

電磁波のシミュレーション II

富塚 明

（1990年4月27日受理）

Simulation for Electromagnetic Wave II

Akira TOMIZUKA

Electromagnetic waves from two types of quadrupole are illustrated by electric and magnetic lines of force with their intensity using computer full color graphics. Each line of force is very complicated and does not lie on the same plane.

1. はじめに

3次元空間に広がり伝播していく電磁波を記述するのは非常に困難なので、マイクロコンピュータを用いることは有益である。前回¹⁾は振動する電気双極子から放出される電磁波の様子について立体描写を行った。今回は2種類の電気四重極子から放出される電磁波についてフルカラー・グラフィックで立体描写を試みたので紹介する。

2. 遅延ポテンシャルの多重極展開

電磁波の放出を体系的に取り扱うときには遅延ポテンシャルが用いられる²⁾。よく知られているようにポテンシャルの多重極展開の0次の項は静電場であり、1次の項からは電気双極子による電磁場が導出される¹⁾。さて2次の項は電磁場に寄与する部分だけを取り出すと、

$$\varphi_2(\vec{r}, t) = \frac{3}{2} \left(\frac{\tilde{Q}}{r^3} + \frac{\dot{\tilde{Q}}}{cr^2} + \frac{\ddot{\tilde{Q}}}{3c^2r} \right) \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$\vec{A}_2(\vec{r}, t) = \frac{\vec{m} \times \vec{r}}{r^3} + \frac{\dot{\vec{m}} \times \vec{r}}{cr^2} + \frac{\ddot{\vec{Q}}}{2cr^2} + \frac{\dot{\vec{Q}}}{2c^2r} \quad \dots\dots\dots (2)$$

となる。ここで \tilde{Q} は電気四重極子テンソルであり、ベクトル \vec{Q} はテンソルと

$$\tilde{Q} = \frac{\vec{r} \cdot \vec{Q}}{r} \quad \dots\dots\dots (3)$$

なる関係にあるものとする。また \vec{m} は磁気双極子モーメントである。

磁気双極子からの寄与は

$$\vec{E}_m(\vec{r}, t) = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{A}_2^m(\vec{r}, t) = -\frac{\dot{\vec{m}} \times \vec{r}}{cr^3} - \frac{\ddot{\vec{m}} \times \vec{r}}{c^2 r^2} \quad \dots\dots\dots (4)$$

$$\begin{aligned} \vec{H}_m(\vec{r}, t) &= \text{rot } \vec{A}_2^m(\vec{r}, t) \\ &= \frac{3 \vec{r} (\vec{r} \cdot \dot{\vec{m}})}{r^5} - \frac{\dot{\vec{m}}}{r^3} \\ &\quad + \frac{3 \vec{r} (\vec{r} \cdot \ddot{\vec{m}})}{cr^4} - \frac{\ddot{\vec{m}}}{cr^2} \\ &\quad + \frac{\vec{r} (\vec{r} \cdot \ddot{\vec{m}})}{c^2 r^3} - \frac{\ddot{\vec{m}}}{c^2 r} \quad \dots\dots\dots (5) \end{aligned}$$

となる。これは電気双極子による電磁場と同じ形をしている^{1,3)}。但し、電場と磁場が入れ替っており、このことはループ電流の作る磁場の類推から理解できる。

さて電気四重極子の生み出す電磁場はやや面倒なベクトル演算の結果、

$$\begin{aligned} \vec{E}_q(\vec{r}, t) &= -\text{grad } \varphi_2(\vec{r}, t) - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{A}_2^q(\vec{r}, t) \\ &= \frac{6 \vec{r} (\vec{r} \cdot \ddot{Q})}{r^5} - \frac{3 \ddot{Q}}{2 r^4} \\ &\quad + \frac{6 \vec{r} (\vec{r} \cdot \ddot{\dot{Q}})}{cr^5} - \frac{3 \ddot{\dot{Q}}}{2 cr^3} \\ &\quad + \frac{5 \vec{r} (\vec{r} \cdot \ddot{\ddot{Q}})}{2 c^2 r^4} - \frac{\ddot{\ddot{Q}}}{c^2 r^2} \\ &\quad + \frac{\vec{r} (\vec{r} \cdot \ddot{\ddot{\dot{Q}}})}{2 c^3 r^3} - \frac{\ddot{\ddot{\dot{Q}}}}{2 c^3 r} \quad \dots\dots\dots (6) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{H}_q(\vec{r}, t) &= \text{rot } \vec{A}_2^q(\vec{r}, t) \\ &= \frac{\dot{\vec{Q}} \times \vec{r}}{cr^4} + \frac{\ddot{\vec{Q}} \times \vec{r}}{c^2 r^3} + \frac{\ddot{\ddot{\vec{Q}}} \times \vec{r}}{2 c^3 r^2} \quad \dots\dots\dots (7) \end{aligned}$$

となる。

さて、直交座標系では四重極子テンソルは次のように定義される。

$$\tilde{Q} = \begin{pmatrix} \Sigma q_i (x_i^2 - \frac{r_i^2}{3}) & \Sigma q_i x_i y_i & \Sigma q_i x_i z_i \\ \Sigma q_i y_i x_i & \Sigma q_i (y_i^2 - \frac{r_i^2}{3}) & \Sigma q_i y_i z_i \\ \Sigma q_i z_i x_i & \Sigma q_i z_i y_i & \Sigma q_i (z_i^2 - \frac{r_i^2}{3}) \end{pmatrix} \quad \dots\dots\dots (8)$$

q は電荷, r は原点からの距離である。さらに電荷が $\sin \omega t$ で振動するとすれば,

$$\tilde{Q} = Q(\theta, \varphi) \sin(\omega t - kr)$$

のように, θ, φ だけに依存する成分を取り出すことができる。こうして電磁場の r, θ, φ 成分は

$$\begin{cases} E_r = \frac{3 Q_r}{2 r^4} \{ (3 - k^2 r^2) \sin(\omega t - kr) + 3 kr \cos(\omega t - kr) \} \\ E_\theta = \frac{Q_\theta}{2 r^4} \{ (2 k^2 r^2 - 3) \sin(\omega t - kr) + (k^3 r^3 - 3 kr) \cos(\omega t - kr) \} \\ E_\varphi = \frac{Q_\varphi}{2 r^4} \{ (2 k^2 r^2 - 3) \sin(\omega t - kr) + (k^3 r^3 - 3 kr) \cos(\omega t - kr) \} \end{cases} \quad \dots\dots\dots (9)$$

$$\begin{cases} H_r = 0 \\ H_\theta = \frac{Q_\varphi}{2 r^4} \{ 2 k^2 r^2 \sin(\omega t - kr) + (k^3 r^3 - 2 kr) \cos(\omega t - kr) \} \\ H_\varphi = \frac{Q_\theta}{2 r^4} \{ 2 k^2 r^2 \sin(\omega t - kr) + (k^3 r^3 - 2 kr) \cos(\omega t - kr) \} \end{cases} \quad \dots\dots\dots (10)$$

と記述できる。したがってテンソルの r, θ, φ 成分を求めれば電磁場を計算できることになる。

3. 四重極子のつくる電磁場

四重極子は大きさが等しく向きが反対の2つの双極子が極めて接近したもので2種類の電荷分布の形がある。

a) 一軸上に配置した四重極子

最初に図1のように z 軸上に配置した四重極子 A を考える。

原点から振動中心までの距離を a , 振動の大きさを b とすればそれぞれの電荷の位置が定まり, (8) 式よりテンソルは

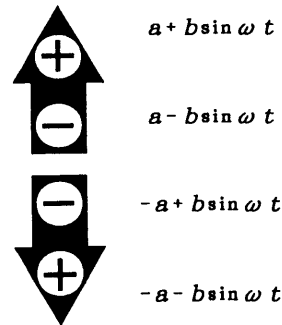


図1 z 軸上に配置した電気四重極子 A

$$Q(\theta, \varphi) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \dots\dots\dots (11)$$

となる。実際はこれの $\frac{4qab}{3}$ 倍である。

さて直交座標系のテンソルとベクトルの関係

$$Q_i = \sum_j Q_{ij} n_j$$

から \vec{Q} の x, y, z 成分を求め、さらに座標変換を行うと、

$$\begin{cases} Q_r = 2 \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \\ Q_\theta = -3 \sin \theta \cos \theta \\ Q_\varphi = 0 \end{cases} \quad \dots\dots\dots (12)$$

が得られる。したがって

$$\begin{cases} E_r = \frac{3(2 \cos^2 \theta - \sin^2 \theta)}{2 r^4} \{ (3 - k^2 r^2) \sin(\omega t - kr) + 3 kr \cos(\omega t - kr) \} \\ E_\theta = \frac{-3 \sin \theta \cos \theta}{2 r^4} \{ (2 k^2 r^2 - 3) \sin(\omega t - kr) + (k^3 r^3 - 3 kr) \cos(\omega t - kr) \} \\ E_\varphi = 0 \\ H_r = 0 \\ H_\theta = 0 \\ H_\varphi = \frac{-3 \sin \theta \cos \theta}{2 r^4} \{ 2 k^2 r^2 \sin(\omega t - kr) + (k^3 r^3 - 2 kr) \cos(\omega t - kr) \} \end{cases}$$

という電磁場が求まる。電荷分布は z 軸対称なので電場の φ 成分は 0、磁場は φ 成分のみを持つことがわかる。また r が大きくなると E_r は E_θ に比べて無視できるようになるので E と H は等しくなる。さらにその大きさは $\sin \theta \cos \theta$ に比例するので $\frac{\pi}{2}$ 方向が強度の最大となることがわかる。

b) 一平面上に配置した四重極子

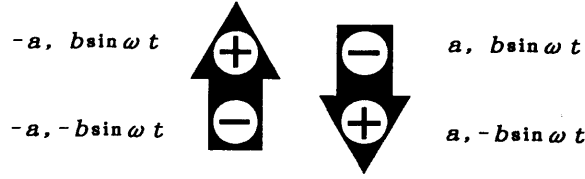


図2 yz平面上に配置した電気四重極子B

次に図2のような、yz平面内に配置した四重極子Bを考える。各座標を図内に示したようにとると、

$$Q(\theta, \varphi) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \dots\dots\dots (15)$$

$$\begin{cases} Q_r = \sin 2\theta \sin \varphi \\ Q_\theta = \cos 2\theta \sin \varphi \\ Q_\varphi = \cos \theta \cos \varphi \end{cases} \quad \dots\dots\dots (16)$$

となる。実際はこれの4倍である。また電磁場は

$$\begin{cases} E_r = \frac{3 \sin 2\theta \sin \varphi}{2 r^4} \{ (3 - k^2 r^2) \sin(\omega t - kr) + 3 kr \cos(\omega t - kr) \} \\ E_\theta = \frac{\cos 2\theta \sin \varphi}{2 r^4} \{ (2 k^2 r^2 - 3) \sin(\omega t - kr) + (k^3 r^3 - 3 kr) \cos(\omega t - kr) \} \\ E_\varphi = \frac{\cos \theta \cos \varphi}{2 r^4} \{ (2 k^2 r^2 - 3) \sin(\omega t - kr) + (k^3 r^3 - 3 kr) \cos(\omega t - kr) \} \\ H_r = 0 \\ H_\theta = \frac{\cos \theta \cos \varphi}{2 r^4} \{ 2 k^2 r^2 \sin(\omega t - kr) + (k^3 r^3 - 2 kr) \cos(\omega t - kr) \} \\ H_\varphi = \frac{\cos 2\theta \sin \varphi}{2 r^4} \{ 2 k^2 r^2 \sin(\omega t - kr) + (k^3 r^3 - 2 kr) \cos(\omega t - kr) \} \end{cases}$$

となる。これらの式からわかることは電磁場に φ 依存性があるため、電気力線や磁力線が同一平面内にはないということである。またyz平面内($\varphi = \frac{\pi}{2}$)では r の大きさに関係なく、強度は4回対称になっていることもわかる。

4. マイコンによる電磁波の描写

電気力線を描くには次のようにする。まずある位置の電場を

$$E = \sqrt{E_r^2 + E_\theta^2 + E_\phi^2}$$

で求める。次に、単位電荷がその電場によって力をうけて Δs だけ移動したとすると、その位置は

$$\Delta r = \frac{E_r}{E} \cdot \Delta s, \quad \Delta \theta = \frac{E_\theta}{rE} \cdot \Delta s, \quad \Delta \varphi = \frac{E_\phi}{rE} \cdot \Delta s$$

により与えられるので、これを繰り返していけばよい。磁力線についても同様である。

電磁場の強度は色で表現した。但し正負の区別はつけなかった。色と強度の関係は図3に示すとおりであり、112色に分けてある。尚、四重極子から放出される電磁波の強度は急速に弱くなり、一様になってしまうので、強度の対数をとることにより弱い部分を強調するようにした。

図4に四重極子Aから放出される電磁波の電気力線を示す。面は任意の子午面である。

図5には、このうちの位相の π だけことなる2本を $\varphi = \frac{\pi}{2}$ ごとに立体表示した。図5aは $t = \frac{3}{16}T$ 、5bは $t = \frac{5}{16}T$ (T は振動子の周期)におけるもので、視点方向は $\theta = 0.5$, $\varphi = 0.5$ (ラジアン)である。

図6に四重極子Bから電気力線を示す。面は $\varphi = \frac{\pi}{2}$ で、図4を $\theta = \frac{\pi}{4}$ 回転した形に近い。

図7は位相の $\frac{\pi}{4}$ だけ異なる2本の電気力線を立体表示したもので、図7aは $\theta = \frac{\pi}{2}$ で $\varphi = \frac{\pi}{4}$ ごとに、図7bは $\varphi = 0.02$ で $\theta = \frac{\pi}{4}$ ごとに表示したものである。視点は、前者は $\theta = 0.7$, $\varphi = 1.0$ 、後者は $\theta = 1.0$, $\varphi = 0.82$ 。各々の電気力線が同一平面上には存在しないことがよくわかる。

図8は四重極子Aによる、任意の子午面上の電場の強度分布を表しており、中心から離れると電場は四回対称になることがわかる。図9は四重極子Bによる $\varphi = \frac{\pi}{2}$ の面上での電場の強度分布である。図10は立体表示した電磁場の強度分布であるが、図内のE、E'はそれぞれ $\varphi = 0$, $\frac{\pi}{2}$ における電場を、Hは $\theta = \frac{\pi}{2}$ における磁場を表している。E'とHの境界を見てみると、中心から離れたところでは強度は一致しているが中心近傍では位相のずれがあることがわかる。

四重極子Bでは磁場に θ 成分が存在するので磁力線は同心円にならない。磁力線が広がっていく様子を16分の1周期ごとに、陰線処理をほどこして描いたのが図11である。ここでは θ または φ を $\frac{\pi}{16}$ ごとにとっている。頂点付近では楕円状のループを描き、赤道付近の磁力線はx軸を通して半月状のループをつくるが、これらは逆向きに流れる2本の電流をつくる磁場を考えれば理解できる。中緯度では頂点を結び歪んだループとなっている。また図7と対比すると、磁力線はやはり電気力線を直角にとりまくように存在していることがわかる。

使用したマイコンはPC-9801VX21でCPUは80286、数値演算プロセッサ80287を利用した。フレームバッファは㈱デジタルアーツのHyPER-FRAME[Ⓢ]を使用(256³色から任意の640×400色を同時に表示可能)。言語はマクロアセンブラVer.5.1を使用し、プログラム・サイズはおよそ2.5Kbytesであった。写真はマイコンのディスプレイを直接撮影した。ASA100、絞り5.6または8、露出は0.5秒であった。

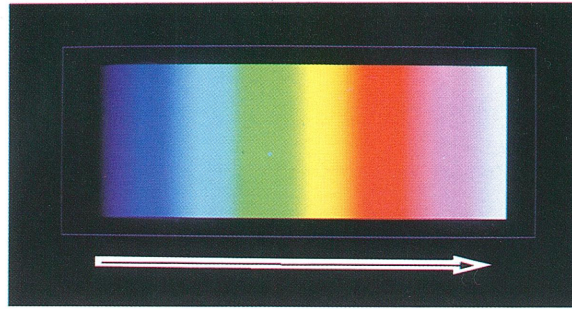
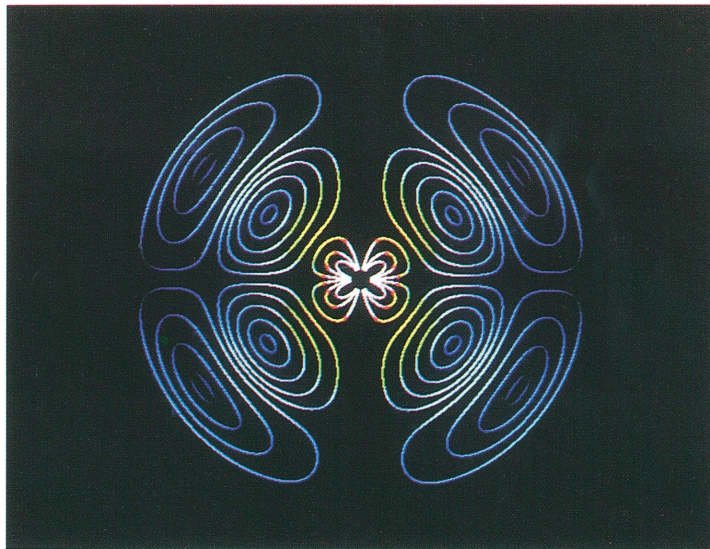
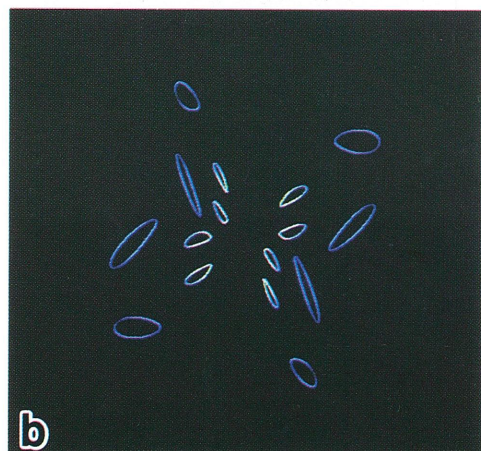
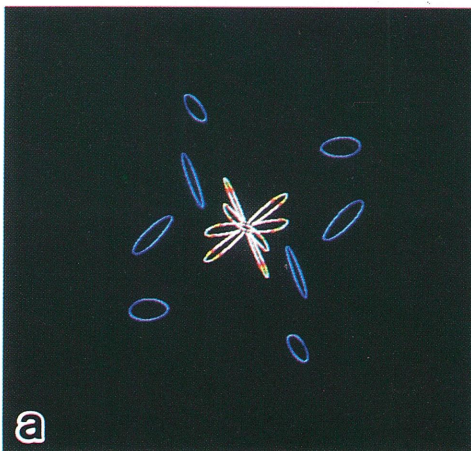


図3 電磁場の強度と色の対応

図4 電気四重極子 A からの電磁力線, $t = \frac{1}{16} T$ 図5 図4を立体表示 a: $t = \frac{3}{16} T$, b: $t = \frac{5}{16} T$

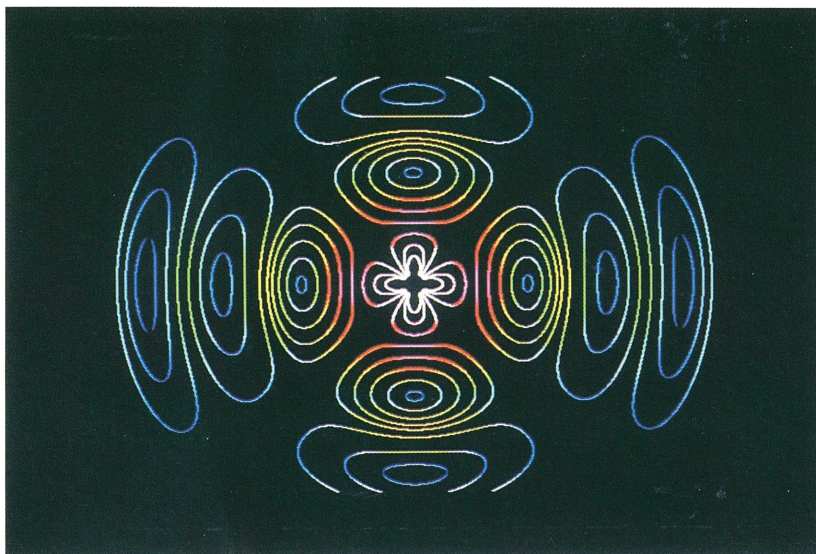


図6 電気四重極子Bからの電気力線. $\varphi = \frac{\pi}{2}$, $t = \frac{1}{16}T$

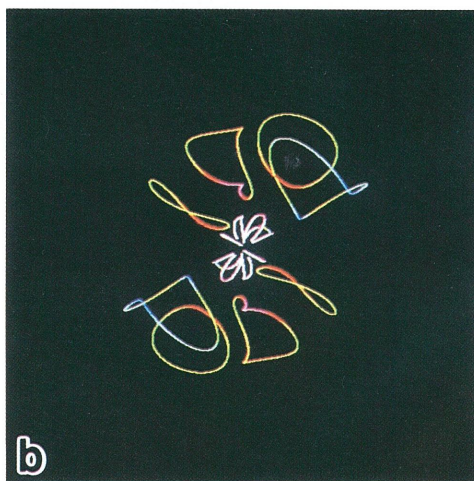
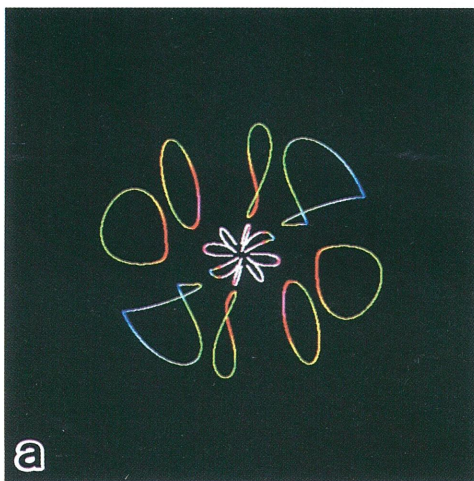


図7 図6を立体表示 a: $\theta = \frac{\pi}{2}$, b: $\varphi = 0.02$

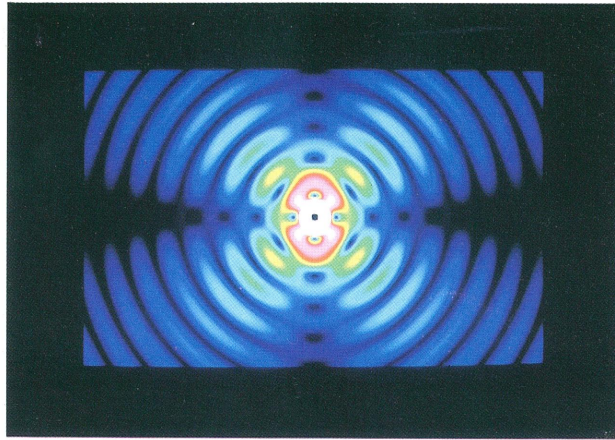


図 8 電気四重極子 A からの任意の子午面での電場の強度分布

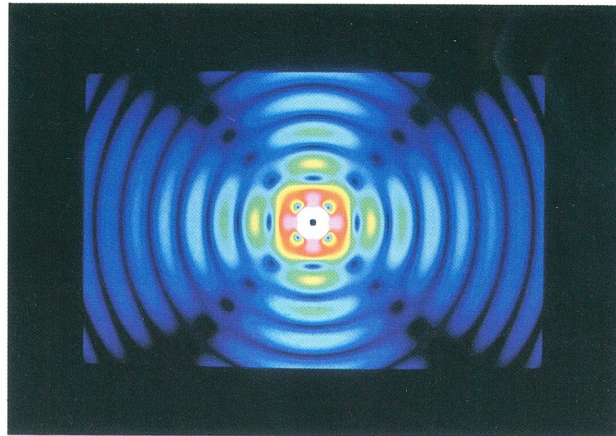


図 9 電気四重極子 B からの, $\varphi = \frac{\pi}{2}$ の面上での電場の強度分布

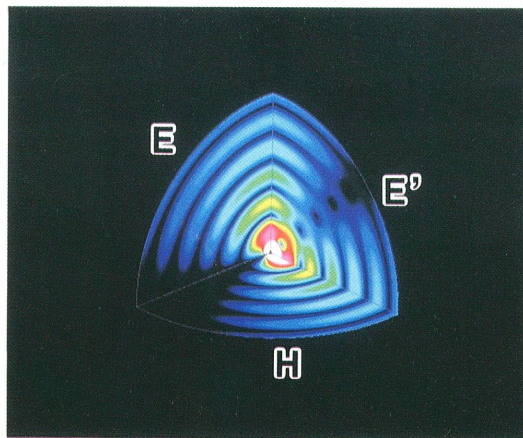


図 10 電気四重極子 B からの電磁場の強度分布の立体表示. E, E' はそれぞれ $\varphi = 0, \frac{\pi}{2}$ の面における電場. H は $\theta = \frac{\pi}{2}$ の面における磁場.

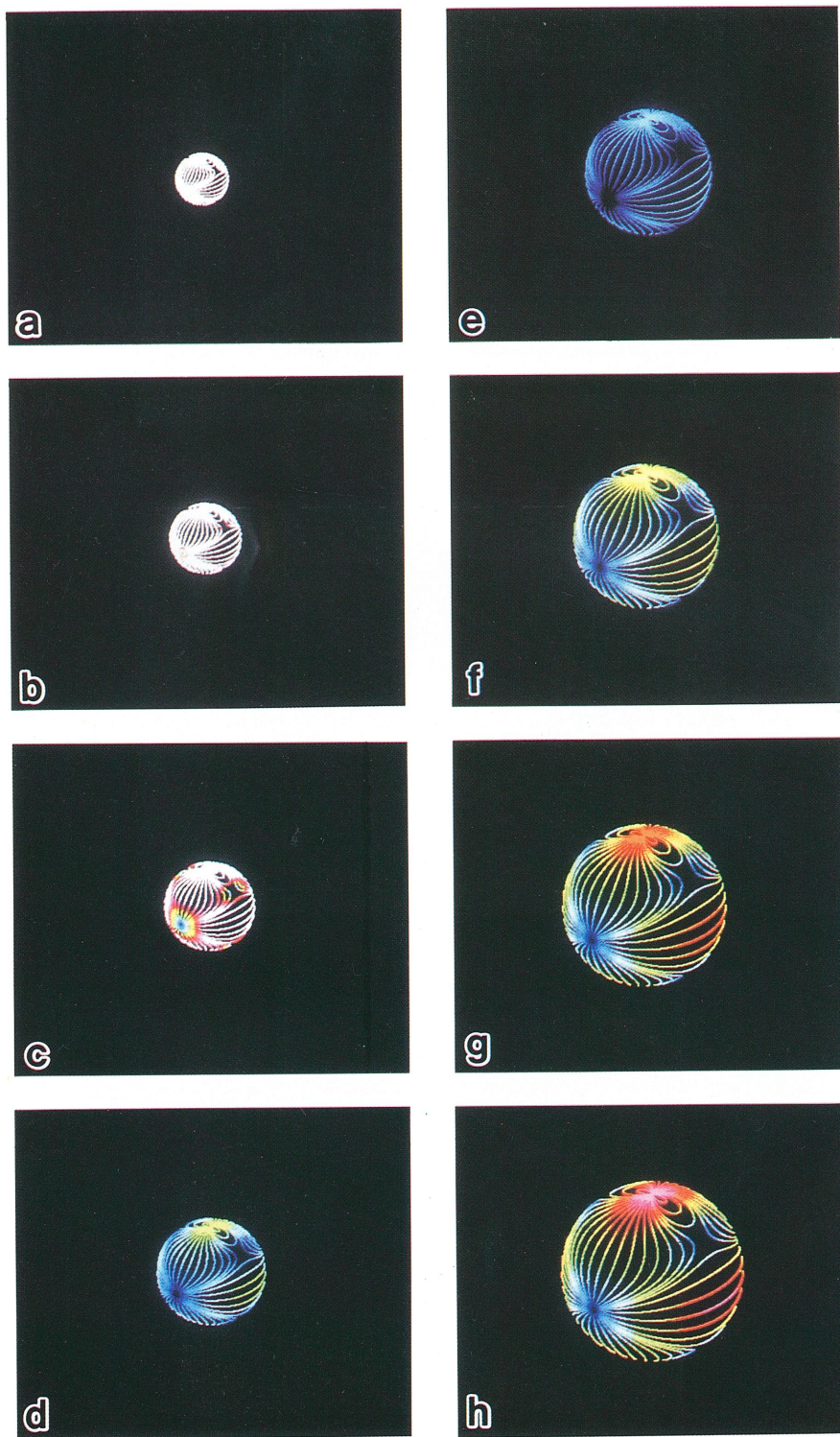


図 11 電気四重極子 B からの磁力線の広がり. $a \sim h : t = \frac{1}{16} T \sim t = \frac{8}{16} T$.

《参考文献》

- 〔1〕 富塚 明：長崎大学教養部紀要（自然科学篇）第30巻第1号37－45（1989）.
 - 〔2〕 砂川重信：理論電磁気学. 紀伊国屋書店（1973）.
 - 〔3〕 電子情報通信学会編：電磁波工学. コロナ社（1983）.
- その他, 〔1〕で掲げた文献.