斜め防撓材をもつ平板の曲げ解析

福地信義*・三笘建樹**

Bending Analysis of Plates with Oblique Stiffeners

by

Nobuyoshi FUKUCHI

(Department of Structural Engineering)

Tateki MITOMA

(Kurushima Dockyard Co., Ltd)

The most of ship structures are composed of stiffened plates. However analytical method of plates structure with obliqe stiffeners and non-rectangular plates subjected to bending load are not enough to be completed in practical sense.

This paper presents an analytical method on strength of non-rectangular plates and plates with oblique stiffeners by improved finite strip method proposed by authors to lighten the volume of calculation and to obtain accurate solution. Displacement functions of strip elements are employed the approximate functions obtained by Kantorovich's method. Those give exact solutions of the equilibrium equation of plate bending in simply supported condition and very close ones to them for other cases. And this dealing is effective to make decrease of discretization errors.

The problems on geometric extension contained in non-rectangular plates and oblique stiffeners are settled by using the method of linear transformations of variables and by applying Fourier's approximation. This procedure is able to integrate analytically at the calculation of stiffness matrix and load matrix and on the contrary it is necessary to integrate numerically in the case of using of the shape functions in establishment of coordinates transformations.

To investigate accuracy and convergence of solution, we analize a square plate subjected to bending load by using non-rectangular elements and this results prove that comparatively accurate solution is able to be obtained by this method in spite of a few degree of freedom. The effectiveness of the shape of element is demonstrated to analize a bending plate in rhomboidal shape and plate structure with oblique stiffeners. The effects of oblique stiffeners for plate according to varying slant angle are clarified.

1. はじめに

防撓平板構造は船体構造や他の構造物に多くみられる主要構造部材である．防撓材が矩形板の辺に平行に配置された構造の強度解析は多く見受けられるが，板の辺に斜めに防撓材が取付けられる場合や，平板の形状が非矩形の場合の解析は，有限要素等による構造物全体の解析を行う場合を除いて，局部強度としての解析は，設計に充分生かせる段階まで到っていない．

ここでは，有限要素法のもつ有利点，複雑な外力条件の処理性や境界条件の一般性，を保有し，しかも自由度が少なくて済む有限帯板法[1]を用いて斜め防撓材をもつ平板の曲げ解析を行う．

有限帯板法の問題点として解の精度と適用形状に対する制約がある．ここでは，板の曲げに関する基礎方程式に Kantorovich の方法[2]を適用して求めた近

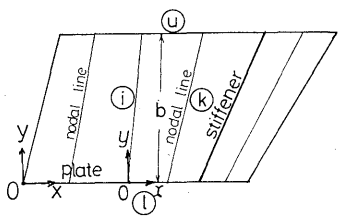
*構造工学科
**来島どっく（株）愛媛県越智郡大西町

似関数を帯板要素の変位関数として用い[3)4)]，解の離散化誤差の減少を計った．形状の制約の問題については大坪等[5)]が非矩形要素を座標変換を行って矩形要素に移し，この矩形要素において形状関数を定義する方法を用いて解決している．しかしこの方法ではひずみおよび曲率変化の計算において Jacobian matrix の計算が必要となり，このため剛性行列，荷重ベクトルの面積分は解析的には不可能となり，数値積分に頼らざるを得ず，不要な計算誤差を生じる．本論文では節線変位係数と形状関数を関係づける際，フーリエ近似を用いて形状関数を非矩形要素の上で定義を行い，面積分を解析的に行えるようにした[4)]．

非矩形要素による帯板法の解の精度を調べるために，非矩形要素の組合せによる正方形板の曲げ解析を分割数，モード数，非矩形度を変えて計算を行い，少ない自由度で実用上充分な精度の解が得られることを検証した．非矩形板の解析の例として菱形状の平板の曲げ解析を行った．また板の辺に対し斜めに防撓材のつく場合について解き，斜め防撓材の平板構造に対する効きについて調べた．

2．解　析　法

解析法として有限帯板法を用いる．Fig．1 に示すように直交座標系をとり，平板を帯板要素に分割し，その局所座標を (x, y) とする．防撓材のある場合は原則としてその位置に節線がくるように要素分割を行う．



Fig．1　Local and Global Coordinates of Plate Structure

2．1　帯板要素の変位関数

面外荷重 p が作用する場合の等方性板の面外変位 w に関する平衡方程式は次のように表わされる．

$$D\Delta\Delta w = p(x,y) \qquad (1)$$

ここに $D=\dfrac{Et^3}{12(1-\nu^2)}$，$E$：ヤング率，

ν：ポアソン比，t：板厚

変位を $w=f_n(x)\cdot\varphi_n(y)$ と表わし，y 方向の関数 $\varphi_n(y)$ として梁の座屈モードを用いる．ここに $n(n=1, 2, 3, \cdots)$ はモード数を意味し，φ_n は (u)，(l) 辺の支持状態により異る．例えば，y 方向に対称構造の場合，

$$\left.\begin{aligned}&\text{(a) 単純支持の場合：}\varphi_n(y)=\sin\frac{n\pi}{b}y\\&\text{(b) 固定の場合：}\varphi_n(y)=1-\cos\frac{2n\pi}{b}y\end{aligned}\right\}(2)$$

(2)を(1)の斉次式に代入し，Kantorovich の方法を適用すると $f_n(x)$ に関する4次の常微分方程式を得る．

$$\beta_{(0)}f_n^{(4)}+2\beta_{(2)}f_n^{(2)}+\beta_{(4)}f_n=0 \qquad (3)$$

ここに $\beta_{(i)}=\int_0^b \varphi_n^{(i)}\ \varphi_n\ dy$

(3)の一般解は次のように表わされる．

$$\begin{aligned}f_n(x)=&A_{1n}\cosh K_nx\ \cos\mu_nx+A_{2n}\sinh K_nx\\&\cos\mu_nx+A_{3n}\cosh K_nx\sin\mu_nx+A_{4n}\sinh\\&K_nx\sin\mu_nx\end{aligned} \qquad (4)$$

ここに A_{1n}，A_{2n}，… は (i)，(k) 辺の境界条件より決まる積分定数

固定の場合は $K_n=2.120(n/b)$，$\mu_n=1.097(n/b)$ となる．単純支持の場合は $K_n=n\pi/b$，$\mu_n\to0$ の特殊な場合であり，この場合には(4)は(1)の厳密解である．帯板要素の変位関数としては，波数Nまで取り次の形の関数を用いる．

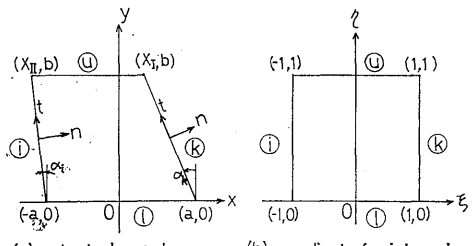
$$w=\sum_{n=1}^{N} f_n(x)\cdot\varphi_n(y) \qquad (5)$$

2．2　非矩形要素

(1) 変位関数と節線変位

任意形状の帯板要素の取扱いも可能であるが，ここでは簡単のため，Fig．2 (a) に示すような台形状の帯板要素[4)]について考える．変位関数は実際の非矩形要素の上で定義し，剛性行列および荷重ベクトルの計算において面積分を行う際は，次のような変数変換を行って Fig．2 (b) に示す矩形領域について積分する．

$$x=\left(\frac{x_{\mathrm{I}}-x_{\mathrm{II}}}{2}-a\right)\xi\eta+a\xi+\frac{x_{\mathrm{I}}+x_{\mathrm{II}}}{2}\eta,\quad y=b\eta \qquad (6)$$



Fig．2　Non-rectangular Element

この場合，Jacobian $|J|$ は

$$|J|=\begin{vmatrix} x_\xi & x_\eta \\ y_\xi & y_\eta \end{vmatrix}=b[(\frac{x_{\rm I}-x_{\rm II}}{2}-a)\eta+a]$$

帯板要素の節線変位として w, $\theta(=dw/dx)$ を用いる．節線 (i), (k) の変位はモード関数 $\varphi_n(y)$ により級数展開する．

$$\left.\begin{aligned}(i)\text{ 辺}: w_i=\sum_{n=1}^{N} w_{in}\varphi_n(y),\quad \theta_i=\sum_{n=1}^{N}\theta_{in}\varphi_n(y)\\ (k)\text{ 辺}: w_k=\sum_{n=1}^{N} w_{kn}\varphi_n(y),\quad \theta_k=\sum_{n=1}^{N}\theta_{kn}\varphi_n(y)\end{aligned}\right\}\quad(7)$$

ここで θ_i, θ_k は節線における x 方向の傾斜角である．このため，平板の節線の法線方向の傾斜角が必要な場合は次の変換を要する．例えば (i) 辺では，

$$\frac{\partial w}{\partial n}=\theta_i\cos\alpha_i+\frac{\partial w_i}{\partial y}\sin\alpha_i\qquad(8)$$

変位関数は変数変換した場合，$w=\sum f_n(\xi,\eta)\varphi_n(\eta)$ となり ξ と η の関数には分離できなくなる．このために要素境界 (i), (k) 辺における変位関数の値と(7)を等値し，$f_n(x)$ の中の積分定数を決定するためには $_n(\pm1,\eta)\varphi_n(\eta)$ を各モードの関数 $\varphi_n(\eta)$ に関して級数展開して係数比較を行う必要がある．即ち，(i) 辺について表わすと

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{\tau_n}\sum_{j=1}^{N}\int_0^1 f_j(-1,\eta)\varphi_j(\eta)\varphi_n(\eta)d\eta=\omega_{in}\\ \frac{1}{\tau_n}\sum_{j=1}^{N}\int_0^1 g_j(-1,\eta)\varphi_j(\eta)\varphi_n(\eta)d\eta=\theta_{in}\end{aligned}\right\}\quad(9)$$

ここに $g_n=\dfrac{df_n}{dx}$, $\tau_n=\displaystyle\int_0^1\varphi_n(\eta)^2{\rm d}\eta$

このフーリェ近似のため非矩形度が大きくなる程波数 Nを多くとる事が必要となる．しかしこの近似により非矩形要素上，(x, y) 座標上，で定義した変位関数が節線変位と関係づけられ，ひずみおよび曲率変化の計算において (ξ, η) 座標において形状関数を定義し座標変換を行う場合には必要な Jacobian matrix の計算が不要となり，剛性行列，荷重ベクトルの計算の際に数値積分を行うことを避けることができる．

変位関数をマトリックス表示すると次のようになる．

$$w = \mathbf{fsw}\qquad(10)$$

ここに $\mathbf{f}: f_n\varphi_n$ の関数部分を要素とする $4N$ の列ベクトル

$\mathbf{s}$: 積分定数 A_{1n}, A_{2n},… と節線変位係数 w_{in}, θ_{in} との関係を表わす $(4N, 4N)$ の定数行列

$\mathbf{w}$: 節線変位係数ベクトル

(2) 剛性行列と荷重ベクトル

要素表面に外力 p が働らく場合の帯板要素の全ポテンシャルエネルギー ϕ は次式で表わされる．

$$\phi=\frac{1}{2}\int_e\boldsymbol{\varepsilon}^T\mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}\,dxdy-\int_e wp\,dx\,dy\qquad(11)$$

上式において，e は要素内領域（境界も含む）を意味する．$\mathbf{D}$ は平板の材料定数による弾性係数行列，$\boldsymbol{\varepsilon}$ は一般化ひずみである．

$$\boldsymbol{\varepsilon}=\left\{-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\ -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\ \ 2\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right\}^T=\mathbf{tsw}\qquad(12)$$

ここに $\mathbf{t}:\mathbf{f}$ の各要素を一般化ひずみに合せて x, y により適当階微分して作った $(3, 4N)$ の関係行列．外力はモード関数 φ_n により級数展開すると次のように表わせる．

$$p=\sum_{n=1}^{N}P_n(x)\ \varphi_n(y)$$

(11)は書き改めて

$$\phi=\frac{1}{2}\mathbf{w}^T\mathbf{s}^T\Big(\int_e\mathbf{t}^T\mathbf{D}\,\mathbf{t}\,dx\,dy\Big)\ \mathbf{sw}-\mathbf{w}^T\mathbf{s}^T\Big(\int_e\mathbf{f}^T\mathbf{p}\varphi\,dx\,dy\Big)\qquad(11)'$$

と表わせる．ここに $\mathbf{p}=\{P_1P_2\cdots P_N\}^T$, $\varphi=\{\varphi_1\varphi_2\cdots\varphi_N\}^T$．最小ポテンシャルの原理より得られた要素の剛性行列 $\mathbf{K}$ と荷重ベクトル $\mathbf{L}$ は(6)式の変数変換を行って Fig. 2 (b) に示す矩形領域において面積分を行う．

$$\left.\begin{aligned}\mathbf{K}=\mathbf{s}^T\Big(\int_0^1\int_{-1}^1\mathbf{t}^T(\xi,\eta)\mathbf{Dt}(\xi,\eta)|J|\,d\xi\,d\eta\Big)\mathbf{s}\\ \mathbf{L}=\mathbf{s}^T\Big(\int_0^1\int_{-1}^1\mathbf{f}^T(\xi,\eta)\,\mathbf{p}\boldsymbol{\varphi}(\eta)|J|\,d\xi\,d\eta\Big)\end{aligned}\right\}\quad(13)$$

この2重積分は解析的に可能である．

2．3　斜め防撓材の剛性行列

防撓材は原則として節線上にくるように要素分割する．(Fig. 1 参照) したがって斜め防撓材の場合は少くとも防撓材の両側の要素は非矩形となる．防撓材に固有の座標を Fig. 3 のように (n, t) とする．一

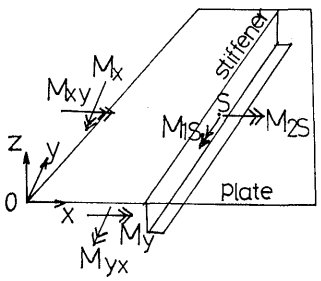


Fig. 3　Forces on Plate Structuae

般化応力を σ_S，一般化ひずみを ε_S とするとひずみエネルギーは

$$U_s=\frac{1}{2}\int_o^{b/\cos\alpha}\sigma_S^T\,\varepsilon_S\,dt \tag{14}$$

ここに　$\sigma_S=\{M_{2S}\ M_{1S}\}^T$ (Fig. 3 参照)

$$\varepsilon_S=\left\{-\frac{\partial^2 w_S}{\partial t^2}\quad\frac{\partial^2 w_S}{\partial n\,\partial t}\right\}^T \tag{15}$$

添字Sは防撓材の剪断中心に関する量を表わす．未知変位として接合線（節線(i)）の値を用いているため，次の位置関係を用いて変換する．

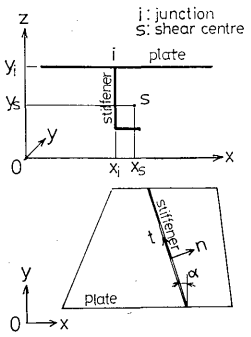


Fig. 4　Local Coordinates of Stiffener

$$w_S = w_i-(x_i-x_S)\theta_i \tag{16}$$

節線変位の内 θ_i は x 方向の傾斜角であるため，捩り率は次の式を用いて変換する必要がある．また曲率の計算の際 $t=y/\cos\alpha$ の関係がある事に注意を要する．

$$\frac{\partial^2 w}{\partial n\partial t}=\frac{\partial\theta_i}{\partial y}(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)+\left(\frac{\partial^2 w_i}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 w_i}{\partial x^2}\right)\sin\alpha\cdot\cos\alpha \tag{17}$$

これより，捩り率の計算には x 方向の曲率の変化 $\partial^2 w/\partial x^2$ を必要とするが，計算が頻雑となるため，傾き角 αi が小さい時は $\sin\alpha_i$ も小さいのでこれを無視する．

防撓材の応力とひずみの関係は

$$\sigma_S=\mathbf{D}_S\varepsilon_S,\quad \mathbf{D}_S=\begin{bmatrix}EI_Z & 0\\ 0 & GJ\end{bmatrix} \tag{18}$$

ここに EI_Z，GJ は防撓材の断面の曲げ剛性と捩り剛性．

(7)，(16)を(15)，(17)に代入すると一般化ひずみは次の形に表わせる．

$$\varepsilon_S = \mathbf{e}_s\mathbf{w}_i \tag{19}$$

ここに $\mathbf{e}_s$ は φ_n とその微係数を含む $(2,\ 2N)$ の関数行列

ひずみエネルギーは(18)，(19)を用いると

$$U_S=\frac{1}{2}\mathbf{w}_i^T\left(\int_o^{b/\cos\alpha}\mathbf{e}_s\,\mathbf{D}_S\,\mathbf{e}_s\,dt\right)\mathbf{w}_i \tag{20}$$

となり，これより防撓材の剛性行列 $\mathbf{K}_S$ は次のように表わせる．

$$\mathbf{K}_S=\int_o^b(\mathbf{e}_s^T\mathbf{D}_S\,\mathbf{e}_s)\,dy/\cos\alpha \tag{21}$$

3. 数値解析

3.1 平板の解析

(1) 解の精度と収束性

等分布荷重を受ける全周固定の正方形板を傾き角が5.7°の非矩形要素の組合せにより解析を行い，要素分割数および波数Nと解の精度の関係を調べた．Fig. 5 (a) に板中央点の撓み，Fig. 5 (b) に中央点のモーメントを示す．これより，解の収束性は波数Nにより決まり，解の精度は，分割数が非常に少ないN＝2，4を除いて，殆んど要素数に無関係であることが判る．このことは自由度が限られる場合には要素数より波数を重視する方が良い結果が得られることを示している．

Fig. 6 に要素数4，波数3（自由度18)の条件において正方形板の中央点の撓みを要素の非矩形度を変えて計算した結果を示す．非矩形度が大きくなるほど解の精度が悪くなるのは節線変位と変位関数を等値する際のフーリェ近似に原因する．このため非矩形度が大きい場合には波数Nを多くとり近似度を増す必要がある．また $\alpha=45°$ については分割形状を2種類変えて

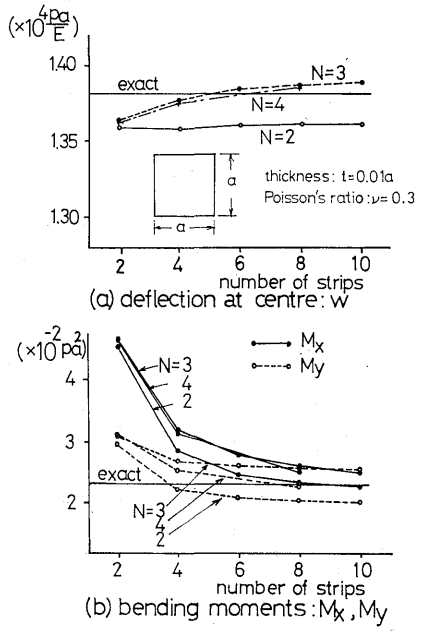


Fig. 5　Convergence of Solutions

計算を行ったが，これより分割形状により解の精度が変ることが判る．

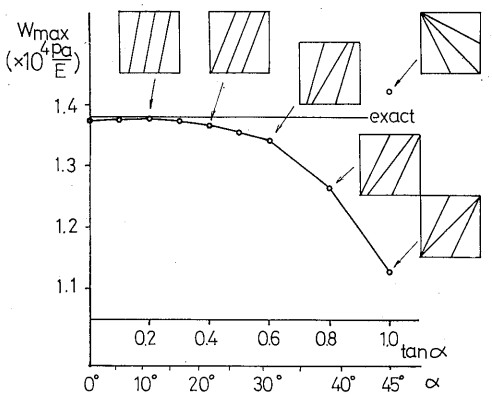


Fig. 6　Deflections of Square Plates at Centre in various Non-rectangular Elements

(2) 菱形平板

非矩形平板の例として，全周固定，等分布荷重の条件下に傾き角を4種類変えて菱形状の平板の解析を行った．その中央線上の撓み形状を Fig. 7 に示す．傾きが大きくなるほど撓みが小さくなるが，傾き角が

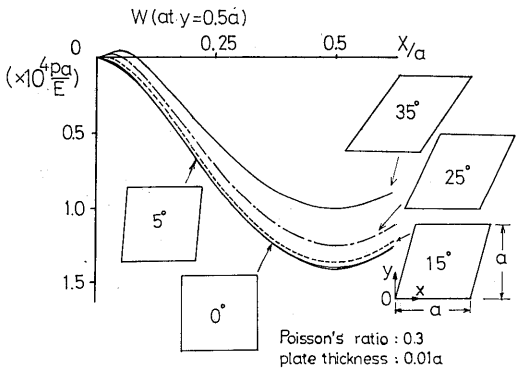


Fig. 7　Deflections of Rhomboidal Plates on Centre line in various Inclined Angle

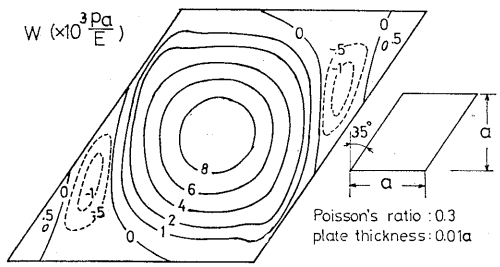


Fig. 8　The Contour Curves of Deflection on a Rhomboidal Plate

15°以下ではあまり正方形板と変らない．このことは $\alpha=35°$ の菱形板について撓み等高線図を示した Fig. 8 からみて明らかなように，変位の連続性により撓みが中央部から同心円状に拡がり，狭角の支持辺では波状の撓みが起り，これが一つの支持帯を形成し，構造物としての広がりが減じて撓みが小さくなる．

3．2　防撓平板

(1) 4本の斜め防撓材をもつ長方形板

4本の斜め防撓材により補強された，全周固定の長方形板に等分布荷重が作用する場合の撓み等高線図を Fig. 9 に示す．撓み線図は防撓材と支持境界に囲まれた区画の形状にやや相似の形になっているが，防撓材A，B附近の線図は両方とも類似している．この事はFig.10に示すように防撓材に生じるモーメント分布

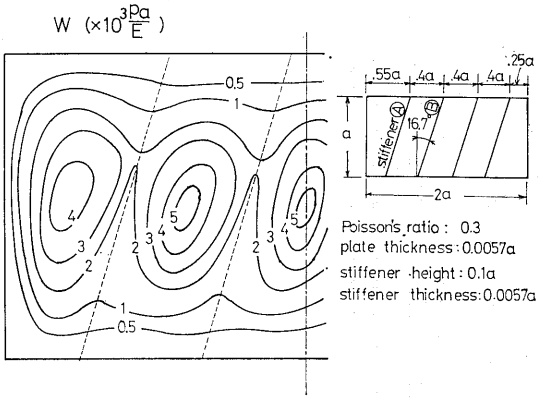


Fig. 9　Deflection Diagram of a Plate with four Obligue Stiffeners

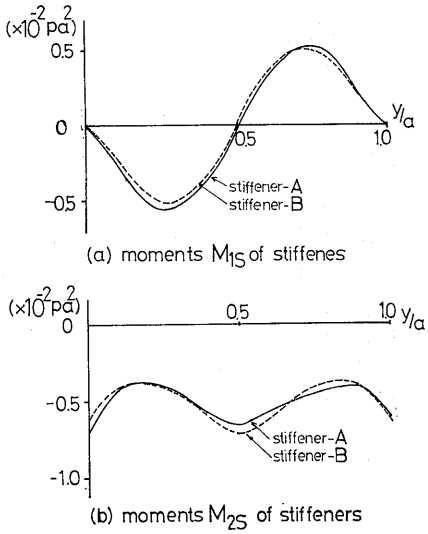


Fig. 10　Moments on n-axis and t-axis of stiffeners

が，周辺形状の非対称性の大きい防撓材Aが捩りを僅かに多く受けるのを除いて，良く似ていることからも明らかなようにA，B防撓材の平板に対する強度的効果はほぼ同じである事を示している．この理由は，平板に対して防撓材の曲げ剛性が非常に大きいため防撓材周辺の撓みに対し支配的である事と，斜行角が16.7°であるために斜め防撓材としての特徴があまり明確に現われていない事による．

(2) 斜め防撓材の効きについて

防撓材の辺となす角の違いによる補強効果を調べるために，Fig. 11 に示すように，斜行角が5種異るフラットバー型の防撓材により補強された全周固定の正方形板に等分布荷重が作用する場合について解析した．Fig. 11 に，$y=0.5a$ と $y=0.25a$ の位置における撓み波形を Fig. 12 に，および同じ位置における x 方向の曲げモーメント分布を示した．また防撓材に生じるモーメントを Fig. 13 に示す．

防撓材が辺に平行の場合には防撓材の取付位置において撓みは極小となるが，斜め材の場合には防撓材の位置と極小点の間に差があり，当然防撓材は傾きが起り，捩りを受ける事を示している．この大きさは，防撓材を狭む撓み面の非対称性によって決まるために，Fig.13(a) に示すように斜行角が小さいときには防撓材に捩りを生じるモーメントは小さく，斜行角が増すに従い大きくなるが，さらに斜行角が大きくなると防撓材の長さが増し，捩りに抵抗する力が低下するためモーメントも小さく現われている．撓み量は $\alpha<15°$ 程度まではあまり変らないがそれ以上の斜行角になると，防撓材の長さが長くなるにも拘わらず，菱形平板の場合に示されたように防撓材と支持辺とのなす狭角部分に剛域を生じる事により撓みが減少する．この事は Fig.13 (b) に防撓材端部の曲げモーメントの急増として現われている．

撓み面は斜め防撓材により捩れた曲面を形成するため曲率変化の巾は，中央線（$y=0.5a$）付近を除いて

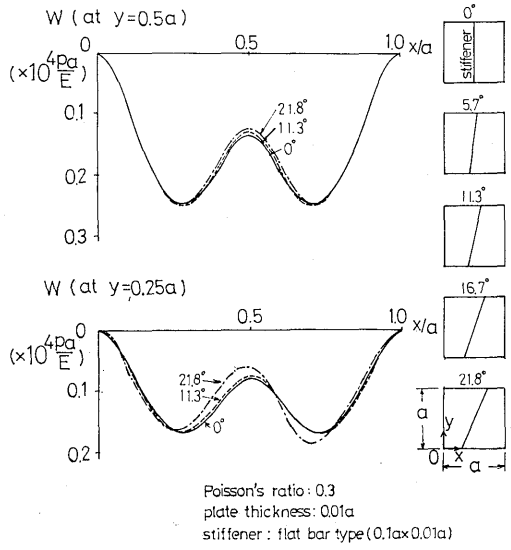


Fig. 11　Deflections of Plates with a Stiffener in various obligue Angle

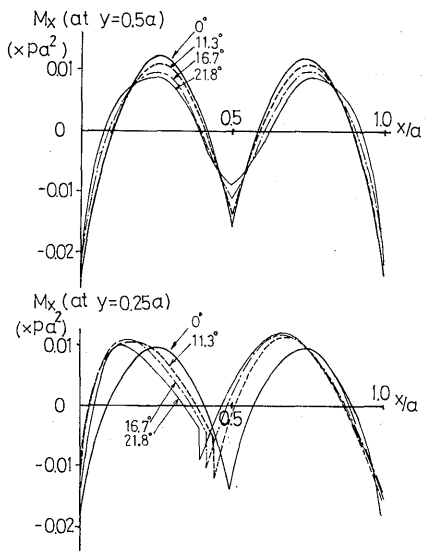


Fig. 12　Bending Moments along y-section of Plates with a Oblique Stiffener

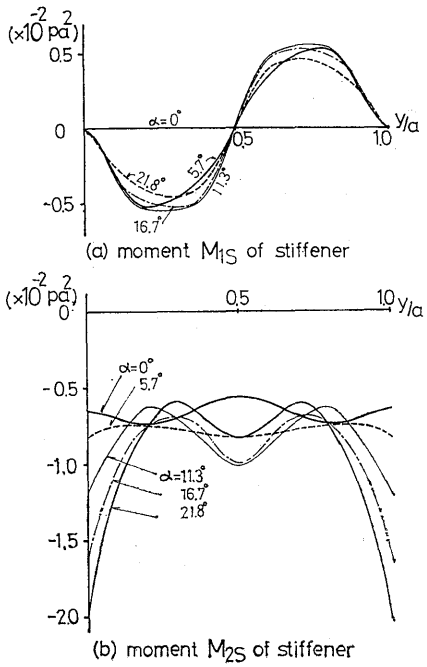


Fig. 13　Moments on n-axis and t-axis of Stiffener

大きくなり，従って最大モーメントも増大する．ここでは計算例としてフラットバー型の防撓材を用いているため，捩り剛性が曲げ剛性に比べ非常に小さく，撓み面の捩れに充分対抗できないため曲率変化の大きさを小さく押えきれなかった．このことから，斜め防撓材を配置して補強効果をはかるためには，捩れ剛性の大きい型材を使用する必要がある事が判る．また防撓材端部に大きなモーメントを生じる事も注意を要する．

4. まとめ

Kantorovich の方法を用いて求めた基礎方程式の近似関数を変位関数とする有限帯板法に，フーリェ近似と変数変換の組合せにより，非矩形平板や斜め防撓平板を解析する方法について考察した．非矩形要素を組み合せた正方形板の解析例より解の精度と収束性を調べ，非矩形度30°位までは比較的少ない自由度により精度の良い解が得られる事を検証した．また非矩形板や斜め防撓平板の解析を行い本解析法の有効性を確めた．この計算例より平板構造を斜め防撓材で補強する場合には，斜行角が大きい程捩れ剛性の大きい型材を用いる方が補強効果のあること，および防撓材端部に大きな曲げモーメントを生じる事を明らかにした．

終りにあたり，日頃懇切なご指導をいただいている九州大学工学部栖原二郎教授に対し，またこの研究に当り，暖かいご配慮いただきました本学部黒川常夫教授に対し深く感謝致します．

参考文献

1) Cheung, Y. K.: Finite Strip Method Analysis of Elastic Slabs, Proc. ASCE, vol. 94, No. EM 6 (Dec. 1968)
2) Kantorovich, L. V. and Krylov, V. I.: Approximate Method of Higher Analysis (translated in English), Interscience Publishers, (1964)
3) 福地信義：有限帯板法による防撓曲面板構造の解析，日本造船学会論文集 第135号，(1974)
4) 福地信義：同上（続報），第137号，(1975)
5) 大坪英臣，北野公夫：固有関数を用いた有限要素による補強平板の曲げ及び座屈解析，日本造船学会論文集 第134号，(1973)