

自由端に集中面内力を受ける片持ち長方形板の振動， 座屈および動的安定性

高橋 和雄*・呉 明強**

Vibration, Buckling and Dynamic Stability of a Cantilever Rectangular Plate Subjected to Concentrated In-plane Force at Free End

by

Kazuo TAKAHASHI* and Mincharn WU**

Vibration, buckling and dynamic stability of a cantilever rectangular plate subjected to concentrated load at free edge is studied. This problem is solved by using the Rayleigh-Ritz method and Hamilton principle to drive time variables. Natural frequencies and buckling properties are shown at first. The regions of instability are discussed for parameters of aspect ratio and static load.

1. まえがき

はりに面内曲げ荷重が作用すると，横倒れ座屈が生じることが知られてる¹⁾。はりの長さが短い場合や高さが高い場合には，平板としての取り扱いが必要であるが，これまで平板としての取り扱いはないようである。また，平板に面内力が作用する場合の座屈特性や振動特性はかなり解析されているが，周期的変動面内力が作用する場合の動的安定性について，不十分な点は認められる。

そこで，著者らは未解明の自由端に面内集中曲げ荷重が作用する場合の片持ち長方形板の自由振動，座屈および動的安定性をエネルギー法に基づく Rayleigh-Ritz 法と Hamilton の原理を用いて解析する。数値解析において，長方形板の座屈，振動および動的安定性に及ぼす縦横比，静的荷重および動的荷重の影響を明らかにする。

2. 片持ち板の自由端に面内集中荷重 P が作用する場合の面内力

Fig. 1 に示すような片持ち長方形板の自由端に y

軸方向に面内集中荷重 $P = P_0 + P_t \cos \Omega t$ が作用する場合の面内力 N_x および N_{xy} ²⁾ は次のように与えられる。

$$N_x = -\frac{12(P_0 + P_t \cos \Omega t)}{b^3} \left(y - \frac{b}{2}\right)(a - x) \quad (1)$$

$$N_{xy} = -\frac{6(P_0 + P_t \cos \Omega t)}{b^3} \left(y - \frac{b}{2}\right)^2 + \frac{3(P_0 + P_t \cos \Omega t)}{2b} \quad (2)$$

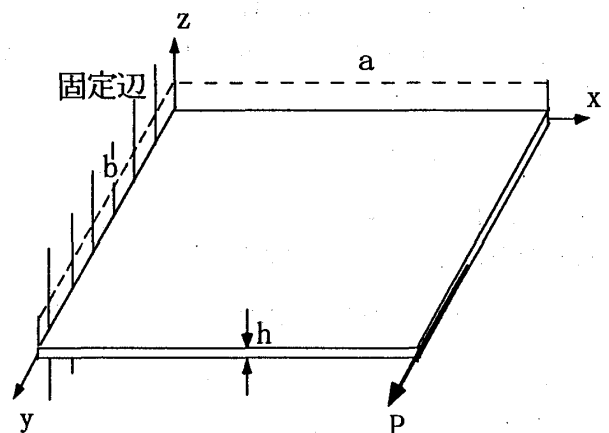


Fig. 1 Geometry of a cantilever plate

平成8年4月26日受理

* 社会開発工学科 (Department of Civil Engineering)

**大学院修士課程社会開発工学専攻 (Graduate Student, Department of Civil Engineering)

ここに, P_0 : 静的集中荷重, $P_t \cos \Omega t$: 周期的変動集中荷重, Ω : 励振円振動数, P_t : 変動荷重の振幅, t : 時間

3. ポテンシャルエネルギーおよび解法

(1) 座屈および固有振動解析

静的集中荷重 P_0 のみを受ける場合の長方形板の自由振動を考える。ひずみエネルギー V , 面内力による仕事 U および運動エネルギー T は次のように与えられる³⁾。

$$V(w) = \frac{1}{2} D \int_0^b \int_0^a \left\{ (\nabla^2 w)^2 - 2(1-\nu) \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \right\} dx dy \quad (3)$$

$$U(w) = \frac{1}{2} \int_0^b \int_0^a \left[N_x \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + 2 N_{xy} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) \right] dx dy \quad (4)$$

$$T(w) = \frac{\rho}{2} h \int_0^b \int_0^a \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 dx dy \quad (5)$$

ここに, $D = Eh^3/12(1-\nu^2)$: 板剛度, E : ヤング率, t : 時間, ν : ポアソン比, ρ : 板の密度, w : たわみ, h : 板厚, a, b : 辺長。

この場合の全ポテンシャルエネルギーは次式となる。

$$W(w) = V(w) + U(w) - T(w) \quad (6)$$

一般解を次のように仮定する³⁾。

$$w = \sum_m \sum_n A_{mn} h_m(\xi) \bar{h}_n(\eta) \exp(i\omega t) \quad (7)$$

ここに, h_m : 片持ちばりの固有振動形,
 \bar{h}_n : 両端自由ばりの固有振動形,
 A_{mn} : 未定定数, $\xi = x/a$, $\eta = y/b$,
 ω : 固有円振動数。

次に, 式(6)に式(7)を代入し, Rayleigh-Ritz 法⁴⁾を適用すると

$$\frac{\partial}{\partial A_{rs}} (V + U - T) = 0 \quad (8)$$

($r = 1, 2, \dots, N$, $s = 1, 2, \dots, N$).

式(8)の偏微分を行うと, 次式が得られる。

$$\sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N (E_{mrns} - \lambda_v^4 F_{mrns} - \lambda_b G_{mrns}) A_{mn} = 0 \quad (9)$$

ここに,

$$E_{mrns} = \frac{1}{\beta^4} I_{mr}^2 \bar{I}_{ns} + \frac{\nu}{\beta^2} (I_{mr}^3 \bar{I}_{ns}^2 + I_{mr}^4 \bar{I}_{ns}^3) + I_{mr}^1 \bar{I}_{ns}^5 + \frac{2(1-\nu)}{\beta^2} I_{mr}^5 \bar{I}_{ns}^4,$$

$$F_{mrns} = \frac{1}{\beta^2} I_{mr}^8 \bar{I}_{ns},$$

$$G_{mrns} = (8 I_{mr}^6 \bar{I}_{ns}^6 + I_{mr}^7 \bar{I}_{ns}^7 + I_{mr}^8 \bar{I}_{ns}^8) \left(\frac{3}{2\beta} \right),$$

$\lambda_v = \sqrt[4]{\rho h \omega^2 b^4 / D}$ (振動固有値), $\beta = a/b$: 縦横比

$\lambda_b = P_0 b / D$ ($\omega = 0$ のときの座屈固有値),

$I_{mr}^1, \bar{I}_{ns}^2, \dots$: 固有関数の定積分 (Appendix A)

($m, n, r, s = 1, 2, \dots, N$).

式(9)は行列表示すると

$$([E] - \lambda_v^4 [F] - \lambda_b [G]) \{X\} = \{0\} \quad (10)$$

ここに,

$$[E] = E \{s + (r-1)N, n + (m-1)N\} = E_{mrns}$$

$$[F] = F \{s + (r-1)N, n + (m-1)N\} = F_{mrns}$$

$$[G] = G \{s + (r-1)N, n + (m-1)N\} = G_{mrns}$$

$$\{X\} = \{A_{11} A_{12} A_{13} \dots A_{1N} A_{21} \dots A_{2N} \dots A_{NN}\}^T$$

ここで, $\lambda_b = 0$ とすれば, 面内力が作用しない場合の自由振動の固有値 λ_v が得られる。また, 慣性項を無視すれば座屈固有値 λ_b が得られる。なお, 式(10)を書き換えると,

$$([A] - \lambda_v^4 [F]) \{X\} = 0 \quad (11)$$

ここに, $[A] = [E] - \bar{P}_0 \lambda_b [G]$, $\bar{P}_0 = P_0 / P_{cr}$: 無次元静的荷重, P_{cr} : 座屈荷重

上式より無次元静的集中荷重 \bar{P}_0 を作用する場合の自由振動の固有値 λ_v が得られる。数値計算においては, 式(10)と式(11)を行列の固有値問題に変換し, 固有値と固有ベクトルを求める。

(2) 動的安定解析

静的荷重 P_0 と動的荷重 $P_t \cos \Omega t$ とともに作用する場合を考える。

動的安定解析において, たわみを次のように仮定する。

$$w = \sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N T_{mn}(t) W_{mn}(x, y) \quad (12)$$

ここに, $T_{mn}(t)$: 未知の時間関数, $W_{mn}(x, y)$: 静的集中荷重が作用しない場合の長方形板の固有振動形

$$W_{mn} = \sum_{p=1}^m a_p^m h_p(\xi) \sum_{q=1}^n a_q^n \bar{h}_q(\eta) \quad (13)$$

ここに, $h_p(\xi)$: 片持ちばりの固有振動形, $\bar{h}_n(\eta)$: 両端自由ばりの固有振動形, a_p^m, a_q^n : 自由振動解析から得られるモード定数。

一般座標に関する運動方程式を誘導するために, Hamilton の原理を適用する。

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = \delta \int_{t_1}^{t_2} \{T - (V - U)\} dt = 0 \quad (14)$$

ここに, $\delta T_{mn}(t_1) = \delta T_{mn}(t_2) = 0$

式(14)の変分を行い, 部分積分してまとめると, 次式が得られる。

$$\sum_{m=1} \sum_{n=1} \sum_{k=1} \sum_{l=1} \left[C_{mn}^{kl} \ddot{T}_{mn} + \left\{ \frac{1}{k_{11}^4} A_{mn}^{kl} - \frac{\lambda_b}{k_{11}^4} (\bar{P}_0 + \bar{P}_t \cos \bar{\omega} \tau) \right. \right. \\ \left. \left. B_{mn}^{kl} \right\} T_{mn} \right] = 0 \quad (15)$$

ここに、 $k_{11}^4 = \rho h b^4 \omega_{11}^4 / D$ ：片持ち長方形板の1次固有値、 $\bar{P}_t = P_t / P_{cr}$ ：無次元変動荷重振幅、 $\bar{\omega} = \Omega / \omega_{11}$ ：励振円振動数、 $\tau = \omega_{11} t$ ：無次元時間、 $A_{mn}^{kl}, B_{mn}^{kl}, C_{mn}^{kl}$ (Appendix B)

式(15)を行列表示すると次式が得られる。

$$[C]\{\ddot{T}\} + [A]\{T\} + (\bar{P}_0 + \bar{P}_t \cos \bar{\omega} \tau)[B]\{T\} = \{0\} \quad (16)$$

ここに、 $[C]: C\{l+(k-1)L, n+(m-1)L\} = C_{mn}^{kl}$

$$[A]: A\{l+(k-1)L, n+(m-1)L\} = \frac{1}{k_{11}^4} A_{mn}^{kl}$$

$$[B]: B\{l+(k-1)L, n+(m-1)L\} = -\frac{\lambda_b}{k_{11}^4} B_{mn}^{kl}$$

$$\{T\} = \{T_{11} T_{12} \cdots T_{1L} T_{21} \cdots T_{LL}\}^T$$

式(16)に、 $[C]$ の逆行列 $[C]^{-1}$ を左から掛けると次式になる。

$$[I]\{\ddot{T}\} + [F]\{T\} + (\bar{P}_0 + \bar{P}_t \cos \bar{\omega} \tau)[G]\{T\} = \{0\} \quad (17)$$

ここに、 $[F] = [C]^{-1}[A]$ 、 $[G] = [C]^{-1}[B]$

式(17)は連立の Mathieu の方程式である。数値的検討によれば、 $[I]$ は単位行列、 $[F]$ は対角線に固有振動数比の2乗が並んだ対角行列、 $[G]$ は零要素を多く含む係数励振行列である。

本研究の集中荷重を受ける長方形板の場合、行列 $[G]$ の要素のうち、半分は0である。時間関数 $\{T\}$ の順番を並び換えることにより、行列 $[G]$ 要素を零要素群と非零要素群にまとめられる。また、並び替えた後の時間関数 $\{T\}$ と係数励振行列 $[G]$ との要素を8自由度まで採用した場合には次のように表される。

$$\{T\} = \{T_{11} T_{21} T_{13} T_{23} T_{12} T_{22} T_{14} T_{32}\}^T \quad (18)$$

$$[G] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & g_{1211} & g_{2211} & g_{1411} & g_{3211} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & g_{1221} & g_{2221} & g_{1421} & g_{3221} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & g_{1213} & g_{2213} & g_{1413} & g_{3213} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & g_{1223} & g_{2223} & g_{1423} & g_{3223} \\ g_{1112} & g_{2112} & g_{1312} & g_{2312} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ g_{1122} & g_{2122} & g_{1322} & g_{2322} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ g_{1114} & g_{2114} & g_{1314} & g_{2314} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ g_{1132} & g_{2132} & g_{1332} & g_{2332} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (19)$$

上式において、時間関数 T_{ij} のサフィックス i は x 方向の振動形の次数を意味し、片持ちはりの振動次数に対応する。サフィックス j は y 方向の振動形の次数を意味し、 $j=1$ は両端自由はりの並進剛体モード、 $j=2$ は回転の剛体モードに対応し、 $j \geq 3$ は両端自由はりの曲げ振動の $j-2$ 次の振動次数に対応する。したがって、 y 方向の振動次数が偶数、奇数となるような結合共振が発生する。なお、係数励振行列 $[G]$ の主対角要素は単純共振の不安定領域を表し、非対角要素は結合共振の不安定領域を表す³⁾。今、主対角係数が0になるので、単純共振の不安定領域があまり発生しないことが予想できる。

また、並び替えた式(17)の一般解を、次のようにフーリエ級数を使って仮定する⁵⁾。

$$\{T\} = e^{\lambda \tau} \left\{ \frac{1}{2} \mathbf{b}_0 + \sum_{k=1} (\mathbf{a}_k \sin k \bar{\omega} \tau + \mathbf{b}_k \cos k \bar{\omega} \tau) \right\} \quad (20)$$

ここに、 λ ：未定数、 $\mathbf{b}_0, \mathbf{a}_k, \mathbf{b}_k$ ：未知のベクトル。

式(20)を式(17)に代入し、調和バランス法を適用して、2倍サイズの固有値問題に変換し、系の安定の判別を行う。

$$\begin{bmatrix} [0] & [I] \\ [M_2]^{-1}[M_0] & -[M_2]^{-1}[M_1] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X \\ Y \end{Bmatrix} = \lambda \begin{Bmatrix} X \\ Y \end{Bmatrix} \quad (21)$$

ここに、 $\{Y\} = \lambda \{X\}$ 、 $\{X\} = \{\mathbf{b}_0 \mathbf{b}_1 \mathbf{b}_2 \cdots \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \cdots\}^T$

$[M_0], [M_1], [M_2]$ ：係数行列

式(20)は、非対称行列の固有値問題の基礎式である。すなわち、与えられた加振振動数 $\bar{\omega}$ と変動面内力の振幅 \bar{P}_t の組み合わせに対して得られた固有値 λ の値がすべて負ならば、一般解の $\exp(\lambda \tau)$ が時間とともに収束するため安定、逆に一つでも正ならば発散してしまうため不安定であるという条件から安定性が評価される⁵⁾。

4. 座屈特性

(1) 座屈固有値の収束性

片持ち板の座屈固有値の収束状況を縦横比 $\beta = 1$ ，すなわち正方形の場合について調べると Fig. 2 の結果となる。Fig. 2 で、縦軸には座屈固有値 λ_b を取り、横軸には試行関数の項数 N を取っている。項数の増加に伴って固有値は収束し、固有値は $N=10$ 項で収束したと見なせる。これより、数値解析では10項近似を採用する。

(2) 座屈固有値の精度

解析の精度を直接比較する資料がないので、文献¹⁾のはりの横倒れ座屈の解析結果と比較すると Fig. 3 に示す結果となる。このとき、はりの厚さ h と幅 b と

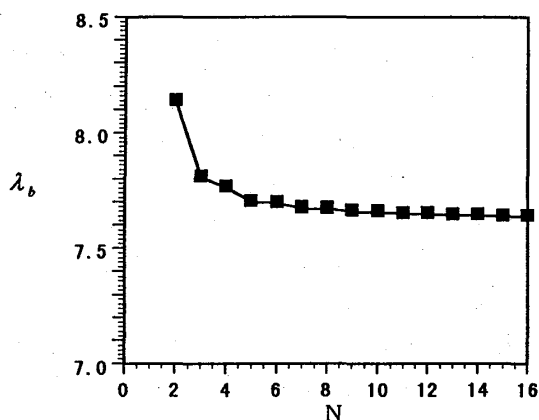


Fig. 2 Convergence of buckling eigen-value

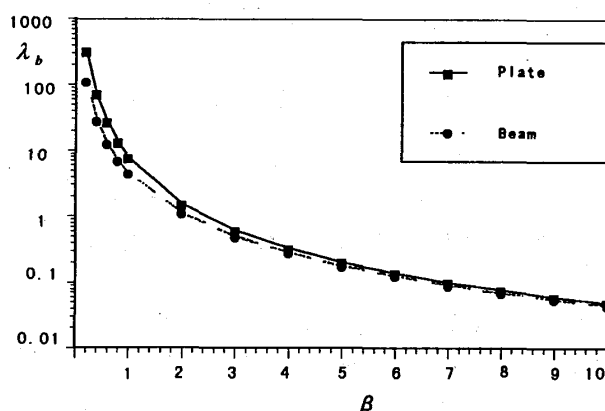
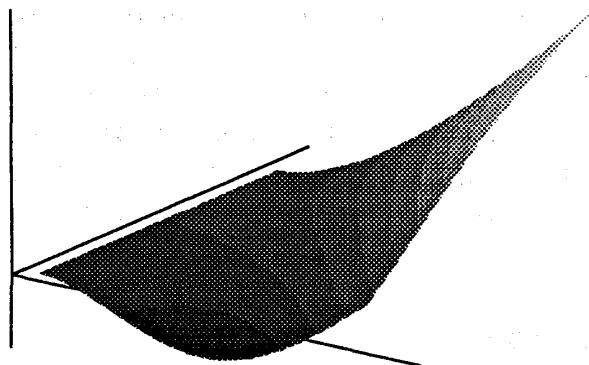


Fig. 3 Buckling eigen-value of plate and beam

Fig. 4 Buckling mode of cantilever plate ($\beta=1.0$)

の比が $1/10$ にする。縦軸には対数表示で座屈固有値 λ_b を取り、横軸には縦横比 β を取っている。縦横比が 5 を越えると板とはりとの結果がほぼ一致する。つまり、 β は 5 より大きい場合には板ははりとして取り扱える。

(3) 座屈モード

Fig. 4 には正方形板の座屈モードを示す。たわみとねじれを伴った波形で座屈していることがわかる。はりの横倒れ座屈モードと異なって、平板では断面の曲げ変形が含まれている。

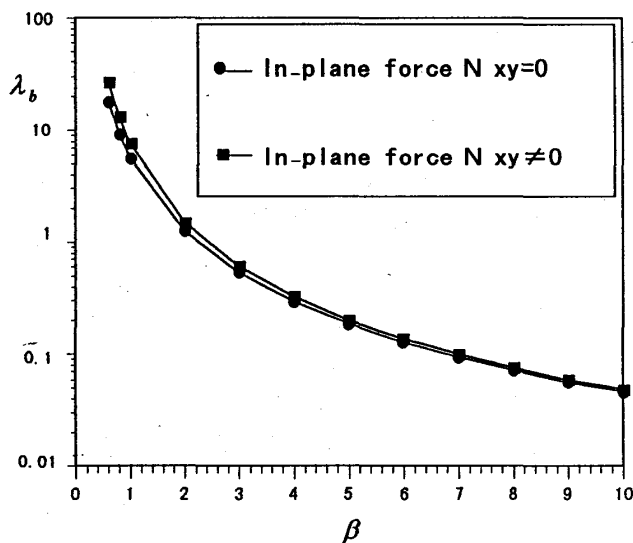


Fig. 5 Buckling eigen-value

(4) 面内せん断力の固有値への影響

Fig. 5 は面内せん断力を無視する場合と無視しない場合の座屈固有値の比較曲線である。ここで、縦軸には対数表示で座屈固有値 λ_b を取り、横軸には縦横比 β を取っている。縦横比 β は小さいとき、両曲線には差がある。つまり、面内せん断力の固有値への影響は縦横比 β が小さい場合に無視できない。

5. 振動特性

Table 1 Natural frequencies of cantilever plate ($\beta=1$)

Mode No.	Present study	Reference ⁶⁾
1 st	3.484	3.494
2 nd	8.521	8.547
3 rd	21.38	21.44
4 th	27.28	27.46
5 th	31.07	31.17

(1) 固有振動数の精度

同じような正方形板に集中荷重が作用しない場合の固有振動数の精度について調べると本研究で得られた無次元固有振動数 λ_p^2 と文献⁶⁾ の固有振動数 λ_p^2 との比較を行った結果が Table 1 である。なお、文献⁶⁾ の数値結果は Rayleigh-Ritz 法で計算された近似固有振動数であり、本法で比較に用いる値は固有振動数が収束したと見なされる項数 $N=10$ との結果である。両者はほぼ一致していることがわかる。

(2) 固有振動数に及ぼす静的荷重の影響

Fig. 6 は静的面内集中荷重が作用する場合の 1 次から 5 次までの振動固有値曲線である。縦軸には無次元

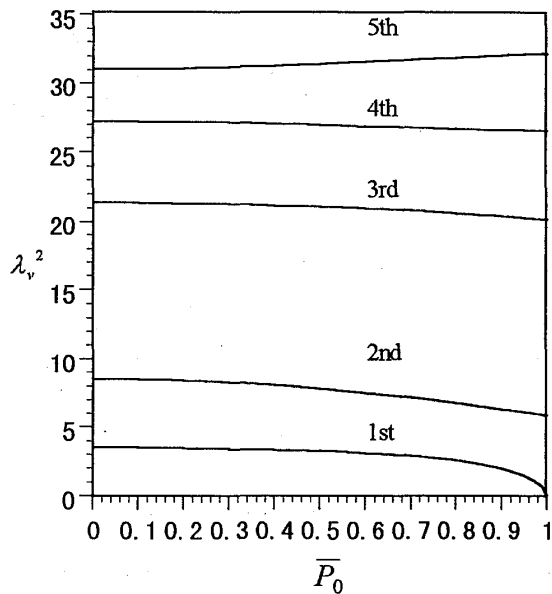


Fig. 6 Natural frequency vs static force

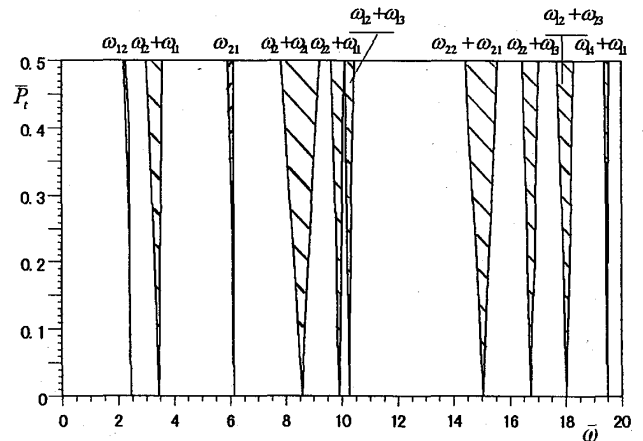
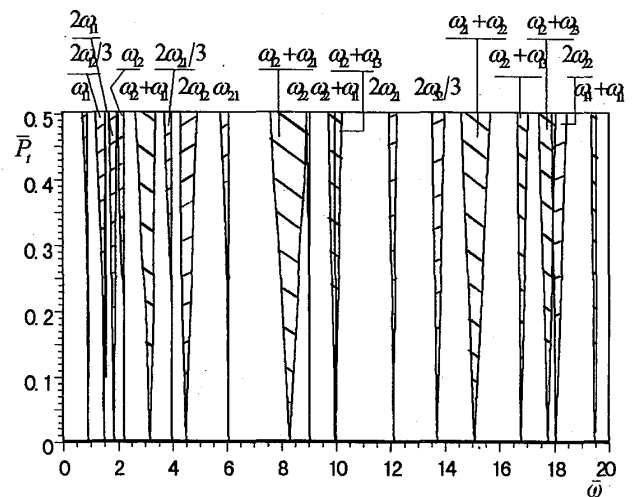
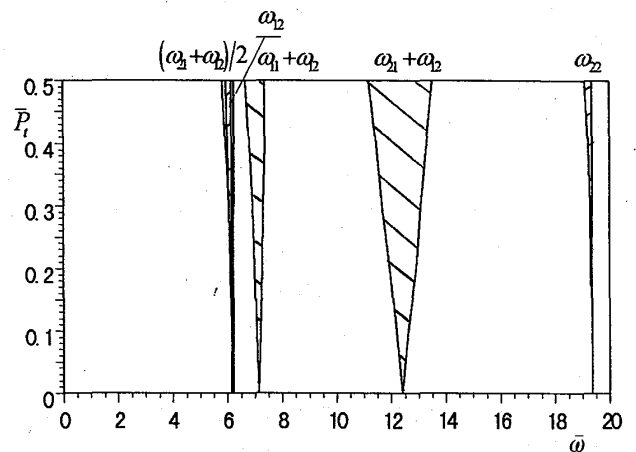
固有振動数 λ_v^2 を取り、横軸には無次元された静的面内集中荷重 \bar{P}_0 を取っている。5 次固有振動数は静的荷重の増加によって大きくなるが、1 次から 4 次の固有振動数が小さくなる。次数が低いほど、静的荷重が大きくなるにつれて、固有振動数は著しく減少する。なお、静的荷重が座屈荷重 ($\bar{P}_0 = 1$) の大きさのときに 1 次固有振動数が 0 となる。

6. 動的不安定領域

Fig. 7, 8, 9 および 10 は各種の長方形板の縦横比 β および無次元静的集中荷重 \bar{P}_0 の組み合わせのもとに得られた動的不安定領域を示す図である。これらの図の縦軸は無次元動的集中荷重の振幅 \bar{P}_t を示し、横軸は 1 次の固有振動数で無次元化した励振振動数 $\bar{\omega}$ を示す。左下がり斜線が単純共振の不安定領域を表し、右下がり斜線が結合共振の不安定領域を表すものである。さらに、 ω_{ij} は x 方向に片持ちばりの i 次の振動形、 y 方向に両端自由ばりの j 次の振動形に対応したモードをもつ振動の単純共振の副不安定領域を示す。 $\omega_{ij} + \omega_{mn}$ は 2 つのモードをもつ振動が発生する結合共振の主不安定領域を示す。本研究では 1 次振動の 20 倍までの励振振動数の範囲の不安定領域を議論の対象とし、不安定領域の励振振動数幅が $\bar{P}_t = 0.5$ において 0.1 以下の不安定振動は省略する。

(1) 単純共振と結合共振との不安定領域の考察

Fig. 7 には単純共振の副不安定領域 ω_{ij} と結合共振の主不安定領域 $\omega_{ij} + \omega_{mn}$ が得られている。不安定領域の幅は結合共振が単純共振よりも広い。これは面内集中荷重を受ける場合正方形板の座屈モードが自由端

Fig. 7 Unstable regions: $\beta = 1$ and $\bar{P}_0 = 0.0$ Fig. 8 Unstable regions: $\beta = 1$ and $\bar{P}_0 = 0.5$ Fig. 9 Unstable regions: $\beta = 3$ and $\bar{P}_0 = 0.0$

方向に振動の対称モードと逆対称モードの合成されて表されるためである。係数励振行列 $[G]$ より明らかなように、集中荷重を受ける場合は連成項を通じて直接項が励振されるため、単純共振の幅は狭い。したがって、集中荷重を受ける場合の平板の動的不安定領域は結合共振が支配的である。

(2) パラメータの影響

Fig. 8 には、静的荷重 $\bar{P}_0 = 0.5$ を作用させた場合の不安定領域を示す。静的荷重は一般に正方形板の剛性を小さくするので、固有振動数が減少し、不安定領域の幅を広くする効果を持つ。また、不安定領域の種類も多くなる。

次に、不安定領域に及ぼす縦横比 β の影響を調べる。Fig. 7, 8 および 10 において、縦横比が大きくなるにつれて、不安定領域の種類が少なくなる。これは 1 次振動数に比較して、他の固有振動数が高くなるので、表れる振動数が少なくなるためである。 $\beta = 10$ のはりに近い場合には、先端に周期的変動荷重を受けるはりの動的不安定領域に対応し、曲げとねじりのモードをもつ $\omega_{11} + \omega_{12}$ が広い不安定領域となっている。

7. まとめ

本研究では片持ち長方形板の自由端に沿って集中荷重が作用する場合を対象に、座屈、振動および動的安定性の解析を行い、それらの特性を明らかにしたものである。

本解析によって明らかになったことを要約すると

- (1) 自由端に平行に集中荷重が作用する場合の座屈固有値は縦横比の増加とともに単調に減少する。縦横比が大きくなると、はりの横倒れ座屈固有値に一致する。
- (2) 長方形板はたわみとねじれを伴った座屈波形で座屈する。この結果ははりの横倒れ座屈モードと異なっており、平板では断面の曲げ変形が含まれている。
- (3) 自由端に集中荷重が作用すると長方形板には面内垂直荷重と面内せん断力が作用する。せん断力の影響は縦横比が小さい場合には無視できない。したがって、平板を取り扱う場合、せん断力は無視することができない。
- (4) 静的集中荷重が作用しない場合の、自由振動の固有振動数とこれまでの研究成果とは、ほぼ一致する。
- (5) 静的集中荷重は長方形板の固有振動数に影響を及ぼす。1 次固有振動数は座屈荷重の大きさの時に 0 となる。
- (6) 動的不安定領域の種類は単純共振と結合共振があるが、単純共振の動的不安定領域の幅は結合共振の

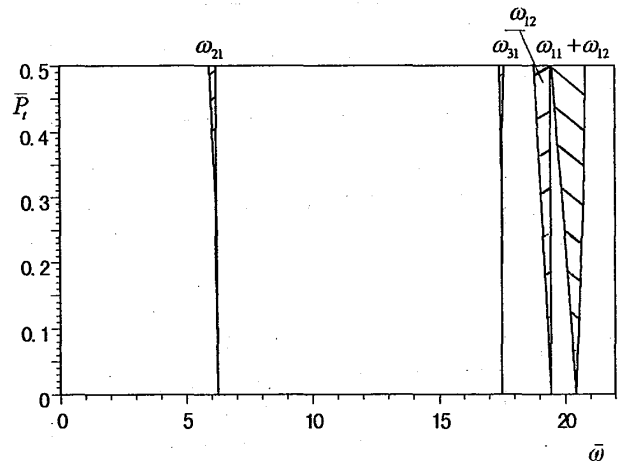


Fig. 10 Unstable regions: $\beta = 10$ and $\bar{P}_0 = 0.0$

幅によりも狭い。

(7) 動的集中荷重の増大に伴って動的不安定領域の幅は広がる。また、静的集中荷重が存在すれば、動的不安定領域の幅を広くなり、その種類も多くなる。

(8) 縦横比が大きくなると、動的不安定領域の種類は減少し、その幅も変化する。縦横比が大きい場合の動的不安定領域は、はりの動的不安定領域を示す。

以上の結果より、自由端に平行に集中荷重が作用した場合の座屈、振動および動的安定特性を明らかにすることができた。

なお、本研究を行うにあたり、本学大学院生の大田晶一君に多大な援助を得た。ここに、感謝の意を表す。そして、数値計算には本学の総合情報処理センターの FACOM VP-1200 モデル 10 を使用したことを付記する。

参 考 文 献

- 1) C. R. C. Japan: Handbook of Structural Stability, Corona, pp. 1-112, 1971.
- 2) 関谷壮, 斉藤渥: 薄板構造力学, 共立出版, pp. 83-95, 1968.
- 3) 高橋和雄, 古谷寿章, 其田智洋, 夏秋義広: Pasternak 基礎上の温度勾配をもつ変断面長方形板の振動, 座屈および動的安定性, 土木学会論文集 No. 519/I-32, pp. 175-184, 1995. 7.
- 4) 近藤恭平: 振動論, 培風館, pp. 278-281, 1993.
- 5) K. Takahashi: Parametric Instability of a Non-uniform Damping, Journal of Sound and Vibration, Vol. 85, pp. 257-262, 1982.
- 6) A. W. Leissa: Vibration of Plates. NASA SP-160. p. 76, 1969.

Appendix A はりの固有関数の定積分

$$\begin{aligned}
I_{mr}^1 &= \int_0^1 h_m h_r d\xi, & \bar{I}_{ns}^1 &= \int_0^1 \bar{h}_n \bar{h}_s d\eta, \\
I_{mr}^2 &= \int_0^1 h_{2m} h_{2r} d\xi, & \bar{I}_{ns}^2 &= \int_0^1 \bar{h}_{2n} \bar{h}_{2s} d\eta, \\
I_{mr}^3 &= \int_0^1 h_m h_{2r} d\xi, & \bar{I}_{ns}^3 &= \int_0^1 \bar{h}_n \bar{h}_{2s} d\eta, \\
I_{mr}^4 &= \int_0^1 h_{2m} h_r d\xi, & \bar{I}_{ns}^4 &= \int_0^1 \bar{h}_{1n} \bar{h}_{1s} d\eta, \\
I_{mr}^5 &= \int_0^1 h_{1m} h_{1r} d\xi, & \bar{I}_{ns}^5 &= \int_0^1 \bar{h}_{2n} \bar{h}_{2s} d\eta, \\
I_{mr}^6 &= \int_0^1 (1 - \xi) h_{1m} h_{1r} d\xi, \\
I_{ns}^6 &= \int_0^1 \left(\eta - \frac{1}{2}\right) \bar{h}_n \bar{h}_s d\eta, \\
I_{mr}^7 &= \int_0^1 h_m h_{1r} d\xi, & \bar{I}_{ns}^7 &= \int_0^1 \left\{ 4 \left(\eta - \frac{1}{2}\right)^2 - 1 \right\} \bar{h}_{1n} \bar{h}_s d\eta, \\
I_{mr}^8 &= \int_0^1 h_{1m} h_r d\xi, & \bar{I}_{ns}^8 &= \int_0^1 \left\{ 4 \left(\eta - \frac{1}{2}\right)^2 - 1 \right\} \bar{h}_n \bar{h}_{1s} d\eta.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
h_{1m} &= \lambda_m a \{ -\sin \lambda_m a \xi - \sinh \lambda_m a \xi \\
&\quad + \alpha_m (\cos \lambda_m a \xi - \cosh \lambda_m a \xi) \}, \\
h_{2m} &= (\lambda_m a)^2 \{ -\cos \lambda_m a \xi - \cosh \lambda_m a \xi \\
&\quad + \alpha_m (-\sin \lambda_m a \xi - \sinh \lambda_m a \xi) \}, \\
\alpha_m &= \frac{\sin \lambda_m a - \sinh \lambda_m a}{\cos \lambda_m a + \cosh \lambda_m a}, \\
\beta_m &= \frac{\cosh \mu_n b - \cos \mu_n b}{\sinh \mu_n b - \sin \mu_n b},
\end{aligned}$$

$n=1$ の場合

$$\bar{h}_{2n} = 0,$$

$n=2$ の場合

$$\bar{h}_{1n} = -2\sqrt{3},$$

$$\bar{h}_{2n} = 0,$$

$n \geq 3$ の場合

$$\begin{aligned}
\bar{h}_{1n} &= \mu_n b \{ \sinh \mu_n b \eta - \sin \mu_n b \eta \\
&\quad - \beta_n (\cosh \mu_n b \eta + \cos \mu_n b \eta) \}, \\
\bar{h}_{2n} &= (\mu_n b)^2 \{ \cosh \mu_n b \eta - \cos \mu_n b \eta \\
&\quad - \beta_n (\sinh \mu_n b \eta - \sin \mu_n b \eta) \}.
\end{aligned}$$

Appendix B 定積分 $A_{mn}^{kl}, B_{mn}^{kl}, C_{mn}^{kl}$

$$\begin{aligned}
A_{mn}^{kl} &= \int_0^1 \int_0^1 \left\{ \frac{1}{\beta^4} \bar{W}_{mn, \xi \xi} \bar{W}_{kl, \xi \xi} + \bar{W}_{mn, \eta \eta} \bar{W}_{kl, \eta \eta} + \frac{\nu}{\beta^2} \right. \\
&\quad \left. (\bar{W}_{mn, \xi \xi} \bar{W}_{kl, \eta \eta} + \bar{W}_{mn, \eta \eta} \bar{W}_{kl, \xi \xi}) \right. \\
&\quad \left. + \frac{2(1-\nu)}{\beta^2} \bar{W}_{mn, \xi \eta} \bar{W}_{kl, \xi \eta} \right\} d\xi d\eta, \\
B_{mn}^{kl} &= \frac{3}{2} \int_0^1 \int_0^1 \left[8 \left(\eta - \frac{1}{2}\right) (1 - \xi) \bar{W}_{mn, \xi} \bar{W}_{kl, \xi} \right. \\
&\quad \left. + \left\{ 4 \left(\eta - \frac{1}{2}\right)^2 - 1 \right\} \right. \\
&\quad \left. (\bar{W}_{mn, \xi} \bar{W}_{kl, \eta} + \bar{W}_{mn, \eta} \bar{W}_{kl, \xi}) \right] d\xi d\eta,
\end{aligned}$$

$$C_{mn}^{kl} = \int_0^1 \int_0^1 \bar{W}_{mn} \bar{W}_{kl} d\xi d\eta,$$

$$\bar{W}_{uv} = \sum_{m=1} \alpha_m^u h_m \sum_{n=1} \alpha_n^v \bar{h}_n,$$

$$\bar{W}_{uv, \xi \eta} = \sum_{m=1} \alpha_m^u h_{1m} \sum_{n=1} \alpha_n^v \bar{h}_{1n}$$

$$\bar{W}_{uv, \xi \xi} = \sum_{m=1} \alpha_m^u h_{2m} \sum_{n=1} \alpha_n^v \bar{h}_n.$$

$$\bar{W}_{uv, \eta \eta} = \sum_{m=1} \alpha_m^u h_m \sum_{n=1} \alpha_n^v \bar{h}_{2n}$$

$$\bar{W}_{uv, \xi} = \sum_{m=1} \alpha_m^u h_{1m} \sum_{n=1} \alpha_n^v \bar{h}_n$$

$$\bar{W}_{uv, \eta} = \sum_{m=1} \alpha_m^u h_m \sum_{n=1} \alpha_n^v \bar{h}_{1n}$$

ここに, α_m^u, α_n^v : モード定数,

$$h_m, h_{1m}, h_{2m}, \bar{h}_n, \bar{h}_{1n}, \bar{h}_{2n}$$

$$(m, n, k, l, u, v = 1, 2, \dots, N).$$

(Appendix A を参照)