

花火の運動のコンピューターシミュレーションによる 3 次元表現 II — 星の燃焼による星の質量減少効果を考慮した開花半径 —

福山 豊* 平田 景子*

(平成11年 3 月15日受理)

3-D Expression of Fireworks by Computer Simulation II — Mass Decreasing Dependence of Expanded Radii of Fireworks —

Yutaka FUKUYAMA, Keiko HIRATA

(Received March. 15, 1999)

1. はじめに

花火の代表である割物は、図 1 に示すように玉皮の内側沿いに球形に星を並べ、内部に詰め込んだ割り薬に火をつけて、強い力で破裂させ、点火した星が四方八方に飛び散ることで球形の花を咲かせるように作られている¹⁾。前の報告で、このような一見複雑そうな花火の運動を、力学の問題としてどのように取り扱う事ができるかを考察した²⁾。これは学生たちに、運動方程式が解析的に解けなくても、初期条件が与えられれば、コンピューターを利用した簡単な言語による数値計算により、その後の速度と位置が求められ、運動方程式の解が求められることやこの結果をグラフィックスとして視覚化することなどの学習を体験させることは、力学教育のなかで極めて重要であると考え、いろいろな花火の形を描きだす力学教材の開発を試みたものである。このとき星の運動は、より現実的な花火の運動を表現するために、速度の二乗に比例した空気の抵抗を考慮した三次元の花火の運動を考察した。しかし、この場合は星の燃焼による質量の変化を無視した非現実的なモデルとなっていたので、色々な花火の形態にのみ関心をもち描き出すこととなった。そこで、今回は、現実の花火のモデルに近い星の燃焼の効果を考慮した場合について考察することにした。この結果、星の燃焼の様子の違いや星の大きさの違いによる花火の運動の様子を理解することができるようになった。

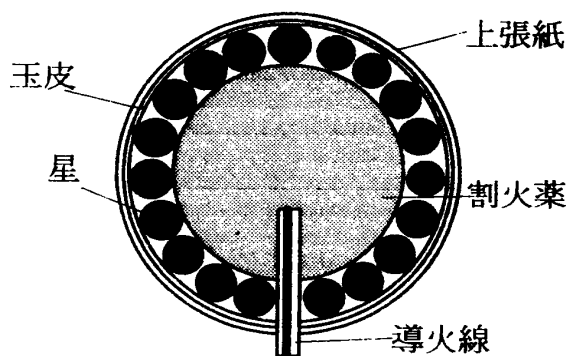


図 1 割物の構造

2. 花火の運動方程式

一般に、ニュートンの運動の第2法則は、微小時間 Δt とその時働いた力 F 、運動量の変化を $\Delta p (= \Delta(mv))$ とすると

$$\Delta \vec{p} = \vec{F} \cdot \Delta t \quad (1)$$

と表される。

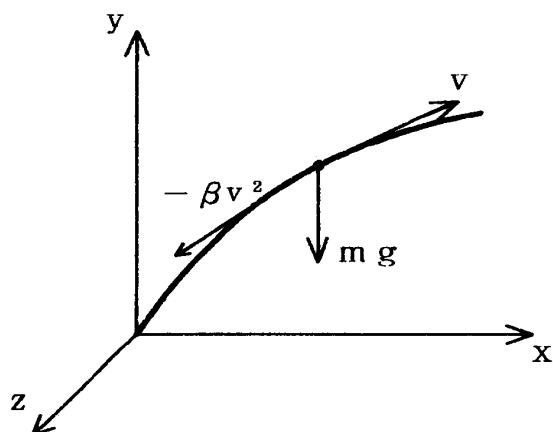


図2 星に働く力

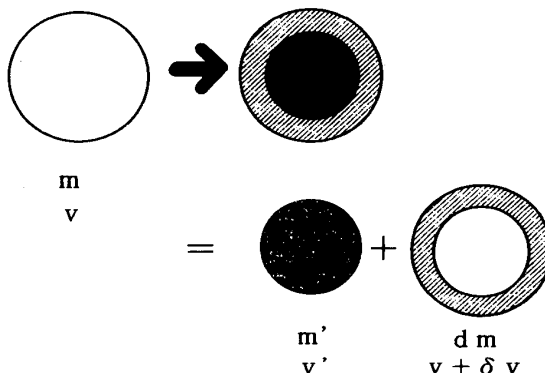


図3 星の燃焼による運動量変化

花火の運動を記述する座標系を、 x 軸を右側横軸、 y 軸を垂直上方、 z 軸を手前側にとると、速度を持って飛んでいる星に働く力は、 y 軸下方に働く重力と、速度の向きと逆向きに働く速度の二乗 v^2 に比例した空気の抵抗力と考えることができる(図2)。

このときの運動量の変化は、燃焼による質量の減少を考慮しなければならないため、質量が一定の場合のように、単に $\Delta p = m \Delta v$ となるかどうかの検証が必要である。

図3に示すように、始めの星の質量を m 、速度を v とし、 Δt 後の星の質量を $m' (= m - \Delta m)$ 、そのときの速度を $v' (= v + \Delta v)$ とする。星が燃焼して離れていった部分の質量を Δm 、速度を $v + \delta v$ とする。このときの運動量の変化は、2次の微少量を無視すると

$$\begin{aligned} \Delta \vec{p} &= (m - \Delta m) (\vec{v} + \Delta \vec{v}) + \Delta m (\vec{v} + \delta \vec{v}) - m \vec{v} \\ &\doteq m \Delta \vec{v} \end{aligned} \quad (2)$$

と近似される。

以上のことを考慮すると、星の運動方程式の x 、 y 、 z 成分は、

$$m \frac{dv_x}{dt} = -\beta v v_x \quad (3)$$

$$m \frac{dv_y}{dt} = -mg - \beta v v_y \quad (4)$$

$$m \frac{dv_z}{dt} = -\beta v v_z \quad (5)$$

と表すことができる。

ここで β は、空気抵抗の係数とする。また、 g は重力加速度である。
このとき、速度の大きさ v は、速度の成分との間に

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} \quad (6)$$

の関係がある。

(3)～(5)式に記述している速度の二乗に比例する空気抵抗の係数 β は、星の半径を r 、空気の密度を ρ_0 と表すると

$$\beta = \frac{1}{4} \pi \rho_0 r^2 \quad (7)$$

と表されることが知られている^{3,4)}。燃焼によってこの係数 β は小さくなることが分かる。しかし、この運動の加速度に寄与するのは β を m ($= 4/3 \cdot \pi \rho r^3$: ρ は星の密度)で割った値 k 、すなわち、

$$\begin{aligned} k &= \beta / m \\ &= \frac{3\rho_0}{16\rho r} \end{aligned} \quad (8)$$

であり、むしろ星の燃焼とともに増加することがわかる。

以上の考察から、今回の花火の運動方程式(3)～(5)は、(8)式の k を用いて

$$\frac{dv_x}{dt} = -k\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} \cdot v_x \quad (9)$$

$$\frac{dv_y}{dt} = -g - k\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} \cdot v_y \quad (10)$$

$$\frac{dv_z}{dt} = -k\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} \cdot v_z \quad (11)$$

と表すことができる。

3. 星の燃焼による質量変化

これらの微分方程式を数値計算において解くために、 k の時間 t による変化の式と定数の値を与えなければならない。星の本当の密度分布と半径の時間依存性は、花火の意匠の構想により星の作り方はかなり異なっているようなので、ここでは力学問題としての興味から単純化して、星の密度を一定と仮定し、星の半径の時間依存性として、次の4つの場合を取り扱い比較を行った。

これらは、a) 星の大きさが変わらない場合 ($r=r_0$)、b) 星の表面積に比例して減少する場合 ($r=r_0(1-at)^{1/2}$: $a=1/2$)、c) 星の半径に比例して減少する場合 ($r=r_0(1-at)$: $a=1/2$)、d) 星の半径が指数関数に比例して減少する場合 ($r=r_0 \exp(-bt)$: $b=1$) とした。また、こ

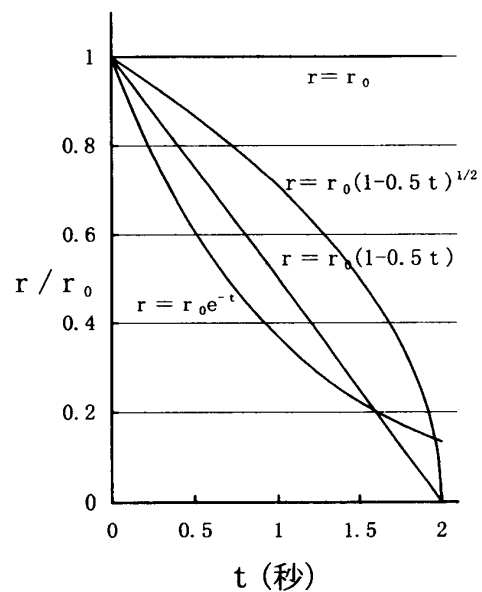


図4 星の質量の時間変化

これらの花火の開花の大きさを比較するため星の初速度 v_0 と花火の開花時間 t を一定とし、それぞれ $v_0 = 100 \text{ m/sec}$ と $t = 2 \text{ 秒}$ とした。これらの半径 r と時間 t の様子を図4に示す。a) は実際の花火の運動としては意味をなさないが、前の報告の場合に対応し、後との比較のために採用した、b) と c) は2秒で星が燃え尽きるものとしたが、d) は星の中心に、燃えない芯があるものとした。

また、空気密度は、 $\rho_0 = 1.2 \text{ kg/m}^3$ (20℃, 1 気圧) とし、星の密度は $\rho = 10^3 \text{ kg/m}^3$ と仮定した。

4. 数値計算と星の初期値

これらの運動方程式は、解析的には解が求められないことが知られているため、数値計算を行う事になるが、一番簡単なオイラー法を用いることにする。ルンゲ・クッタ法でも計算してみたが、星の運動に急激な変化がないので目立った違いはなかったので、以後の計算はオイラー法⁵⁾で行った。

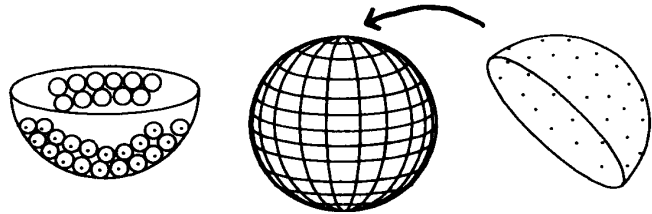


図5 星の初速度の角度の求め方

そこで、花火の星の運動方程式を、オイラー法で、実際に解くためには、各々の星の速度と位置の初期値が必要となる。前の報告と同様に行った²⁾。

通常、花火玉の破裂は、打ち上げた後、ほぼ頂点に達したときに起こるように考慮して作られていることが多いので、この頂点の位置を座標の原点とし、飛び出す星の位置の初期値は、

$$x=0, y=0, z=0 \quad (12)$$

ととることとする。

次に、速度の初期値を決めることが必要となる。半径20cm程の結晶解析で用いる透明な半球の内側に、紙粘土を薄く張り付け、その上からビー玉を隙間なく並べて押し付けた。その結果、ビー玉を押し付けて粘土が押しのけられた場所を、半球の外側から印を付け、その点が星が飛び出す方向を決めるの緯度と経度に相当する角度（正確には極座標の θ と ϕ の角度）と見なした。すなわち、半球によってできる球の中心とその点を含む断面を、座標軸の原点と $x-y$ 面ととり、それに直角に z 軸をとると、 θ は半球上の点を極座標で表したときの z 軸となす角であり、 ϕ はその点を $x-y$ 面に射影したときの $x-y$ 軸となす角を表す。具体的な数値は、ビー玉の位置の印を付けた透明な半球を、 θ と ϕ を読み取ることのできる結晶儀に被せて読み取った（図5）。この値をもとに、ビー玉に見立てたそれぞれの星の初速度は、それぞれの θ と ϕ のデータを用いて

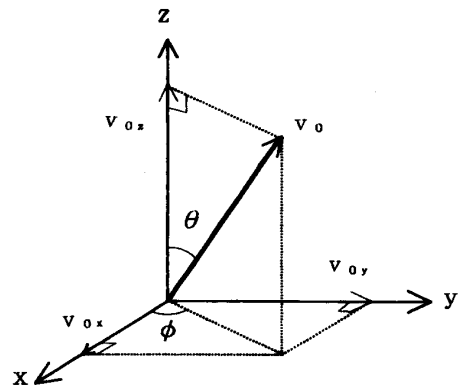


図6 極座標による初速度の成分表現

$$\begin{aligned}
 v_{0x} &= v_0 \sin \theta \cos \phi \\
 v_{0y} &= v_0 \sin \theta \sin \phi \\
 v_{0z} &= v_0 \cos \theta
 \end{aligned} \tag{13}$$

で決定した(図6)。

5. 星の燃焼速度の違いによる開花半径

今回は、BASIC言語⁶⁾を用いてこれらの計算とグラフィックスを描かせてみた。図7から図10に、a)～d)の場合の花火の開花の様子を示した。前の報告の場合に比べて、星の燃焼を考慮すると、開花直径(盆)が小さくなっている。さらに、これらの図から、a), b), c), d)の順に開花直径が小さくなっていることがわかる。また、これから同じ時間花火が開花しても、星が始め速く後でゆっくり燃焼する方が、始めゆっくり後で速く燃焼するより開花直径は小さくなることが読み取れる。これは(9)～(11)式の右辺の項から、星に働く空気抵抗が、星が速く小さくなればなるほど減速効果が大きく効いてくることから予想できることである。このときの基本BASICプログラムを付録に示しておいた。

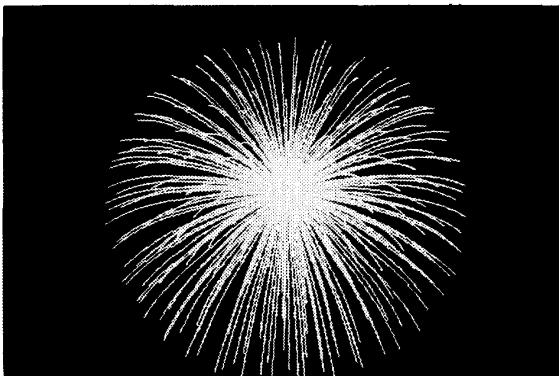


図7 $r = r_0$ の場合

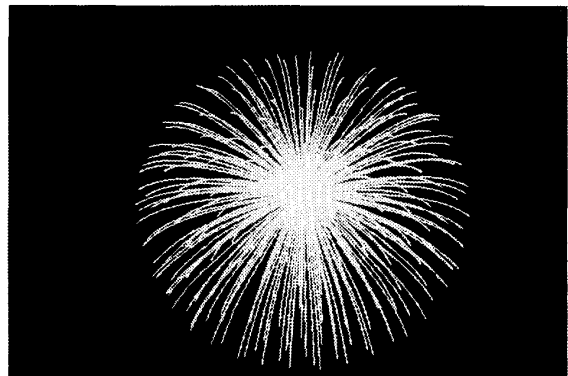


図8 $r = r_0(1 - 0.5t)^{1/2}$ の場合

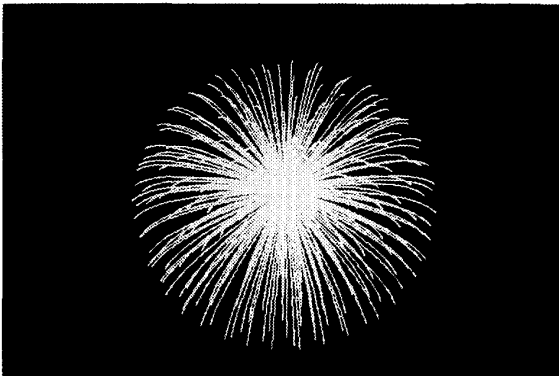


図9 $r = r_0(1 - 0.5t)$ の場合

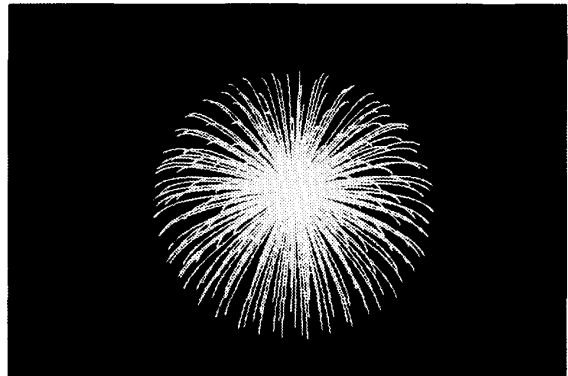


図10 $r = r_0 \exp(-t)$ の場合

6. 星の大きさの違いによる開花半径

花火の本によると、花火の運動は、星の大小によって、次のような違いがあることが知られている¹⁾。星が大きくて燃焼速度も大きいときは、遠方に到達して開花半径が大きくなり、運動的に見える。他方、星が小さくて、燃焼速度が小さいと最初だけ急速に広がるが、後はほとんど広がらないように見える。これらは、それぞれ、運動型と静止型と呼ばれている。これらの運動の特徴を、表すことができるかどうかを明らかにするために、星の半径の大小の例として、それぞれ、1 cmと0.4cmとして、計算を行った。比較のため、どちらの花火も開花の時間は2秒、初速度を120m/secとした。両方の花火の時間的な広がりが分かりやすいように、まず、二次元の花火を描かせ、1/2秒、1秒、3/2秒ごとの星の位置に小さな丸を付けた(図12, 図13)。これらの図から、大きい星の場合は、開花半径が大きくなり、小さい星の場合は、2秒後の星の広がりの方に対する1/2秒後の星の広がりの方の大きさの割合が、大きい星の場合より大きい事がわかり、確かに運動型と静止型の違いを表していることが分かる。これを3次元表示で描かせた運動型割物と静止型割物花火を、それぞれ、図14と図15に描かせた。ここで、星の減少はc)の場合とした。

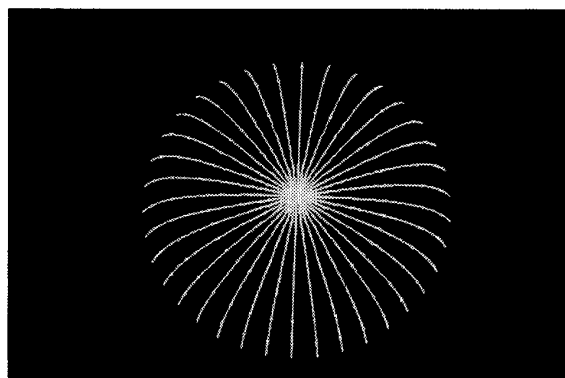


図11 2次元表示による運動型花火

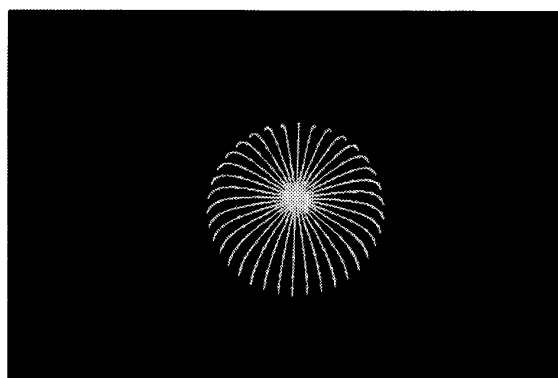


図12 2次元表示による静止型花火

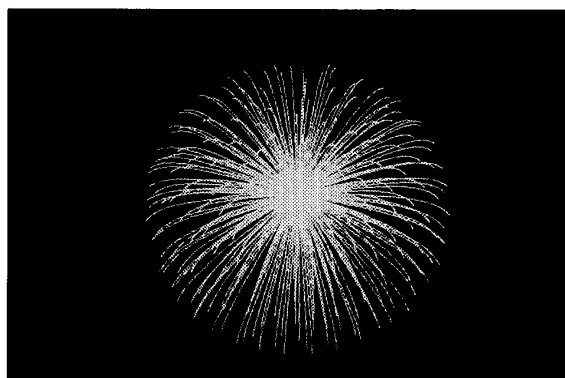


図13 3次元表示による運動型花火



図14 3次元表示による静止型花火

7 おわりに

以上の結果から、星の燃焼による質量の減少と星の半径の違いを考慮することにより、このときの運動方程式を数値計算により実際の花火の運動の様子をかなりよく表現できるようになった。これを要約すると、(a)星の燃焼による質量の減少は、同じ時間で燃え尽きる星の場合、始め速く燃えて後でゆっくり燃焼するほうが、始めゆっくり燃えて後で速く燃える方より、花火の開花直径が小さくなることと、(b)星の半径が大きい方が、小さい半径の花火に比べ開花半径が大きくなり、最後まで動きがある運動型となり、小さい星は、開花半径が小さく、後半に動きの無い静止型となることがわかった。

さらにこれらの応用とし、風による花火の開花の影響や千輪花火などの運動の様子も力学の問題として描くことができたが、つぎの機会に報告したい。

付録 プログラム

```
100 ' HANABI      1999.2.11
110 '
120     SCREEN 3,0
130     WIDTH 80,25
140     CONSOLE 0,25,0,1
150     CLS 3
160 '
170     PI=3.14159
180     G=9.8
190     DT= .02
200     V=100
210     R0=.01
220     ALFA1=1/2      :ALFA2=1
230     MITUDO=1000
235     COL=2
240 '
250     WINDOW(-120,-68)-(120,82)
260 '
270     READ A,B
280     WHILE A<>-999
290     TH=5*A      :FI=B
300         VZ = V*COS(PI*TH/180)
310         VX = V*SIN(PI*TH/180)*COS(PI*FI/180)
320         VY = V*SIN(PI*TH/180)*SIN(PI*FI/180)
330         X  =0
340         Y  =0
350         Z  =0
360     FOR C= 0 TO 99
370         T=C*DT
380         K1=PI*1.2/4
383         K2=4*PI*MITUDO*R0/3
385         K2=4*PI*MITUDO*R0*SQR(1-ALFA1*T)/3
387         K2=4*PI*MITUDO*R0*(1-ALFA1*T)/3
390         K2=4*PI*MITUDO*R0*EXP(-ALFA2*T)/3
400         K=K1/K2
410     IF C=0 THEN PSET(X,-Y),COL ELSE LINE-(X,-Y),COL
420         X=X+VX*DT
430         Y=Y+VY*DT
440         Z=Z+VZ*DT
```

```

450      AX=  -K*SQR(VX*VX+VY*VY+VZ*VZ)*VX
460      AY=-G-K*SQR(VX*VX+VY*VY+VZ*VZ)*VY
470      AZ=  -K*SQR(VX*VX+VY*VY+VZ*VZ)*VZ
480      VX=VX+AX*DT
490      VY=VY+AY*DT
500      VZ=VZ+AZ*DT
510  NEXT  C
520      READ A,B
530      WEND
540  END
550  '
560 DATA 0.7,62, 1.4,-145, 1.5,-60, 2.1, 2,148
570 DATA 2.5,96, 2.7,43, 3.3,-172, 3.3,-108, 3.5,-34
580 DATA 3.8,131, 4,-135, 4,-70, 4.2,19, 4.2,73
590 DATA 4.2,-10, 4.5,158, 4.7,46, 4.8,102, 5,-118
600 DATA 5,-91, 5.3,-158, 5.5,-55, 5.5,-30, 5.7,6
610 DATA 5.8,123, 5.8,141, 5.9,26, 6,-179, 6,-140
620 DATA 6,-75, 6.1,84, 6.2,64, 6.2,-12, 6.7,109
630 DATA 6.8,47, 6.8,167, 7,-90, 7.2,-116, 7.4,-153
640 DATA 7.5,-129, 7.5,-47, 7.5,-27, 7.8,-166, 7.8,-65
650 DATA 7.9,17, 7.9,33, 7.9,75, 7.9,134, 8,4
660 DATA 8,150, 8,-180, 8.1,114, 8.3,57, 8.3,92
670 DATA 8.4,-13, 8.5,-78, 9,-100, 9.2,-164, 9.2,-137
680 DATA 9.3,44, 9.3,106, 9.5,-114, 9.5,-50, 9.6,-67
690 DATA 9.7,24, 9.7,168, 9.8,125, 9.8,-36, 9.9,7
700 DATA 10,72, 10,86, 10,142, 10,-175, 10,-89
710 DATA 10,-20, 10,-5, 10.2,154, 10.5,113, 10.5,-150
720 DATA 10.5,-127, 10.6,52, 10.6,36, 11,-125, 11,-105
730 DATA 11,-80, 11,-44, 11.1,175, 11.2,-58, 11.5,15
740 DATA 11.5,-139, 11.8,135, 11.5,-74, 11.8,-95, 11.9,162
750 DATA 12,-1, 12,48, 12,66, 12,107, 12,-160
760 DATA 12,119, 12,-68, 12,-28, 12,-15, 12.1,27
770 DATA 12.1,152, 12.2,76, 12.5,-152, 12.5,-130, 12.8,-87
780 DATA 12.9,88, 13,37, 13,178, 13,-107, 13,-52
790 DATA 13,-42, 13,-23, 13.1,115, 13.2,53, 13.4,157
800 DATA 13.5,9, 13.5,-138, 13.5,-7, 14,22, 14,69
810 DATA 14,144, 14,173, 14,-170, 14,-161, 14,-97
820 DATA 14,-75, 14,-63, 14.1,98, 14.2,48, 14.2,-120
830 DATA 14.3,82, 14.4,127, 14.5,-32, 14.6,-147, 14.8,29
840 DATA 14.8,-148, 14.8,-84, 14.9,147, 15,-3, 15,104
850 DATA 15,-155, 15,-133, 15,-110, 15,42, 15,-18
860 DATA 15.1,94, 15.2,121, 15.2,179, 15.2,-53, 15.3,11
870 DATA 15.3,55, 15.5,-168, 15.6,160, 15.8,39, 15.9,67
880 DATA 16,21, 16,-93, 16,-72, 16,-25, 16,-9
890 DATA 16.2,100, 16.2,137, 16.2,171, 16.2,-156, 16.2,-142
900 DATA 16.2,-123, 16.2,-103, 16.2,-62, 16.3,78, 16.5,-176
910 DATA 16.7,-39, 16.8,2, 16.8,129, 16.9,51, 17,89
920 DATA 17,146, 17,156, 17,-132, 17,-82, 17,-48
930 DATA 17,-17, 17.1,59, 17.2,13, 17.2,31, 17.2,163
940 DATA 17.2,-112, 17.3,117, 17.4,111, 17.5,40, 17.5,165
950 DATA 17.8,177, 17.9,80, 17.9,139, -999,0

```


参考文献

- 1) 清水武夫：花火の話（河出書房新社，1976）
- 2) 福山豊・大原里絵・菅野優美：長崎大学教育学部教科教育学研究報告 第31号（1998）13
- 3) 藤原邦男：物理学序論としての力学（東京大学出版，1984）
- 4) A. P. フレンチ(橘高知義監訳)：MIT物理 力学（培風館，1983）
- 5) 例えば，三井田惇郎，荒井秀一：数値計算法（森北出版，1991）
- 6) 例えば，河西朝雄：入門ソフトウェアシリーズ3 BASIC（ナツメ社，1991）