{n\to\infty} a^{x_n})(\lim_{n\to\infty} b^{x_n})=\lim_{n\to\infty} a^{x_n}b^{x_n}=\lim_{n\to\infty}(ab)^{x_n}=(ab)^x$$
となり，前半の式が成立する。

つぎに x，y を有理数とする。$x=\dfrac{p}{q}$，$y=\dfrac{s}{t}$ (p，q，s，t は整数で，$q>0$，$t>0$) とすると
$$\{(a^x)^y\}^{qt}=(a^{xy})^{qt}$$
となるから，$(a^x)^y=a^{xy}$ が成立する。つぎにxは無理数，yは有理数とする。$y=\dfrac{p}{q}$ (p，qは整数で$q>0$) とする。$f(x)=x^p$ は $x \neq 0$ で連続だから，$\{x_n\}$ をxに収束する有理数列とすると
$$a^{px}=\lim_{n\to\infty} a^{px_n}=\lim_{n\to\infty}(a^{x_n})^p=(a^x)^p$$

が成立する。

$$\{(a^x)^y\}^q=\{(a^x)^{\frac{p}{q}}\}^q=(a^x)^p=a^{px}$$

$$(a^{xy})^q=(a^{\frac{px}{q}})^q=(\lim_{n\to\infty}a^{\frac{px_n}{q}})^q=\lim_{n\to\infty}(a^{\frac{px_n}{q}})^q=\lim_{n\to\infty}a^{px_n}=a^{px}$$

となるから $(a^x)^y=a^{xy}$ が成立する。最後に x, y がともに無理数のとき, $\{y_n\}$ を y に収束する有理数列とすると

$$(a^x)^y=\lim_{n\to\infty}(a^x)^{y_n}=\lim_{n\to\infty}a^{xy_n}=a^{xy}$$

となり，すべての実数 x, y について後半の式が成立する。　[証終]

4．おわりに

実数を有理数の切断によって定義したが，実数の加減乗除，単位元と零元の存在，分配法則等が成立することは省略した。高木貞治［1］を参照されたい。多くの微分積分の教科書には，有界集合が上限，下限をもつこと（定理3）は実数の公理のように書かれているが，実は19世紀後半に2人の数学者（Dedekind（1831−1916）と Cantor（1845−1918））が別々の方法で有理数から実数を構成することを試みたのである。切断によって実数を定義したのが Dedekind で，これから定理3が成立する。Cantor は有理数のコーシー列によって実数を定義した。この定義からただちに定理7が成立するのであるが，ここでは Cantor の方法は割愛した。高木貞治［2］によると，Dedekind が切断のアイデアを持ったのは1858年で、それを完成させて公表したのは1872年であった。

参考文献

［1］高木貞治　解析概論　岩波書店
［2］高木貞治　数学雑談　共立出版
［3］W. Rudin　Principles of Mathematical Analysis, McGraw-Hill