

チョッパ駆動直流直巻電動機系の線形サンプル値モデル

山 田 英 二*・辻 峰 男*
 泉 勝 弘*・村 田 隆 弘*
 小 山 純**

The Linear Sampled-Data Model of Chopper-Fed DC Series Motor

by

Eiji YAMADA*, Mineo TSUJI*
 Katsuhiro IZUMI*, Takahiro MURATA*
 and Jun OYAMA**

This paper presents the steady-state and transient analysis of a dc series motor controlled by a GTO chopper. The main problem in the analysis of the chopper-fed dc series motor arises due to the nonlinear relation between the electromagnetic torque and armature current. Accurate solution of the nonlinear differential equations can only obtain numerically by the use of considerable computation time. The steady-state periodical solution is calculated by applying Newton's method. It requires much less computation time. And the system is expressed as a linear sampled-data model around a steady-state equilibrium state. The stability of this system and transient responses are studied by applying this model. A comparison between the transient responses computed by the computer simulation and those predicted by the linear model is made.

1. まえがき

チョッパで駆動される直流直巻電動機系の動作は、制御周期内に異なるモードを持ち、しかも非線形微分方程式で記述されるため、解析解を得るのは困難である。そこで一般には、この方程式を各モードごとに数値積分し、定常解や過渡応答を求めている。しかしながら、定常解を求めるには、過渡状態を経て定常状態に至るまでの数値積分を必要とし、特にダンピングが弱い場合には計算時間は非常に長くなる。また、線形モデルの導出¹⁾に関する研究は近似的で十分とは言えない。

本稿では、まず定常解析において Newton 法を用いたアルゴリズムにより計算時間の短縮を図り、その結果得られる理論値と実験値との比較検討を行う。次

に、定常値で定まる平衡点に関して状態量の微小変動を考えることにより系の線形サンプル値モデルを導出し、安定性や過渡特性を明確にする。さらに、負荷トルクの変化に対するステップ応答を線形モデルより計算し、この結果と直接数値積分した結果を比較することにより線形モデルの妥当性を示す。

2. 系の記述

Fig. 1に解析の対象となるチョッパ駆動直流直巻電動機系を示す。この系の動作を解析するにあたり次の仮定を設ける。

- (1) GTO とダイオードは、一定の順方向電圧降下を持ち、逆方向には抵抗無限大とする。
- (2) 電動機電機子巻線及び界磁巻線は、抵抗とイン

昭和58年9月30日受理

* 電子工学科 (Department of Electronics)

** 電気工学科 (Department of Electrical Engineering)

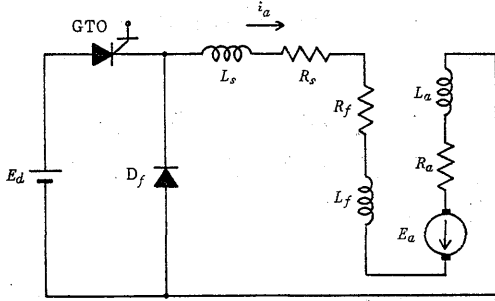


Fig. 1 A dc chopper circuit.

ダクタンスの直列回路で表せる。

(3) スナバ回路の影響を無視する。

(4) うず電流を無視する。

一般に、この系の動作は二つのモード（オン期間、オフ期間）から構成される。

オン期間での回路方程式は次式で与えられる。

$$E_d = (R_s + R_f + R_a)i_a + (L_s + L_f + L_a)\frac{di_a}{dt} + KL_f i_a \omega_m + E_g + E_b \quad (1)$$

但し、 L_s, R_s : 平滑リアクトルのインダクタンス分(H)及び抵抗分(Ω), L_f, R_f : 界磁巻線インダクタンス分(H)及び抵抗分(Ω), ω_m : 回転角速度($=2\pi N/60$, N : 回転数 (rpm), 機械角 rad/s), E_g : GTO 電圧降下 (V), E_b : ブラシ電圧降下 (V), E_a : 電源電圧 (V), i_a : 電機子電流 (A), K : 逆起電力定数 (Nm/WbA)

オン期間での運動方程式は次式で与えられる。

$$J\frac{d\omega_m}{dt} = K L_f i_a^2 - T_L \quad (2)$$

但し、 J : 慣性モーメント (kg-m²), T_L : 負荷トルク (N-m)

(1), (2)式より状態方程式は次式となる。

$$\frac{di_a}{dt} = \frac{1}{L}(E_d - R i_a - K L_f i_a \omega_m - E_g - E_b) \quad (3)$$

$$\frac{d\omega_m}{dt} = \frac{1}{J}(K L_f i_a^2 - T_L) \quad (4)$$

但し、 $R = R_s + R_f + R_a$, $L = L_s + L_f + L_a$

同様にオフ期間での状態方程式は、次式で表わせる。

$$\frac{di_a}{dt} = \frac{1}{L}(-R i_a - K L_f i_a \omega_m - E_f - E_b) \quad (5)$$

$$\frac{d\omega_m}{dt} = \frac{1}{J}(K L_f i_a^2 - T_L) \quad (6)$$

但し、 E_f : ダイオード電圧降下 (V)

(3), (4)式及び(5), (6)式の状態方程式を非線形微分方程式として次の様に書く。

$$p\mathbf{x} = \mathbf{f}_i(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \quad (i = 1, 2) \quad (7)$$

ここで、 p は d/dt を示し、 $i=1, 2$ はそれぞれオン期間、オフ期間を示す。また、プロセス状態ベクトル \mathbf{x} 及び入力状態ベクトル \mathbf{u} は、次の様に選んでいる。

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} i_a \\ \omega_m \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} E_d \\ T_L \end{bmatrix} \quad (8)$$

Fig. 2 に電流波形とモードの分割を示す。周期 T_k は $t_{k+1} - t_k$ であり、定常状態では $T_k = T$, $T_{ON}^k = T_{ON}$, $T_{OFF}^k = T_{OFF}$ とする。 \mathbf{x} は連続的に変化するので接続行列は必要ない。以下周期ごとに同様の動作を繰り返す。

以上のようにチョップパ駆動直流直巻電動機系を記述することができる。

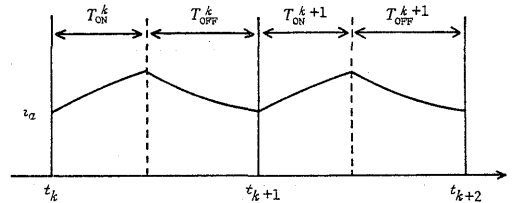


Fig. 2 Time diagram for an armature current.

3. 定常解析

系を記述する非線形微分方程式の定常周期解（平衡解）を求めるのに Newton 法を用いる。Newton 法は、従来より非線形電子回路の解析²⁾や電流形インバータシステムの解析³⁾などに用いられている。本章では、周期的に二つのモードを持つチョップパ駆動直流直巻電動機系にこの方法を拡張する。

与えられた入力 $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0$ (一定) に対し、定常周期解が存在すると仮定すると、

$$\mathbf{x}_0(t_{k+1}) = \mathbf{x}_0(t_k) \quad (9)$$

が成り立つ。 $\mathbf{x}(t_k) \equiv \mathbf{x}$ とおくと、一般に $\mathbf{x}(t_{k+1})$ は \mathbf{x} により一意的に定まり、 \mathbf{x} の写像と考えられるので、 $\mathbf{M}(\mathbf{x})$ と表わすことにする。定常状態では(9)式より次式が成立する。

$$\mathbf{M}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \quad (10)$$

従って定常周期解を得るには、(10)式を満足するような \mathbf{x} を求めればよいことになる。推定値として $\hat{\mathbf{x}}$ を与えた場合、 $\hat{\mathbf{x}} + \delta\mathbf{x}$ ($\delta\mathbf{x}$: 修正量) が(10)式を満足するものとすれば、

$$\mathbf{M}(\hat{\mathbf{x}} + \delta\mathbf{x}) = \hat{\mathbf{x}} + \delta\mathbf{x} \quad (11)$$

が成り立つ。(11)式の左辺を $\hat{\mathbf{x}}$ のまわりでテイラー展開して、一次の項まで考慮すると次式を得る。

$$\mathbf{M}(\hat{\mathbf{x}}) - \hat{\mathbf{x}} = \left(\mathbf{I} - \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \mathbf{x}} \bigg|_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}} \right) \delta\mathbf{x} \quad (12)$$

但し、 \mathbf{I} は単位行列を示す。

推定値 \hat{x} が定常解に近ければ、 δx は比較的小さな量となり(12)式は良好な精度をもつと考えられる。そこで(12)式を満足するような δx を求め、推定値 \hat{x} をその分だけ修正すれば(10)式を満足するような x が求まることになる。次に、初期推定値の与え方について述べる。まず電機子電流 i_a は、(4)式より $d\omega_m/dt=0$ と考えて

$$i_a = \sqrt{\frac{T_L}{KL_f}} \quad (13)$$

とする。回転角速度 ω_m は、(3)式より $di_a/dt=0$ とおき、電源電圧 E_d を通流率 $\alpha=T_{ON}/T$ を考慮して、 αE_d と考えることにより、

$$\omega_m = \frac{\alpha E_d - R i_a}{KL_f i_a} \quad (14)$$

と与える。

以上、Newton 法による定常周期解決定の手順を整理すると次のようになる。

- (i) 定常解の推定値 \hat{x} を(13)、(14)式より与える。
- (ii) $M(\hat{x})$ を計算し、十分小さな正の判定値 ε に対し $\|M(\hat{x}) - \hat{x}\|_Q < \varepsilon$ であれば計算を終わる。
- (iii) $\frac{\partial M}{\partial x} \Big|_{x=\hat{x}}$ を計算する。
- (iv) (12)式から δx を求め $\hat{x} \leftarrow (\hat{x} + \delta x)$ と修正し、手順 (ii) にもどる。

上述の手順で実際に数値計算を行う場合、必要となる状態方程式の数値積分および手順 (iii) の偏微係数行列 $\partial M/\partial x \Big|_{x=\hat{x}}$ の計算法を以下に述べる。

常微分方程式の数値解法には種々のものがあり、必要に応じて適切な方法を選定すべきであるが、ここでは、数値的不安定性がないこと、プログラミングが容易であること、Euler 法に比べて精度が良いこと、計算時間も比較的短いことなどの理由から修正 Euler 法(二次の Runge-Kutta 法)を用いることにする。

偏微係数行列 $\partial M/\partial x \Big|_{x=\hat{x}}$ は、次の手順で求めることができる。 $\partial M/\partial x \Big|_{x=\hat{x}}$ の (i, j) 成分 $\partial M_i/\partial x_j$ は、近似的に x の j 成分が Δx_j だけ微小変動した場合の M の i 成分 M_i の微小変動分 ΔM_i との比を示す。但し、この際の Δ は \hat{x} に対する x の解軌道に沿っての変動を意味する。実際の計算手順を以下に示す。

- (i) 状態変数の初期値を $x(t_k) = \hat{x}$ 、期間 $t_k \leq t \leq t_{k+1}$ の入力を $u(t_k) = u_0$ (一定) とし、(7)式を数値積分して $M(\hat{x}) (=x(t_{k+1}))$ を計算する。

- (ii) 状態変数の初期値および入力を

$$x(t_k) = \hat{x} + \Delta x = \begin{bmatrix} i_a + \Delta i_a \\ \omega_m \end{bmatrix}, \quad u(t_k) = u_0 \quad (15)$$

とおき、(7)式を数値積分し $M(\hat{x} + \Delta x)$ を求める。次

に、

$$\Delta M = M(\hat{x} + \Delta x) - M(\hat{x}) \quad (16)$$

の電流についての成分 ΔM_1 を用いて、次式から (1, 1) 成分を求める。

$$\frac{\partial M_1}{\partial x_1} = \frac{\Delta M_1}{\Delta i_a} \quad (17)$$

同様に、速度についての成分 ΔM_2 より (2, 1) 成分が求まる。

- (iii) 状態変動の初期値および入力を

$$x(t_k) = \hat{x} + \Delta x = \begin{bmatrix} i_a \\ \omega_m + \Delta \omega_m \end{bmatrix}, \quad u(t_k) = u_0 \quad (18)$$

とおき、手順(ii)と同様にして (1, 2), (2, 2) 成分を求める。

従って、Newton 法の 1 回の繰返しに対し周期 T に関する数値積分は 3 回必要となる。

4. 線形サンプル値モデル

前章で得られた定常周期解に関し、状態量の微小変動を考えると、線形モデルが得られる。このように非線形系を定常周期解に関して線形化すると線形制御理論の適用ができるため、安定性の評価等に役立つ。

系の動作が周期的に繰返すことから、サンプル値系として線形モデルを次式のように表わす。

$$\Delta x(t_{k+1}) = \Phi \Delta x(t_k) + \Theta \Delta u(t_k) \quad (19)$$

$$\Delta y(t_k) = C \Delta x(t_k) + D \Delta u(t_k) \quad (20)$$

ここで、状態ベクトル Δx 、入力ベクトル Δu は、

$$\Delta x = \begin{bmatrix} \Delta i_a \\ \Delta \omega_m \end{bmatrix}, \quad \Delta u = \begin{bmatrix} \Delta E_d \\ \Delta T_L \end{bmatrix} \quad (21)$$

である。(19)~(21)式の Δ は定常解に対する微小変動を示している(以下同様)。

(19)式の対象推移行列 Φ は、 t_k における状態ベクトルの微小変動分に対する t_{k+1} での微小変動分の比として計算できる。しかし、 Φ の計算は新たに行う必要はなく、3章の定常解析で述べたことから、定常解に十分近づいた段階では、3章における Δx_j 、 ΔM_i は定常解に対する微小変動と考えてよく、定常解析を行う際に Φ は求まる。すなわち十分小さな正の判定値 ε に対し、 $\|M(\hat{x}) - \hat{x}\|_Q < \varepsilon$ のとき次式が成立する。

$$\frac{\partial M}{\partial x} \Big|_{x=\hat{x}} = \Phi \quad (22)$$

次に制御推移行列 Θ は、初期値 $x(t_k)$ 及び入力 u を

$$x(t_k) = x_0(t_k), \quad u(t_k) = u_0 + \Delta u = \begin{bmatrix} E_{d0} + \Delta E_d \\ T_{L0} \end{bmatrix} \quad (23)$$

として、一周期後の状態変数 $x(t_{k+1})$ の微小増加

$$\Delta x(t_{k+1}) = x(t_{k+1}) - x_0(t_{k+1}) \quad (24)$$

を求める。この $\Delta x(t_{k+1})$ より、 Θ の成分 θ_{11} 、 θ_{21} が

次のように計算できる。

$$\theta_{11} = \frac{\Delta i_a(t_{k+1})}{\Delta E_d}, \quad \theta_{21} = \frac{\Delta \omega_m(t_{k+1})}{\Delta E_d} \quad (25)$$

θ_{12} , θ_{22} は T_L の微小変動に対する $\Delta x(t_{k+1})$ を求めることにより同様に計算できる。

系の出力は、電機子電流 i_a 、発生トルク τ_e 、回転数 N のサンプリング周期 T_k における平均値の微小変動分を $\Delta I_a(t_k)$, $\Delta T_e(t_k)$, $\Delta N(t_k)$ と表示し、これを考える。すなわち、

$$\Delta y(t_k) = [\Delta I_a(t_k), \Delta T_e(t_k), \Delta N(t_k)]^T \quad (26)$$

とする。

$y(t_k)$ は $x(t_k)$, $u(t_k)$ で一意的に定まるから、

$$y(t_k) = y(x(t_k), u(t_k)) \quad (27)$$

と表わせる。(27)式より、

$$\Delta y(t_k) = \frac{\partial y(t_k)}{\partial x(t_k)} \Delta x(t_k) + \frac{\partial y(t_k)}{\partial u(t_k)} \Delta u(t_k) \quad (28)$$

となる。(28)式と比較して、次式を得る。

$$C = \frac{\partial y(t_k)}{\partial x(t_k)}, \quad D = \frac{\partial y(t_k)}{\partial u(t_k)} \quad (29)$$

C , D を成分で表わすと、

$$C = \begin{pmatrix} \frac{\partial I_a(t_k)}{\partial i_a(t_k)} & \frac{\partial I_a(t_k)}{\partial \omega_m(t_k)} \\ \frac{\partial T_e(t_k)}{\partial i_a(t_k)} & \frac{\partial T_e(t_k)}{\partial \omega_m(t_k)} \\ \frac{\partial N(t_k)}{\partial i_a(t_k)} & \frac{\partial N(t_k)}{\partial \omega_m(t_k)} \end{pmatrix} \quad (30)$$

$$D = \begin{pmatrix} \frac{\partial I_a(t_k)}{\partial E_d(t_k)} & \frac{\partial I_a(t_k)}{\partial T_L(t_k)} \\ \frac{\partial T_e(t_k)}{\partial E_d(t_k)} & \frac{\partial T_e(t_k)}{\partial T_L(t_k)} \\ \frac{\partial N(t_k)}{\partial E_d(t_k)} & \frac{\partial N(t_k)}{\partial T_L(t_k)} \end{pmatrix} \quad (31)$$

である。これらの偏微分は先に述べた方法すなわち数値微分として計算できる。

このようにして求まった(19), (20)式の線形サンプル値モデルは、以下に示す応用が考えられる。

(1) 安定判別 対象推移行列 Φ の固有値 λ_i ($i=1, 2$) より安定判別が可能となる。パラメータの変化に対する λ_i の軌跡より安定性の傾向が判る。

(2) 過渡応答の計算 平衡点の近傍における過渡応答が計算できる。

5. 解析結果

5.1 定常特性

実験に用いた電動機の数値及び回路パラメータを Table 1 に示す。

Fig. 3 は電源電圧 E_d を 100V としたときの負荷トルク T_L に対する電機子電流の平均値 I_a の特性であ

Table 1. Motor constants and circuit parameters

Motor: rating 1.3kW, 100V, $P=2$
 $J=0.0477\text{kg}\cdot\text{m}^2$ (inertia including that of dc load motor)

Motor constants	Circuit parameters
$R_a=0.78\Omega$	$R_s=0.457\Omega$
$R_f=0.102\Omega$	$L_s=0.0258\text{H}$
$L_a=0.0155\text{H}$	$E_g=2.0\text{V}$
$L_f=0.00849\text{H}$	$E_f=0.4\text{V}$
$K=2.72\text{Nm/WbA}$	
$E_b=0.95\text{V}$	

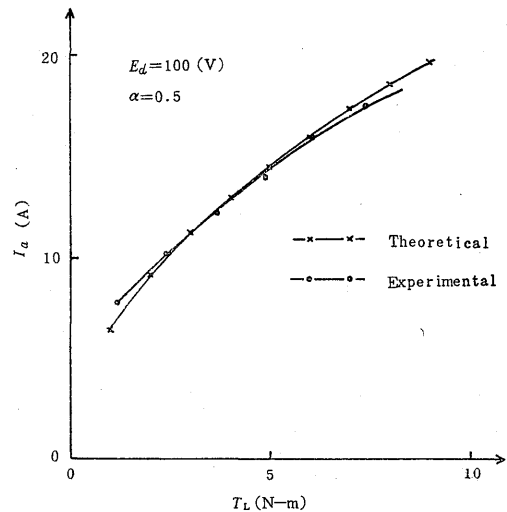


Fig. 3 Graph of load torque vs. average armature current.

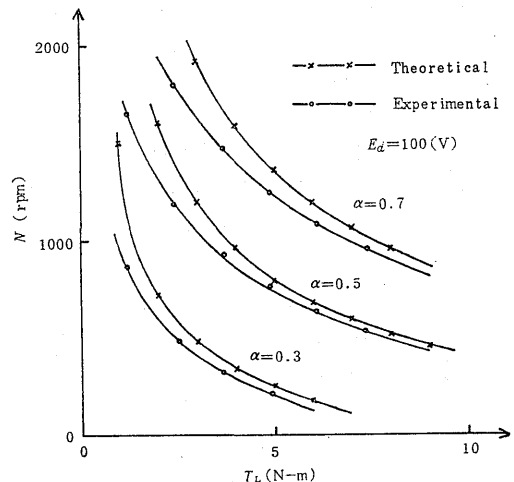
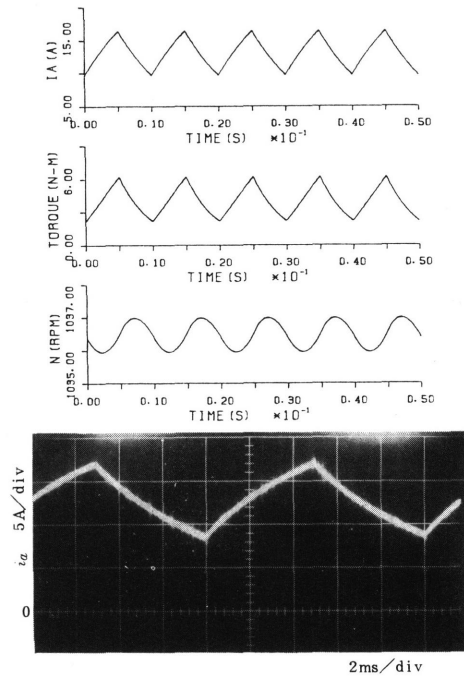


Fig. 4 Graph of load torque vs. speed.

る。実測値と計算値を比較した場合、その変化の傾向及び値は、ほとんど一致している。

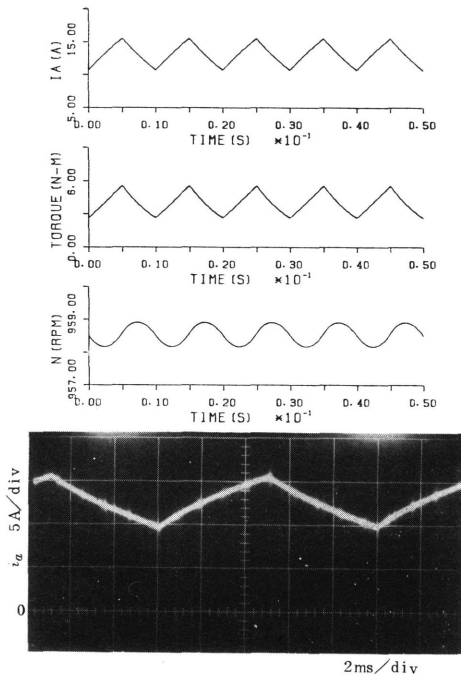
次に負荷トルク T_L に対する回転数 N の変化を Fig. 4 に示す。パラメータとして通流率 α を選び、 $\alpha=0.3, 0.5, 0.7$ の場合について示している。実測値と計算値を比較した場合、計算値が大きいが、これは軸受の摩擦損、風損、うず電流損などのためと考えられる。

Fig. 5～7 に定常状態における電機子電流 i_a 、発生トルク τ_e 、回転数 N の波形を示す。Fig. 6 は、Fig. 5 に対し平滑リアクトル L_s の値を減少させたときの波形であり、電流の脈動が大きくなっている。それに伴いトルクの脈動幅も増加し、その結果速度変動が大きくなる。Fig. 7 は Fig. 5 に対し周期 T を増加した場合の波形である。電流の脈動が大きく、周期が長いので速度の脈動がかなり増大している。次に、電流波形の計算値と実測値を比較すると、平均値については大きな差は見られないが、その脈動幅は実測値の方が全体的にやや大きくなっている。これは、うず電流の影響と考えられる⁴⁾。



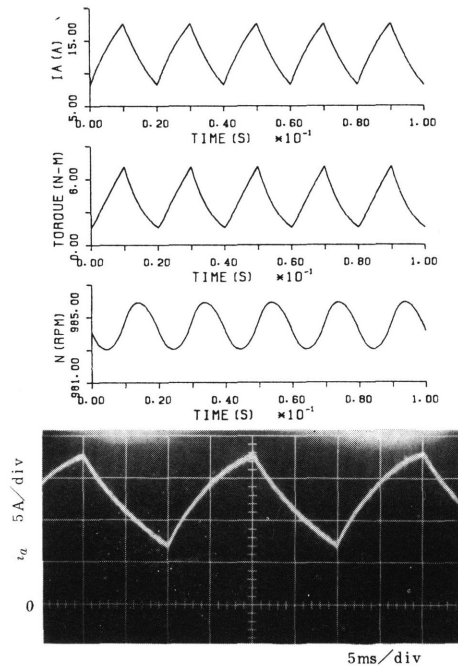
$E_d=100$ (V) , $T=0.01$ (s) , $\alpha=0.5$
 $L_s=11.5$ (mH) , $T_L=4.0$ (N-m)

Fig. 6 Steady state wave form.



$E_d=100$ (V) , $T=0.01$ (s) , $\alpha=0.5$
 $L_s=25.8$ (mH) , $T_L=4.0$ (N-m)

Fig. 5 Steady state wave form.



$E_d=100$ (V) , $T=0.02$ (s) , $\alpha=0.5$
 $L_s=25.8$ (mH) , $T_L=4.0$ (N-m)

Fig. 7 Steady state wave form.

5. 2 過渡特性

Fig. 8, 9 は Φ の固有値が負荷トルク T_L 及び通流率 α に対しどのように変化するかを示している。得られた固有値はすべて実数となった。これは、系に変動が起った場合無振動で電流、回転数が変化することを意味している。固有値の絶対値はすべて1より小さく、系は安定であることが判る。2つの固有値 λ_1 ,

λ_2 が存在するが、そのうち不安定領域に近い λ_1 が系の過渡応答を大きく左右し、固有値が1に近いほど系の速応性が悪くなる。Fig. 8より通流率 α が大きいほど、また、Fig. 9より負荷トルクが小さいほど速応性が悪化していることが判る。

以上のように、系の安定性は対象推移行列 Φ の固有値から判定できるが、平衡解に関して線形化された

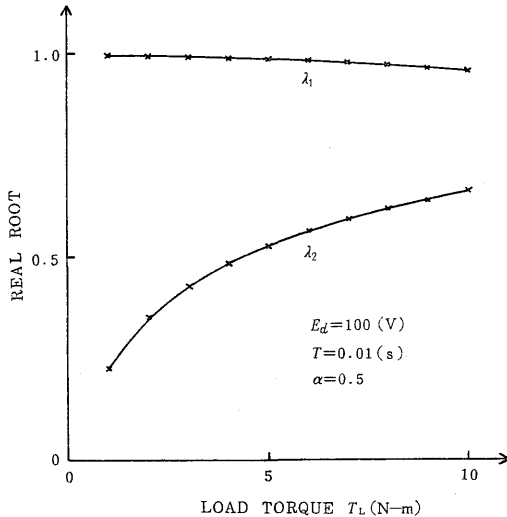


Fig. 8 Graph of load torque vs. real root.

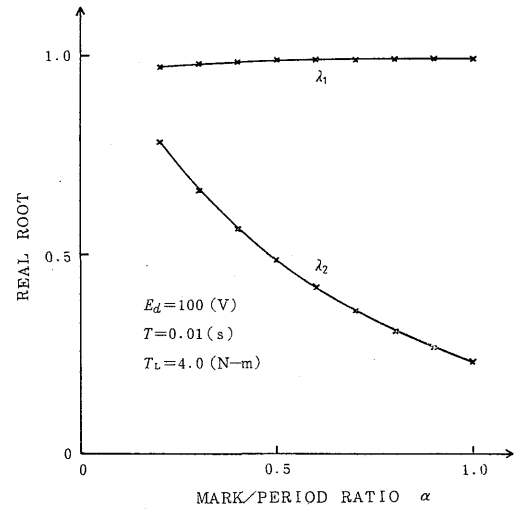


Fig. 9 Graph of duty vs. real root.

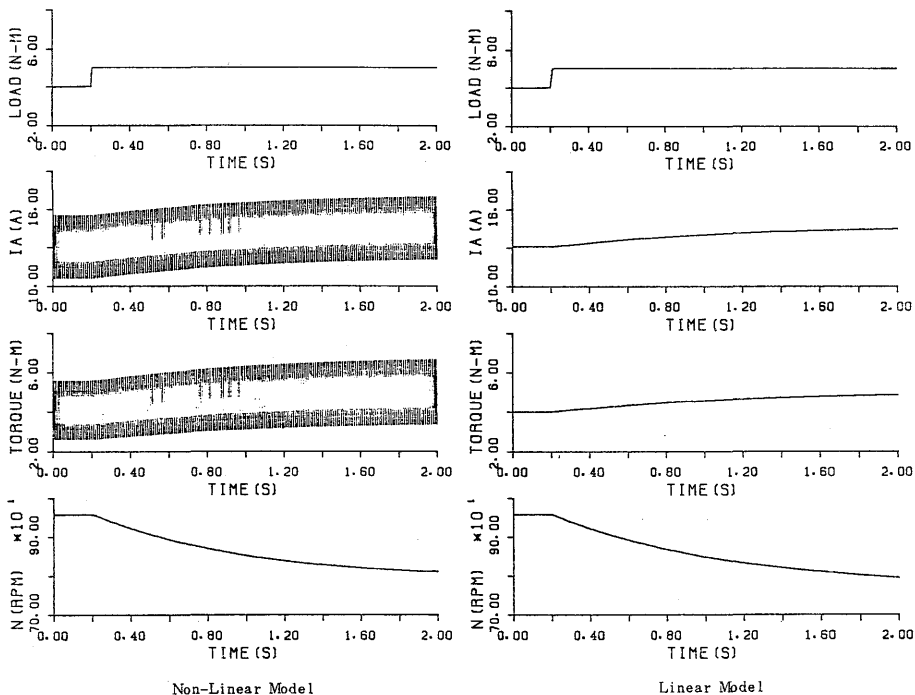


Fig. 10 Transient responses after step change of load torque from 4 N-m to 5 N-m at $\alpha=0.5$.

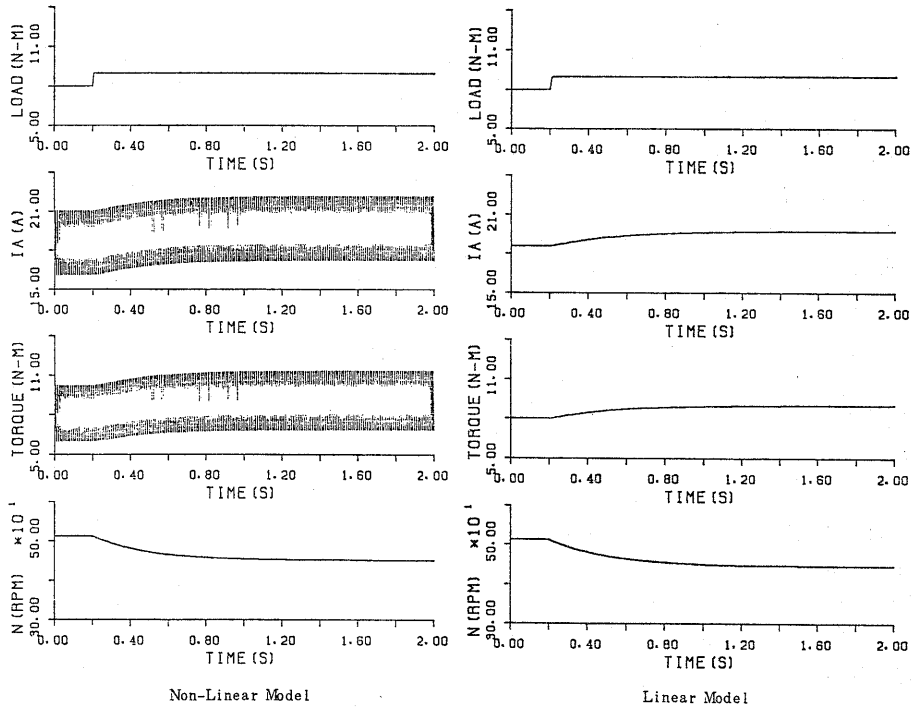


Fig. 11 Transient responses after step change of load torque from 8 (N-m) to 9 (N-m) at $\alpha=0.5$.

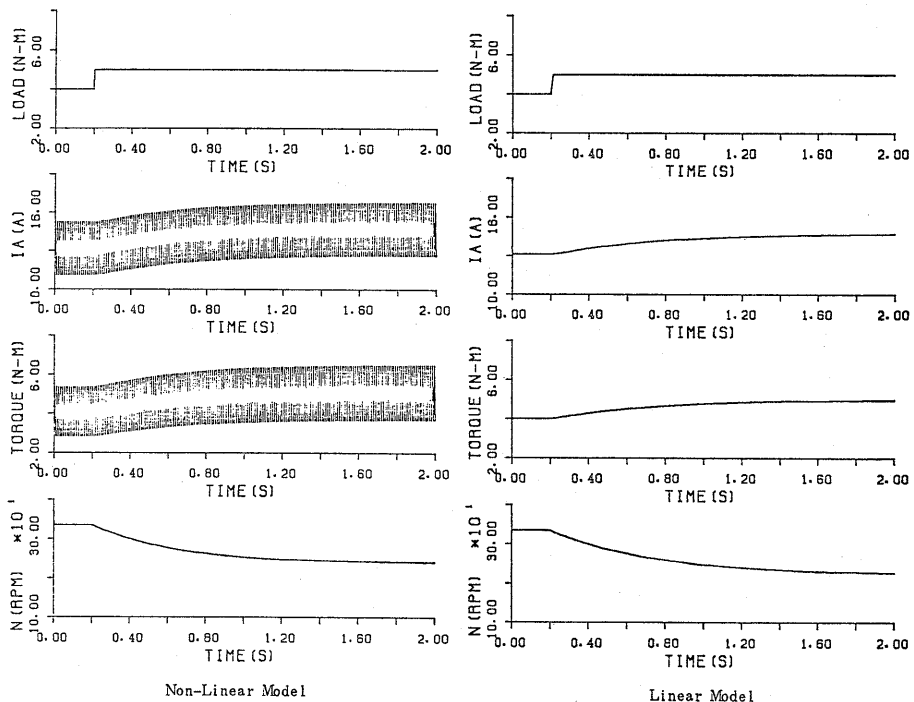


Fig. 12 Transient responses after step change of load torque from 4 (N-m) to 5 (N-m) at $\alpha=0.3$.

サンプル値モデルが、非線形系のふるまいをどの程度正確に記述するか検討するため、負荷トルクに対するステップ応答を求める。その結果を Fig. 10~12に示す。Fig. 10は、 $\alpha=0.5$ のとき負荷トルクを $4(N-m)$ から $5(N-m)$ に増加したときの応答であり、線形モデルは(19), (20)式より求めた。負荷トルク及び通流率を変えたときのステップ応答をそれぞれ Fig. 11, Fig. 12に示す。負荷トルクの増加、あるいは通流率の減少に伴い速応性が良くなることが判る。これは、Fig. 8, Fig. 9の固有値の傾向より予測できることである。線形モデルによる応答は、(7)式を直接数値積分した非線形モデルと良く一致し、これより線形モデルの妥当性が確認できる。

6. あとがき

非線形微分方程式で記述されるチョップパ駆動直流直巻電動機系の定常周期解を Newton 法を用いることにより、短時間で求めることができた。その結果と実測値との比較を行い満足のいく結果を得た。次に、定常周期解に関する線形サンプル値モデルを導出し系の安定性及び過渡特性を定量的に把握できるようになっ

た。その結果、通流率が大きい程、あるいは負荷トルクが小さい程速応性が悪化することが明らかとなった。

尚この研究は、文部省科学研究費（一般研究C、課題番号57550176）の補助を受けて行なわれたことを付記する。

参 考 文 献

- 1) G. K. Dubey and W. Shepherd; "Transient Analysis of Chopper-Fed DC Series Motor", IEEE Trans. Industr. Electronics. Control. Instrum., vol. IECI-28, 146 (1981)
- 2) T. J. Aprille and T. N. Trick; "Steady-State Analysis of Nonlinear Circuits with Periodic Inputs" Proc. IEEE, 60, 108 (1972)
- 3) 野中, 辻; 「トルク脈動を考慮した電流形インバータ駆動誘導電動機の定常および安定解析」, 電学論 B101, 129 (昭和56-3)
- 4) 藤巻, 大庭, 宮下; 「直流機の界磁および電機子回路の等価回路とそのパラメータ算定法」, 電学論 B98, 807 (昭和53-10)