

## 変厚矩形板の座屈の一解析法

松 田 浩\*・崎 山 毅\*

## Buckling Analysis of Rectangular Plates with Variable Thickness

by

Hiroshi MATSUDA\* and Takeshi SAKIYAMA\*

The basic differential equations of rectangular plate with variable thickness are formed by the simultaneous partial differential equations with variable coefficients which are composed of the flexural rigidity of the plate  $D(x, y)$  and the thickness of the plate  $h(x, y)$ . Therefore, it is impossible to obtain the analytical solutions under these generalities.

In this paper, we derived the discrete general solutions for the basic differential equations of rectangular plate with variable thickness by applying the transformation of the differential equations into the integral equations and trapezoidal rule of numerical integration. Then we proposed the approximate method to analyze the buckling problems of rectangular plate with arbitrary boundary condition, load condition and distribution of the thickness.

The results of numerical analysis are as follows.

- 1) The numerical solutions which obtained using the present method converge monotonously.
- 2) Even the analysis by division as coarse as 8 provide good accurate solutions.
- 3) Using extrapolation, better results can be obtained.

## 1. まえがき

本論文は、任意の境界条件および荷重条件をもつ変厚矩形板の座屈の一解析法について述べたものである。

変厚矩形板の基礎微分方程式は、任意の関数として与えられる板剛度および板厚を係数とする、いわゆる変数係数を持つ連立偏微分方程式となるため、その解析解を一般的に求めることは、ほとんど不可能であると考えられる。そのため変厚板の解法としていくつかの近似解法、数値解法が提案されてきている。

平板の曲げ剛性が  $y$  の二次式で与えられる形に対しては、R. G. Olsson<sup>1)</sup>の解がある。倉田<sup>2)</sup>は板厚が階段状に変化する場合の解析法として、まず各板厚につい

ての解を求め、次に接合部で連続するように条件を合わせる方法を提案し、種々の境界条件を有する階段状変厚板に一方向の一樣圧縮力が作用する場合について解析を行なった。

また Wittrick ら<sup>3)</sup>は変厚矩形板の固有値問題の近似解法として Galerkin 法に基づく解析法を提示した。そして一方向に断面の厚さが線形および指数形に漸変する変厚矩形板に、一方向の一樣圧縮力が作用する場合の座屈解析を4辺単純支持および2辺単純支持対2辺固定なる支持条件の下で行なっている。さらに、Paramasium ら<sup>4)</sup>は、Wittrick らが提案した古典的な解法は、剛性が2方向に急変するような矩形板に対して不

昭和59年10月1日受理

\*構造工学科 (Department of Structural Engineering)

適確であることを指摘し, discrete model を用い有限差分法を応用して, 2 方向に一樣な圧縮力が作用する場合について座屈解析を行ない, その解法の収束性および外挿法について検討している。

Chehill ら<sup>5)</sup>は4辺単純支持という限られた境界条件をもつ矩形板に対して古典的な摂動法による解析法を提示し, 一方向に線形に変化する変厚板および中央部で補強された平板に一方向の一樣圧縮力が作用する場合について解析を行なった。水澤ら<sup>6)</sup>はB-spline関数とRayleigh-Ritz法を応用して剛性が急変する矩形板の座屈解析法を提示し, その応用として2方向に剛性が急変する正方形板に2方向から一樣な圧縮力が作用する場合について解析を行なった。

著者ら<sup>7)</sup>は, 先に変厚矩形板の曲げの一解析法として基礎微分方程式の積分方程式への変換と積分方程式の近似解法の応用とによって得られる解析的近似解にもとづく解法を提示し, その実用性を検証するとともに, 任意の境界条件, 荷重条件および変断面性をもつ変厚板に対する解法の汎用性を明らかにした。

本論文は, 変厚矩形板の座屈問題を基礎微分方程式に基づいて直接的に解析できる解法の確立を目的とし, 先に提示した矩形板の曲げ解法の変厚板の座屈解析への応用性について検討したものである。

本解析法によれば, 任意の境界条件および荷重条件をもつ変厚矩形板の座屈問題を一般的に解析することができる。

## 2. 変厚板の座屈の基礎微分方程式

平板のせん断力を  $Q_y$ ,  $Q_x$ , ねじりモーメントを  $M_{xy}$ , 曲げモーメントを  $M_y$ ,  $M_x$ , たわみ角を  $\theta_y$ ,  $\theta_x$ , たわみを  $w$  とすれば, 変厚板を含む一般的な矩形板の座屈に関する基礎微分方程式は, Reisner の平板曲げ理論に基づいて, 次の連立偏微分方程式となる。但し面内力は一方向 ( $x$  方向) に作用するものとする。

$$\frac{\partial Q_y}{\partial y} + \frac{\partial Q_x}{\partial x} + N_x \frac{\partial \theta_x}{\partial x} = 0 \quad (1. a)$$

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial M_x}{\partial x} - Q_x = 0 \quad (1. b)$$

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} - Q_y = 0 \quad (1. c)$$

$$\frac{\partial \theta_y}{\partial y} + \nu \frac{\partial \theta_x}{\partial x} - \frac{M_y}{D} = 0 \quad (1. d)$$

$$\frac{\partial \theta_x}{\partial x} + \nu \frac{\partial \theta_y}{\partial y} - \frac{M_x}{D} = 0 \quad (1. e)$$

$$\frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} - \frac{2M_{xy}}{D(1-\nu)} = 0 \quad (1. f)$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} + \theta_x - \frac{Q_x}{Gt_s} = 0 \quad (1. g)$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} + \theta_y - \frac{Q_y}{Gt_s} = 0 \quad (1. h)$$

ここに,  $N_x = N_x(y)$ : 面内圧縮力,

$E$ : 弾性係数,  $G$ : せん断弾性係数,

$\nu$ : ポアソン比,  $D = Eh^3/12(1-\nu^2)$ :

板剛度,  $t_s = h/1.2$ ,  $h = h(x, y)$ : 板厚

ここで, 断面力  $Q_y$ ,  $Q_x$ ,  $M_{xy}$ ,  $M_y$ ,  $M_x$ , および変形  $\theta_y$ ,  $\theta_x$ ,  $w$  に関して, 次の無次元量  $X_1 \sim X_8$

$$\{X_1, X_2\} = \{Q_y, Q_x\} \frac{a^2}{D_0(1-\nu^2)}$$

$$\{X_3, X_4, X_5\} = \{M_{xy}, M_y, M_x\} \frac{a}{D_0(1-\nu^2)}$$

$$X_6 = \theta_y, X_7 = \theta_x, X_8 = w/a$$

を導入すれば, 式 (1. a) ~ (1. h) は次のように書き換えられる。

$$\frac{\partial X_1}{\partial \xi} + \mu \frac{\partial X_2}{\partial \eta} + \bar{N}_x \frac{\partial X_7}{\partial \eta} = 0 \quad (2. a)$$

$$\frac{\partial X_3}{\partial \xi} + \mu \frac{\partial X_5}{\partial \eta} - \mu X_2 = 0 \quad (2. b)$$

$$\mu \frac{\partial X_3}{\partial \eta} + \frac{\partial X_4}{\partial \xi} - \mu X_1 = 0 \quad (2. c)$$

$$\frac{\partial X_6}{\partial \xi} + \nu \mu \frac{\partial X_7}{\partial \eta} - IX_4 = 0 \quad (2. d)$$

$$\nu \frac{\partial X_6}{\partial \xi} + \mu \frac{\partial X_7}{\partial \eta} - IX_5 = 0 \quad (2. e)$$

$$\frac{\partial X_7}{\partial \xi} + \mu \frac{\partial X_8}{\partial \eta} - JX_3 = 0 \quad (2. f)$$

$$\frac{\partial X_8}{\partial \eta} + X_7 - \kappa X_2 = 0 \quad (2. g)$$

$$\frac{\partial X_8}{\partial \xi} + \mu X_6 - \mu \kappa X_1 = 0 \quad (2. h)$$

ここに,  $x = a\eta$ ,  $y = b\xi$

$a, b$ : 矩形板の縦・横の辺長,  $\mu = b/a$ ,

$\bar{N}_x = \mu l \frac{N_x}{N_0}$   $l = \frac{N_0 a^2}{D(1-\nu^2)}$ ,  $N_0$ : 基準面内力

$I = \mu(1-\nu^2) \left(\frac{h_0}{h}\right)^3$ ,  $J = 2\mu(1+\nu) \left(\frac{h_0}{h}\right)^3$

$h_0$ : 基準板厚

$\kappa = \frac{1}{10} \frac{E}{G} \left(\frac{h_0}{a}\right)^2 \frac{h_0}{h} = \frac{h_0^3(1+\nu)}{5a^2 h}$

$D_0 = \frac{E h_0^3}{12(1-\nu^2)}$ : 基準板剛度

式 (2. a) ~ (2. h) を用いて, 一樣面内圧縮力や三角分布力あるいは純曲げなどの任意の面内力を受ける, 任意の境界条件を有する変厚矩形板の座屈解析が行なわれる。

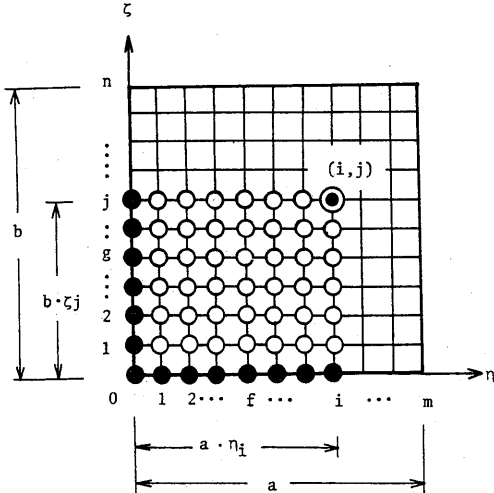


Fig. 1 Discrete points on rectangular plate

### 3. 基礎微分方程式の近似解

変厚矩形板の基礎微分方程式 (2. a)~(2. h) は、板剛度および板厚を変数係数とする連立偏微分方程式である。従って、その解析解を一般的に得ることはほとんど不可能であると考えられるので、ここでは Fig. 1 に示すような矩形板の縦横の等分割線の交点を対象として、これらの離散点における基礎微分方程式の近似解を求めることとする。

Fig. 1 に示すように、矩形板を横、縦方向にそれぞれ  $m$ ,  $n$  等分した等分割線の交点の集合体とみなす。ここで、任意の交点  $(i, j)$  に関連する矩形領域に注目し、これを領域  $[i, j]$  と表記することとする。また、●印を付けた交点  $(i, j)$  をこの領域  $[i, j]$  の主要点と称し、その他の交点  $(f, g)$ ,  $f=0, 1, \dots, i$ ,  $g=0, 1, \dots, j$ , を従属点と称することとする。さらに従属点に関しては、 $\zeta=0$  および  $\eta=0$  の境界線上にある●印を付けた交点  $(f, 0)$  および  $(0, g)$  を境界従属点と称し、その他の○印を付けた交点  $(f, g)$  を内部従属点と称して区別することとする。

はじめに、基礎微分方程式 (2. a)~(2. h) の各式を領域  $[i, j]$  において面積分し、積分方程式に変換する。次に、等間隔の数値積分法の応用により、領域  $[i, j]$  の主要点  $(i, j)$  および従属点  $(f, g)$  の諸量を用いて、これらの積分方程式を離散表示すれば、無次元化された断面力および変形  $X_p$ , ( $p=1\sim 8$ ) の主要点  $(i, j)$  における値  $X_{pij}$  に関する連立方程式が得られる。この連立方程式を解くことにより、領域  $[i, j]$  における主要点  $(i, j)$  の諸量  $X_{pij}$  と従属点

$(f, g)$  の諸量との間の関係式が求められ、次式となる。

$$X_{pij} = \sum_{t=1}^8 \left\{ \sum_{f=0}^i \beta_{if} A_{pt} [X_{tfo} - X_{tfg} (1 - \delta_{fi})] + \sum_{g=0}^j \beta_{jg} B_{pt} [X_{t0g} - X_{tfg} (1 - \delta_{gj})] + \sum_{f=0}^i \sum_{g=0}^j \beta_{if} \beta_{jg} C_{ptfg} X_{tfg} (1 - \delta_{fi} \delta_{gj}) \right\} \quad (3)$$

ここに、 $p=1, 2, \dots, 8$ ,  $i=1, 2, \dots, m$ ,  $j=1, 2, \dots, n$

$$\beta_{if} = a_{if}/m, \quad \beta_{jg} = a_{jg}/n$$

$$\delta_{ij} : \text{Kronecker's delta}$$

$$A_{pt}, B_{pt}, C_{ptfg} : \text{Appendix 参照}$$

係数  $\beta_{if}$ ,  $\beta_{jg}$  は数値積分法における重み係数である。本論文においては等分割数値積分法として台形公式を用いることとする。このとき、

$$a_{if} = \begin{cases} 0.5 & (f=0, i) \\ 1.0 & (f \neq 0, i) \end{cases}, \quad a_{jg} = \begin{cases} 0.5 & (g=0, j) \\ 1.0 & (g \neq 0, j) \end{cases}$$

なお、(3)式の誘導の詳細については文献(7)を参照されたい。

領域  $[i, j]$  を  $[1, 1]$ ,  $[1, 2]$ ,  $[2, 1]$ ,  $[2, 2]$ ……と順次拡大してゆけば、ある領域の主要点は、次の、より拡大された領域の内部従属点となる。従って、最小領域  $[1, 1]$  から始めて、順次、(3)式を用いて領域を拡大してゆくと、各領域の内部従属点の諸量はすべて消去され、結局、任意の領域  $[i, j]$  の主要点  $(i, j)$  における諸量  $X_{pij}$  は、この領域の境界従属点  $(f, 0)$ ,  $(0, g)$  における諸量  $X_{rfo}$ ,  $X_{s0g}$  ( $r=1, 3, 4, 6, 7, 8$ ), ( $s=2, 3, 5, 6, 7, 8$ ) のみによって表わされることになり、次式のように整理される。

$$X_{pij} = \sum_{d=1}^6 \left( \sum_{f=0}^i a_{1pijfd} X_{rfo} + \sum_{g=0}^j a_{2pijgd} X_{s0g} \right) \quad (4)$$

ここに、

$$a_{hpijua} = \sum_{k=1}^8 \left\{ \sum_{f=0}^i \beta_{ik} A_{pk} [a_{htk0ua} - a_{htkju}(1 - \delta_{ki})] + \sum_{g=0}^j \beta_{jl} B_{pk} [a_{ht0lud} - a_{htllud}(1 - \delta_{li})] + \sum_{k=0}^i \sum_{l=0}^j \beta_{ik} \beta_{jl} C_{pkkl} a_{htklud} (1 - \delta_{ki} \delta_{lj}) \right\}$$

$$p=1\sim 8, \quad i=1\sim m, \quad j=1\sim n, \quad f=0\sim i,$$

$$g=0\sim j, \quad d=1\sim 6, \quad h=1, 2$$

$$u=f(h=1 \text{ とき}) \text{ or } g(h=2 \text{ とき})$$

$$a_{1r00id}=1.0, \quad a_{2s00jd}=1.0$$

$$a_{110j01} = \frac{\kappa_{00}}{\kappa_{0j}} \bar{\alpha}_j, \quad a_{22i001} = \frac{\kappa_{00}}{\kappa_{i0}} \bar{\alpha}_i$$

$$a_{140j03} = \frac{\bar{D}_{00}}{\bar{D}_{0j}} \bar{\alpha}_j, \quad a_{25i003} = \frac{\bar{D}_{00}}{\bar{D}_{i0}} \bar{\alpha}_i$$

$$a_{12i0k5} = \frac{1}{\kappa_{i0}} \bar{\beta}_{ik}, \quad a_{210jl4} = \frac{1}{\kappa_{0j}} \bar{\beta}_{jl}$$

$$a_{15i0k3} = \nu \frac{\bar{D}_{00}}{\bar{D}_{i0}} \bar{\beta}_{ik}, \quad a_{240j13} = \nu \frac{\bar{D}_{00}}{\bar{D}_{0j}} \bar{\beta}_{jl}$$

$$a_{12i0k6} = \frac{1}{\kappa_{i0}} \bar{\gamma}_{ik}, \quad a_{210jl6} = \frac{1}{\mu \kappa_{0j}} \bar{\gamma}_{jl}$$

$$a_{15i0k5} = \frac{1}{\bar{D}_{i0}} \bar{\gamma}_{ik}, \quad a_{240j14} = \frac{1}{\mu \bar{D}_{0j}} \bar{\gamma}_{jl}$$

$$\bar{\alpha}_i = (-1)^i, \quad \bar{\beta}_{ik} = \delta_{ik} + (-1)^{i+1} \delta_{0k}$$

$$\bar{\gamma}_{ik} = \frac{4m(-1)^{i+k}}{1 + \delta_{ik} + \delta_{0k}}, \quad \bar{D}_{i0} = \frac{D_{00}}{D_{i0}}$$

$$\gamma = d + \delta_{2f} + \delta_{3f} + 2(\delta_{4f} + \delta_{5f} + \delta_{6f})$$

$$s = d + \delta_{1f} + \delta_{2f} + 2(\delta_{3f} + \delta_{4f} + \delta_{5f} + \delta_{6f})$$

(4)式は、変厚矩形板の縦横の等分割線の交点における基礎微分方程式 (2. a)~(2. h) の離散表示された近似解である。この解式中に含まれる境界従属点の6個ずつの諸量  $X_{rfo}$ ,  $X_{sog}$  はいわゆる積分定数であり、対辺の境界条件によって決定されるべきものである。また、任意の領域  $[i, j]$  の主要点  $(i, j)$  における諸量  $X_{pij}$  を、この領域の境界従属点  $(f, 0)$ ,  $(0, g)$  における諸量  $X_{rfo}$ ,  $X_{sog}$  に関係づける要素  $a_{hpij}$  は、伝達ストリックス法におけるいわゆる伝達マトリックスに相当するものである。

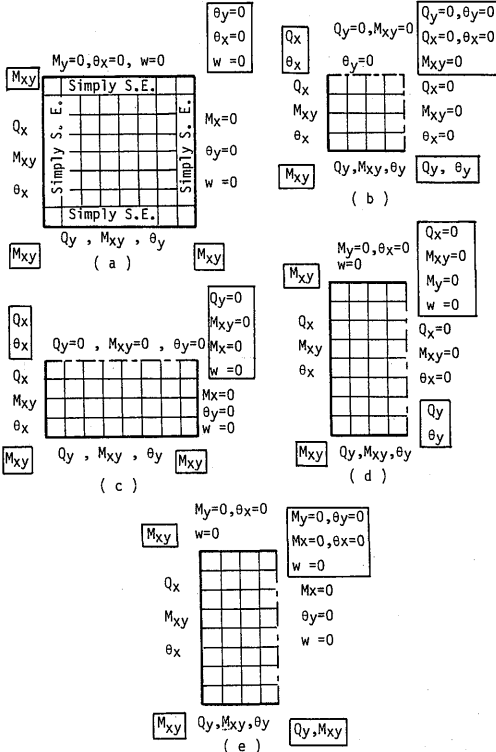


Fig. 2 Integral constants and boundary conditions of plate with four simply supported edges.

#### 4. 積分定数と境界条件

基礎微分方程式 (2. a)~(2. h) の近似解式(4)に含まれる積分定数  $X_{rfo}$  および  $X_{sog}$  は、具体的には、それぞれ、平板の  $\xi=0$  および  $\eta=0$  なる辺上の等分割点  $(f, 0)$  および  $(0, g)$  における断面力および変形を表す。各分割点において6個ずつの積分定数が存在するが、平板の境界辺の支持条件に応じて、これらの中のいずれか3個の積分定数は既知となる。残りの3個の積分定数の値は対辺の境界条件によって決定される。

Fig. 2 ~ Fig. 6 に5種の異なる境界条件をもつ平板

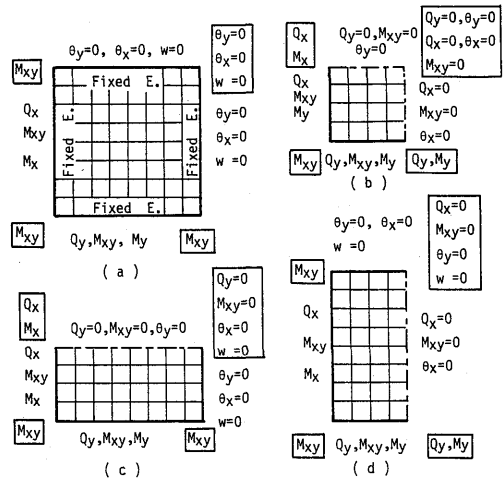


Fig. 3 Integral constants and boundary conditions of plate with four fixed edges.

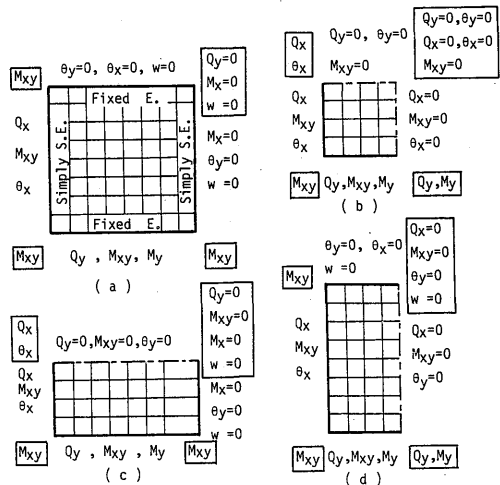


Fig. 4 Integral constants and boundary conditions of plate with two opposite edges simply supported and the other two fixed.

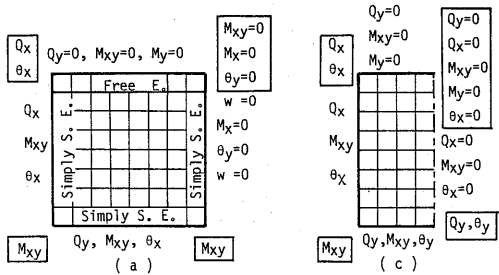


Fig. 5 Integral constants and boundary conditions of plate with three edges simply supported and one edge free.

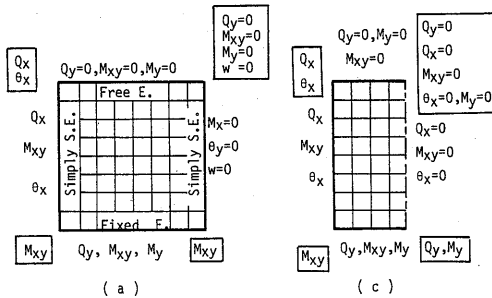


Fig. 6 Integral constants and boundary conditions of plate with two opposite edges simply supported and the other two edges fixed and free.

の積分定数と境界条件を示す。これらの各図において、(a)図は平板全体を対象とした場合である。(d)図および(c)図は、それぞれ、左右または上下の1軸対称性をもつ平板の1/2部分を対象とした場合である。また(b)図は左右および上下の2軸対称性をもつ平板の1/4部分を対象とした場合である。さらに、Fig. 2の(e)図は、左右一軸逆対称性をもつ平板の1/2部分を対象とした場合である。各図において、隅角部の分割点の積分定数および境界条件は□で囲まれている。なお、その他のいくつかの境界条件に関しては文献(7)を参照されたい。

## 5. 座屈条件式および座屈モード

近似解式(4)と対辺の境界条件、すなわち  $X_{pi\bar{n}} = 0$  および  $X_{p\bar{m}} = 0$  とから、境界辺 ( $\eta=0, \xi=0$ ) 上の未知量  $X_{rfo}$  および  $X_{so\bar{g}}$  に関する連立方程式が次式のように得られる。

$$\begin{pmatrix} X_{pi\bar{n}} \\ X_{p\bar{m}} \end{pmatrix} = \sum_{d=1}^6 \begin{pmatrix} \sum_{f=0}^l a_{1pi\bar{n}fd} \sum_{g=0}^l a_{2pi\bar{n}gd} \\ \sum_{f=0}^l a_{1p\bar{m}fd} \sum_{g=0}^l a_{2p\bar{m}gd} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_{rfo} \\ X_{so\bar{g}} \end{pmatrix} \quad (5)$$

さらに、簡単に表わすと次式ようになる。

$$[D][x] = 0 \quad (6)$$

ここに、 $[x] = [x_{rfo}, x_{so\bar{g}}]^T = [x_1 x_2 x_3 \dots]^T$

$$[D] = \sum_{d=1}^6 \begin{pmatrix} \sum_{f=0}^l a_{1pi\bar{n}fd} \sum_{g=0}^l a_{2pi\bar{n}gd} \\ \sum_{f=0}^l a_{1p\bar{m}fd} \sum_{g=0}^l a_{2p\bar{m}gd} \end{pmatrix}$$

(6)式において、 $|D| = 0$  が座屈条件式である。本論文では Trial-and-error method によって、その座屈固有値  $k$  を求めた。

また、座屈モードは、次式で表わすことができる。

$$X_{sij} = \sum_{d=1}^6 \left( \sum_{f=0}^l a_{1sijfd} X_{rfo} + \sum_{g=0}^l a_{2sijgd} X_{so\bar{g}} \right) \quad (7)$$

ここに、 $X_{rfo}$  および  $X_{so\bar{g}}$  は、(6)式において、 $x_1 = c$  (任意定数) として求めた。

## 6. 数値計算結果および考察

本解析法による数値解の収束性および精度を検証するために、解析解が知られているいくつかの例について数値計算を行なった。なお、本論文で用いた基礎式 (1. a) ~ (1. h) は、せん断変形の影響を考慮した Reisner の平板曲げ理論に基づくものである。一方、解析例としてとりあげた Timoshenko の解析解は、Kirchhoff の薄板理論に基づいている。従って、両者の比較のため、本論文における数値計算では、せん断変形の影響を十分無視できる薄板を取り扱うこととし、板厚  $h$  と辺長  $a$  の比を  $h/a = 0.01$  とする。

### (1) 等厚板

Table 1 ~ Table 5 に、一方向に様な圧縮力が作用する平板の座屈解析結果を Timoshenko の解析解とともに示す。各表において、境界条件は、各々、(1)4辺単純支持、(2)4辺固定、(3)対辺単純支持他対辺固定、(4)3辺単純支持他1辺自由、(5)対辺単純支持他2辺自由・固定である。また、三角分布面内圧縮力および純曲げを受ける4辺単純支持板についての数値解析結果

Table 1 Values of factor  $k$  for a square plate with four simply supported edges under uniform compression in one direction. ( $\nu=0.3$ )

m	k	Extrapolated Values		T.A.S.
4	4.450	4,6	3.985	4.00
6	4.190	4,8	3.990	
8	4.105	6,8	3.996	
10	4.067	6,10	3.997	
12	4.046	10,12	3.999	

T.A.S. : Timoshenko's Analytical Solution

Table 2 Values of factor  $k$  for a square plate fixed at all edges under uniform compression in one direction. ( $\nu=0.25$ )

m	k	Extrapolated Values		T.A.S.
4	15.56	4,6	9.206	10.07
6	12.03	4,8	9.613	
8	11.10	6,8	9.903	
10	10.71	6,10	9.967	
12	10.51	8,12	10.03	
14	10.39	12,14	10.06	

T.A.S. : Timoshenko's Analytical Solution

Table 3 Values of factor  $k$  for a rectangular plate ( $a/b=0.6$ ) with two opposite edges simply supported and the other two edges fixed under uniform compression in one direction. ( $\nu=0.25$ )

m	k	Extrapolated Values		T.A.S.
4	8.396	4,6	6.947	7.05
6	7.591	4,8	6.993	
8	7.344	6,8	7.026	
10	7.235	6,10	7.035	
12	7.178	10,12	7.049	

T.A.S. : Timoshenko's Analytical Solution

Table 4 Values of factor  $k$  for a square plate with three edges simply supported and one edge free under uniform compression in one direction. ( $\nu=0.25$ )

m	k	Extrapolated Values		T.A.S.
4	1.554	4,6	1.430	1.440
6	1.485	4,8	1.431	
8	1.462	6,8	1.432	

T.A.S. : Timoshenko's Analytical Solution

Table 5 Values of factor  $k$  for a square plate with two opposite edges simply supported and the other two edges fixed and free under uniform compression in one direction. ( $\nu=0.25$ )

m	k	Extrapolated Values		T.A.S.
4	1.814	4,6	1.692	1.70
6	1.746	4,8	1.694	
8	1.724	6,8	1.696	

T.A.S. : Timoshenko's Analytical Solution

を Table 6 ~ Table 8 に示す。なお、表中に示す補外値は、Richardson の補外公式によって求めた値である。また、各表における  $k$  の値は、次式の数値因子である。

$$\sigma_{cr} = k \frac{\pi^2 D}{b^2 h}$$

Table 6 Values of factor  $k$  for a simply supported rectangular plate ( $a/b=0.6$ ) under triangular loading. ( $\nu=0.3$ )

m	k	Extrapolated Values		T.A.S.
4	11.11	4,6	9.691	9.7
6	10.32	4,8	9.714	
8	10.06	6,8	9.731	

T.A.S. : Timoshenko's Analytical Solution

Table 7 Values of factor  $k$  for a simply supported rectangular plate ( $a/b=0.6$ ) under pure bending. ( $\nu=0.3$ )

m	k	Extrapolated Values		T.A.S.
4	36.64	4,6	22.17	24.1
6	28.60	4,8	23.09	
8	26.48	6,8	23.75	

T.A.S. : Timoshenko's Analytical Solution

Table 8 Values of factor  $k$  for a square plate with four simply supported edges under pure bending. ( $\nu=0.3$ )

m	k	Extrapolated Values		T.A.S.
4	42.36	4,6	20.09	25.6
6	29.99	4,8	23.89	
8	28.51	6,8	26.61	

T.A.S. : Timoshenko's Analytical Solution

ここに、 $b : y$  方向の平板の幅

いずれの解析においても、本解析法に基づく座屈の数値解は、分割数  $m$  の増加とともに一様に収束することが示されている。また、座屈荷重が大きくなると、Timoshenko の解析解に対する本法の解析値の比が若干大きくなる傾向があるが、8 ~ 12 分割程度の比較的粗い分割のもとでも、十分実用性のある解が得られていることがわかる。さらに、Richardson の補外公式による推定値は、Timoshenko の解析解に極めて近づくことが示されている。

## (2) 変厚板

本解析法による変厚板の数値解の精度を明らかにするために、まず、Fig. 7 に示すような一方向にのみ板厚が直線的に変化する変厚板に関して、座屈の解析を行なった。この変厚板に関しては、Chehill・Dua<sup>5)</sup> および Wittrick・Ellen<sup>3)</sup> によって、4 辺単純支持の場合について解が求められている。これらの結果を Table 9 に示す。同表において、Chehill らの解で  $n=3, 5$  とは、各々、ベキ級数項を 3, 5 項までとった場合である。同表より本解析法による数値解は、8 分割程度

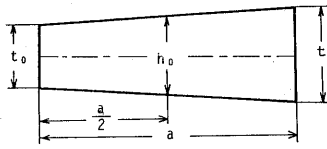


Fig. 7 Plate with linear variation in thickness.

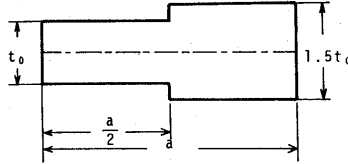


Fig. 8 Composite rectangular plate.

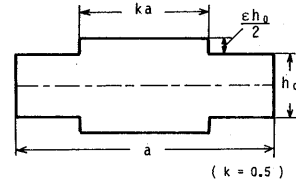


Fig. 9 Stiffened plate.

Table 9 Values of factor  $k$  for a simply supported square plate with a linear variation in thickness. ( $\nu=1/3$ )

$t_1/t_0$	1.125	1.5	2.0
Chehill (5)	3.966	3.687	3.537
(3)	3.966	3.604	2.900
Wittrick	3.966	3.638	3.100
$m=4$	4.429(1.12)	4.216(1.16)	3.863(1.25)
Author 6	4.163(1.05)	3.884(1.07)	3.442(1.10)
8	4.076(1.03)	3.774(1.04)	3.277(1.06)
Extra- (4,6)	3.951(1.00)	3.618(0.99)	3.069(0.99)
polated (4,8)	3.958(1.00)	3.627(1.00)	3.082(0.99)
Values (6,8)	3.963(1.00)	3.634(1.00)	3.091(1.00)

Chehill (5) :  $N = N_0 + eN_1 + e^2N_2 + e^3N_3 + e^4N_4$ (3) :  $N = N_0 + eN_1 + e^2N_2$ 

の粗い分割において、Chehill らや Wittrick らの数値解に比較的一致していることがわかる。また、Richardson の外挿法を用いた推定収束値は、さらに、良好に一致することがわかる。なお、表中の ( ) の中の数値は、Wittrick らの数値解に対する本解析法による近似解の比である。

断面が急変する場合、粗い分割では精度が悪くなることが考えられる。この点を検討するために、一方向にのみ階段状に板厚が急変する変厚板に関して座屈解析を行なった。このような変厚板に関しては、倉田<sup>2)</sup>によって、Fig. 8 に示すような変厚板のいくつかの境界条件について、解が求められている。ここでは、4 辺単純支持板に一方向の一樣圧縮力が作用する場合の本解析法による解析結果を、倉田の解とともに、Table 10 (a), (b) に示す。Table 10 (a) および 10 (b) は、各々、1 次および 2 次の座屈モードの場合である。同表で、( ) 内の記入の数値は、倉田の数値解に対する本解析法による近似解の比である。これらの諸量は、一樣圧縮力が作用する 4 辺単純支持なる等厚板の場合の、Timoshenko の解析解に対する比よりも大きくなっている。しかしながら、Richardson の補外公式を用いた結果は、倉田の解に十分一致していると考えられる。

また、Chehill らによって、Fig. 9 に示すように、

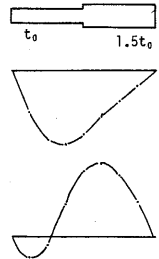
Table 10 Values of factor  $k$  for a simply supported square plate with a stepped variation in thickness under uniform compression in one direction. ( $\nu=0.3$ )

a) First Mode

m	Author	Extrapolated Values
4	7.4289 (1.23)	4,6 5.9344 (0.98)
6	6.5986 (1.09)	4,8 5.9724 (0.99)
8	6.3365 (1.05)	6,8 5.9995 (0.99)
Kurata	6.0456	

b) Second Mode

m	Author	Extrapolated Values
4	17.84 (1.57)	4,6 11.99 (1.06)
6	14.59 (1.28)	4,8 11.88 (1.05)
8	13.37 (1.12)	6,8 11.80 (1.04)
Kurata	11.36	

Table 11 Values of factor  $k$  for a simply supported square plate with centrally stiffened portion. ( $\nu=1/3$ )

$\epsilon$	0.5	1.0
$m = 4$	9.577(1.16)	17.684(1.29)
8	8.283(1.00)	15.568(1.14)
Extrapolation	7.852(0.95)	14.862(1.08)
Chehill	8.243	13.697

中央部で板厚が厚くなっている変厚板に対して、4 辺単純支持なる境界条件のもとで、数値解が求められている。それらを、本解析法による近似解とともに Table 11 に示す。同表で ( ) 内の記入の数値は Chehill の数値解に対する本解析法による近似解の比である。同表より、 $\epsilon$  の値が大きくなると、すなわち、変厚板の急変部が大きくなると、Chehill の数値解に対する比が大きくなっていることがわかる。

以上、一方向から一樣な圧縮力が作用する場合の、 $x$  方向に板厚が変化する種々の変厚板に関して、座屈

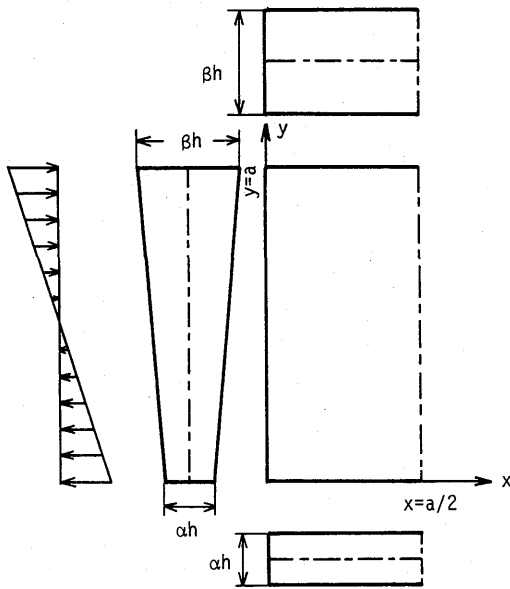


Fig. 10 Rectangular plate with variable thickness in  $y$  direction.

Table 12 Values of factor  $k$  for a simply supported square plate with a linear variation in thickness in  $y$  direction under uniform compression in  $x$  direction. ( $\nu=0.3$ )

	$\alpha = 0.9$ $\beta = 1.1$	$\alpha = 0.8$ $\beta = 1.2$	$\alpha = 1.0$ $\beta = 1.0$
$m = 4$	4.434	4.386	4.450
6	4.170	4.109	4.190
8	4.084	4.018	4.105
Extrapolation (6,8)	3.972	3.902	3.996

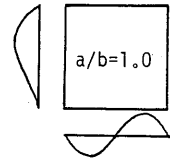
Table 13

Values of factor  $k$  for a simply supported rectangular plate ( $a/b=0.6$ ) with a linear variation in thickness in  $y$  direction under pure bending. ( $\nu=0.3$ )

	$\alpha = 0.9$ $\beta = 1.1$	$\alpha = 0.8$ $\beta = 1.2$	$\alpha = 1.0$ $\beta = 1.0$
$m = 4$	41.06	44.50	36.64
6	32.55	36.79	28.60
8	30.27	34.36	26.48
Extrapolation (6,8)	27.35	31.23	23.75

Table 14

Values of factor  $k$  for a simply supported square plate with a linear variation in thickness in  $y$  direction under pure bending. ( $\nu=0.3$ )



	$\alpha = 0.9$ $\beta = 1.1$	$\alpha = 0.8$ $\beta = 1.2$	$\alpha = 1.0$ $\beta = 1.0$
$m = 4$	43.03	45.31	42.36
6	35.83	40.17	29.99
8	32.80	37.43	28.51
Extrapolation (6,8)	28.90	33.91	26.61

解析を行ない、既往の数値解と比較した。

さらに、Fig. 10 に示すように、板厚が  $y$  方向にのみ直線的に変化する変厚板に対し、一様圧縮力および純曲げが作用する場合の座屈解析を行なった。それらの結果を、Table 12～Table 14 に示す。Table 12 より、 $x$  方向に板厚が変化する場合 (Fig. 7) よりも大きくないが、変厚性状が大きくなる程、座屈の数値解は小さくなっていることがわかる。また、Table 13 および Table 14 は、各々、純曲げが作用する場合の  $\mu = 0.6$  および  $\mu = 1.0$  に対する座屈解析結果である。これらの表より、純曲げが作用する場合は、一様圧縮力が作用する場合とは逆に、変厚性状が大きくなる程、座屈数値因子  $k$  の値は大きくなっていることがわかる。

## 7. 結 語

変厚矩形板の座屈の一解析法として、基礎微分方程式の積分方程式への変換と積分方程式の近似解法の応用により、基礎微分方程式の解析的近似解を求め、これに基づく一般的な解法を提示した。数値解析の結果から、本解析法による数値解は分割数  $m$  の増大とともに一様に収束すること、また、比較的粗い分割による解析においても実用上十分の精度をもつ解が得られること、そして、Richardson の外挿法を用いることにより、さらに精度の良い収束値を推定することができることなどが確認された。

本解析法によれば、任意の境界条件および荷重条件をもつ変厚矩形板を、容易に、しかも、一般的に解析することができる。すなわち、矩形板の縦横の等分割線の交点における荷重の分布状態や板厚、板剛度の値



が与えられれば、等厚板の場合と同様に変厚矩形板を解析することができる。

最後に本研究を行なうにあたり、本学築地恒夫教授にいろいろ助言いただいた。記して謝意を表します。

#### [Appendix]

$$\begin{aligned}
 A_{p1} &= r_{p1} & B_{p1} &= 0 \\
 A_{p2} &= 0 & B_{p2} &= \mu r_{p1} \\
 A_{p3} &= r_{p2} & B_{p3} &= \mu r_{p3} \\
 A_{p4} &= r_{p3} & B_{p4} &= 0 \\
 A_{p5} &= 0 & B_{p5} &= \mu r_{p2} \\
 A_{p6} &= r_{p4} + \nu r_{p5} & B_{p6} &= \mu r_{p6} \\
 A_{p7} &= r_{p6} & B_{p7} &= \nu \mu r_{p4} + \mu r_{p5} \\
 A_{p8} &= r_{p7} & & + \bar{N}_x r_{p1} \\
 & & B_{p8} &= r_{p8} \\
 C_{p1fg} &= \mu(r_{p3} + \kappa_{fg} r_{p7}) & C_{p5fg} &= I_{fg} r_{p5} \\
 C_{p2fg} &= \mu r_{p2} + \kappa_{fg} r_{p6} & C_{p6fg} &= -\mu r_{p7} \\
 C_{p3fg} &= J_{fg} r_{p6} & C_{p7fg} &= -r_{p8} \\
 C_{p4fg} &= I_{fg} r_{p4} & C_{p8fg} &= 0 \\
 [\bar{r}_{pt}] &= [r_{pt}]^{-1}, \quad \beta_{ii} \beta_{jj} = \beta_{ji} \\
 [\bar{r}_{pt}] &= \begin{bmatrix} \beta_{ii} & \mu\beta_{ij} & 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{N}_x\beta_{ij} & 0 \\ 0 & -\mu\beta_{ij} & \beta_{ii} & 0 & \mu\beta_{ij} & 0 & 0 & 0 \\ -\mu\beta_{ij} & 0 & \mu\beta_{ij} & \beta_{ii} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -I_{ij}\beta_{ij} & 0 & \beta_{ii} & \nu\mu\beta_{ij} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -I_{ij}\beta_{ij} & \nu\beta_{ii} & \mu\beta_{ij} & 0 \\ 0 & 0 & -J_{ij}\beta_{ij} & 0 & 0 & \mu\beta_{ij} & \beta_{ii} & 0 \\ -\mu\beta_{ij}\kappa_{ij} & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu\beta_{ij} & 0 & \beta_{ii} \\ 0 & -\kappa_{ij}\beta_{ij} & 0 & 0 & 0 & 0 & \beta_{ij} & \beta_{ij} \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

#### 参考文献

- 1) R. G. Olsson; Beitrag zur Knickung der Rechnen von quadratisch veränderlicher Steifigkeit, Ing. Archiv, Vol. 10, pp175~181 (1939)
- 2) M. Kurata; A Study on the Problem of Buckling of the Composite Rectangular Plates, Memo. Fac. Eng'g, Hokkaido Univ., Vol. 8, pp151~336(1950)
- 3) W. H. Wittrick and C. H. Ellen; Buckling of Tapered Rectangular Plates in Compression, Aero. Quart., Vol. 13, No. 4, pp.308~326 (1962)
- 4) P. Paramasivam and J. K. S. Rao; Buckling of Plates of Abruptly Varying Stiffness, Proc. ASCE, ST6, Vol. 95, pp1313~1337 (1969)
- 5) D. S. Chehill and S. S. Dua; Buckling of Rectangular Plates with General Variation in Thickness, J. Appl. Mech. 40, pp745~751 (1973)
- 6) T. Mizusawa, T. Kajita and M. Naruoka; Vibration and Buckling Analysis of Plates of Abruptly Varying Stiffness, Compt. Structures 12 (5) pp. 689~693 (1980)
- 7) 崎山毅, 松田浩; 変厚矩形板の曲げの一解析法, 土木学会論文報告集, 第338号, pp21~28, (1983)
- 8) S. P. Timoshenko and J. M. Gere; Theory of Elastic Stability, McGRAW-HILL, Newyork, 1961
- 9) C. R. C. Japan; Handbook of Structural Stability, Corona Publishing Co. LTD. (1971)
- 10) 長柱研究委員会編; 弾性安定要覧, コロナ社.
- 11) 見澤繁光, 重光恒美, 大賀水田生, 原隆; 補剛材を有する shear-elastic plate の座屈解析, 土木学会論文報告集, 第298号, pp1~8, (1980)
- 12) K. K. Kapur and B. J. Hartz; Stability of Plates using the Finite Element Method, J. Engng Mech. Div. ASCE 92 (EM2) pp177~195(1966)
- 13) 栖原二郎; 平板の曲げ理論, 培風館 (1972)
- 14) 川井忠彦; 座屈問題解析, 培風館 (1974)
- 15) 福本誘士; 構造物の座屈・安定解析, 新体系土木工学, 9巻, 技報堂出版 (1982)

