経営と経済　第95巻 第３・４号　2016年３月

《研究ノート》

コミットメントゲームと Deletion

村　田　省　三

Abstract

In this paper, we consider two rounds deletion of action commitment games in Hamilton & Slutsky (1990). Especially, we consider the property that strategies remain undominated after two rounds of deletions for each player, reconsidering to Theorem 8 of Hamilton & Slutsky (1990). This is my last baw to the extended game with action commitment.

Keywords: commitment game, deletion

1 はじめに

各プレイヤーが選択しうる戦略が戦略値に限定される場合には，極値条件によるゲーム均衡の特定が可能だが，Wait 戦略を選択できる場合には，極値条件は必ずしも有効な手法にならない。Hamilton and Slutsky (1990)（以下，HS (1990) と略記)）は，この問題に対して，同時手番ナッシュ均衡点と２つのシュタッケルベルグ均衡点によって区分される矩形領域以外は，選択されないことを（証明なしで）示唆している。Pastine and Pastine (2004)（以下，PP (2004) と略記する）の研究では，実質的に２次の利得関数をもつ価格戦略ゲームにおいて，結果的に，HS (1990) の示唆が正しいことを確認している。

この矩形領域は，HS (1990) において示唆された２ラウンドの deletion によって得られることになっているが，そもそも deletion とは何であるかは示されていない。この研究ノートでは，HS (1990) で意図されている２ラウンドの deletion そのものを示したうえで，その意義と限界を考察したいと思う。

2 アクションコミットメントゲーム

このゲームは，2プレイヤーによる2期間ゲームである。各プレイヤーは，第1期において，戦略値をコミットするか，あるいはWaitを選択する。この選択は，両方のプレイヤーによって同時におこなわれる。第1期において，両方のプレイヤーがコミットメント戦略を選択すれば，ゲームは第1期で終了して利得が確定する。第1期において，一方のプレイヤーがコミットメント戦略を選択し，他方がWait戦略を選択すれば，Wait戦略を選択したプレイヤーが第2期において最適反応を実施することにより，ゲームが終了する。第1期において，両方のプレイヤーがWait戦略を選択したばあいは，第2期にはWait戦略を選択できないから，戦略値を選択して，ゲームは終了する。最終期である第2期にはWait戦略は選択できないためである。

ここで，基本複占ゲームにおけるプレイヤーA，Bの利潤関数は，$\pi_A(P_A, P_B)$，$\pi_B(P_A, P_B)$であり，(P_A, P_B)は，各プレイヤーの戦略コミットメント値とする。P_A^C，P_B^Cは，同時手番ナッシュ均衡に対応する戦略コミットメント値とする。P_A^Lは，$\pi_A(P_A, R_B(P_A))$を最大にする戦略コミットメント値，対応の後手戦略値をP_A^Fとする。同様に，P_B^Lは，$\pi_B(R_A(P_B), P_B)$を最大にする戦略コミットメント値，対応の後手戦略値をP_B^Fとする。これらはシュタッケルベルグ均衡点である。$R_A(*), R_B(*)$は各プレイヤーの最適反応関数である。なお，(P_A, P_B)の定義域$X(\subset R_+^2)$において，以下，基本ゲームの同時手番均衡（第1期）と2つのシュタッケルベルグ均衡は，定義域$X(\subset R_+^2)$において，純戦略で一意に存在すること，および，それらが相互に異なるものと仮定する。

3 混合戦略均衡の存在範囲 ーdeletionー

どちらのプレイヤーも，ゲームの定義域内であるような任意の値をコミッ

トメント値とすることができる。しかし，他の戦略値によって，あるいは Wait 戦略によって支配されるような戦略は選択されない。最適反応曲線の交点である同時手番ナッシュ均衡点 (P_A^C, P_B^C)，プレイヤー A 先手のシュタッケルベルグ点 $(P_A^L, R_B(P_A^L))$ およびプレイヤー B 先手のシュタッケルベルグ点 $(R_A(P_B^L), P_B^L)$ の 3 点を頂点とするような矩形領域の外部は，そのような選択されないコミットメント値からなる領域になるというのが HS (1990) の主張である。そこでは，ある戦略によって支配される領域を，2 ラウンドの deletion によって特定可能であるという。ただし，結果のみの記述があるのであって，何らの具体的な証明も与えられていない。本稿では，この 2 ラウンドの deletion がどのようなものであるかを示したいと思う。

（1）第 1 段階の deletion

同時手番ナッシュ均衡点を通過するプレイヤー A の等利潤線と，相手プレイヤー B の最適反応曲線との交点を (x_A^*, y_A^*) とする。プレイヤー A が戦略値をコミットするものとした場合，そのコミットメント値が x_A^* より大きいことはありえない。以下にその理由を示す。仮に，相手プレイヤーが特定のコミットメント値を選択しているものとすると，プレイヤー A にとっては Wait 戦略を選択することが常に有利である。最適反応戦略をとることが可能となるからである。もちろん，ある特定のコミットメント値については，たまたま，当初に選択されていたコミットメント値と，Wait 戦略を選択後にとられる最適反応戦略としてのコミットメント値が等しくなる可能性は否定できないが，いずれにしても，このような場合，プレイヤー A にとって Wait 戦略によって弱支配されることは確実である。また，仮に，相手プレイヤー B が Wait 戦略を選択しているものとしても，プレイヤー A のコミットメント値が x_A^* より大きいことはありえない。相手プレイヤー B が Wait 戦略を選択している場合，プレイヤー A のコミットメント値が何であれ，ゲーム結果はプレイヤー B の最適反応曲線上に出現するから，プレイヤー A にとって同時手番ナッシュ均衡利得 $\pi_A(P_A^C, P_B^C)$ 以下の利得になる

ようなコミットメント値（x_A^* より大きいコミットメント値）を選択する理由がない。このとき，プレイヤー A は Wait 戦略を選択することにより，同時手番ナッシュ均衡利得 $\pi_A\,(P_A^C, P_B^C)$ を実現することができる。したがって，プレイヤー A にとっては Wait 戦略を選択して同時手番ナッシュ均衡利得 $\pi_A\,(P_A^C, P_B^C)$ を確保することが常に有利である。結局，相手プレイヤー B の戦略が何らかのコミットメント値であろうが Wait 戦略であろうが，そのいずれであるかに無関係に，プレイヤー A にとっては，x_A^* より大きいコミットメント値を選択する戦略より，Wait 戦略が有利である。同様の論法により，同時手番ナッシュ均衡点を通過するプレイヤー B の等利潤線と，相手プレイヤー A の最適反応曲線との交点を (x_B^*, y_B^*) とするとき，プレイヤー B が，y_B^* より大きいコミットメント値を選択することもない。この結果，コミットメント値がとりうる範囲は，最適反応曲線の交点と，(x_A^*, y_A^*) および (x_B^*, y_B^*) の 3 点を頂点とする矩形領域内でなければならないことが分かる。ここでいう矩形領域にコミットメント値を限定できることを，HS (1990) は，第 1 ラウンドの deletion と考えているように思われる。

なお，同時手番ナッシュ均衡点を通過するプレイヤー A の等利潤線と，相手プレイヤー B の最適反応曲線との交点の存在については，等利潤線の狭義凸性を仮定すれば，ここでいう交点の存在は確実である。いうまでもなく，2 次の利潤関数を仮定するときにも必ず交点は存在する。等利潤線の凸性も仮定しない場合には，やや複雑な議論が必要となるが，基本ゲームの同時手番均衡（第 1 期）と 2 つのシュタッケルベルグ均衡は，定義域 $X(\subset R_+^2)$ において，純戦略で一意に存在すること，および，それらが相互に異なるものとする，という基本ゲームの前提から，同時手番均衡点から相手プレイヤーの最適反応曲線上シュタッケルベルグ点までの間では利潤の単調増が確実である。また，シュタッケルベルグ点以降における利潤減も起こらなければならないことも自明である。ただし，その減少が単調がどうかについて確定することはできない。

（2）第2段階の deletion

第1段階の deletion によって，均衡戦略としてのコミットメント値がとりうる範囲は，最適反応曲線の交点と，(x_A^*, y_A^*) および (x_B^*, y_B^*) の3点を頂点とする矩形領域内（本節では，これを第1矩形領域ということにする）でなければならないが，この第1矩形領域内においても，相手プレイヤーの戦略値に関わらず，常に，自己の最適反応曲線により近いコミットメント値が有利である。この有利性は，ここでいう第1矩形領域内（すなわち，第1段階の deletion の後）であれば，例えばプレイヤー A にとっては，プレイヤー A 先手のシュタッケルベルグ点 $(P_A^L, R_B(P_A^L))$ におけるプレイヤー A のコミットメント戦略値までのコミットメント戦略値について，何らの追加的条件を仮定することなく成立する。その結果，第2段階の deletion によって，均衡戦略としてのコミットメント値がとりうる範囲は，最適反応曲線の交点である同時手番ナッシュ均衡点 (P_A^C, P_B^C) と，プレイヤー A 先手のシュタッケルベルグ点 $(P_A^L, R_B(P_A^L))$ およびプレイヤー B 先手のシュタッケルベルグ点は，$(R_A(P_B^L), P_B^L)$ の3点を頂点とする矩形領域内（本節では，これを第2矩形領域ということにする）でなければならない。このことを以下に示す。

第1矩形領域内においても，相手プレイヤーの戦略値に関わらず，常に，自己の最適反応曲線により近いコミットメント値が有利であることは，戦略値をコミットする状況に限定すれば，明らかである。ところが，Wait 戦略をも含めて考えるときには，実際に，自己の最適反応曲線上の点を選択することが有利であるとはいえない。相手プレイヤーが Wait 戦略に変更したときの有利性を確認できないからである。例えば，プレイヤー A にとっては，プレイヤー A 先手のシュタッケルベルグ点 $(P_A^L, R_B(P_A^L))$ に対応するコミットメント値 P_A^L と，第1矩形領域内ではあるが第2矩形領域内にはないようなコミットメント値を比較すると，確かにコミットメント値 P_A^L のほうが有利であることは分かる。戦略値をコミットするときの有利性はただちに明らかであるが，Wait 戦略への変更があったときでも相手（プレイヤー B）最

適反応曲線上の利得比較によっても有利性が確認できるからである。プレイヤー A にとっては，プレイヤー A 先手のシュタッケルベルグ点における利得は，相手プレイヤー B の最適反応曲線上では，最大となるからである。ところが，プレイヤー A にとって，このような有利性は，第 2 矩形領域の内点値となるようなコミットメント値について確認することができない。相手プレイヤー B が Wait 戦略に変更するとき，プレイヤー A にとっての利得水準は，プレイヤー A 先手のシュタッケルベルグ点における利得を下回り，プレイヤー A 先手のシュタッケルベルグ点 $(P_A^L, R_B(P_A^L))$ に対応するコミットメント値 P_A^L と比較して絶対有利とはいえなくなるからである。したがって，プレイヤー A にとって，プレイヤー A 先手のシュタッケルベルグ点を越えるような，プレイヤー A の最適反応曲線により近いコミットメント戦略値を含むことは，HS (1990) によって考案されていると思われる第 2 ラウンドの deletion の結果としては得られない。

ここで，問題となるのは，自己の最適反応曲線により近いコミットメント値が有利であるとして，シュタッケルベルグ点における戦略値まで deletion を進めていくとき，相手プレイヤー先手のシュタッケルベルグ点を排除してしまうことが起こりうるのではないかという懸念である。一方のプレイヤーにとって有利性がないという理由で，他方のプレイヤーが選択するかもしれない戦略値を排除してしまう懸念である。これまでによく知られた数量戦略複占モデルや価格戦略複占モデルの数値化モデルにたいして，本稿で示したような方法で 2 ラウンドの deletion を適用すると，結果的には，予想される矩形領域が支配されない戦略値の集合として残される。すなわち，HS (1990) による 2 ラウンドの deletion という手法に問題はないようにも思われる。ところが，かなり特殊な数値設定によってではあるが，このことが起こりうる数値モデルを意図的に作ることはできる。以下に，反例モデルとして，具体的な数値モデルを提示する。

（**反例モデル**）基本ゲームの利潤関数π_A，π_Bが，以下のようであるとき，アクションコミットメントゲームモデル（反例モデル）に関する２回の deletion をおこなうと，結果的に，一方のシュタッケルベルグ点を消滅させてしまうことが起こりうる。

$$\pi_A=(10-5P_A+P_B)P_A \tag{1}$$
$$\pi_B=(20-\frac{1}{2}P_B+P_A)\,P_B \tag{2}$$

このとき，最適反応曲線は，

$$\frac{\partial\pi_A}{\partial P_A}=10P_A-10$$

$$\frac{\partial\pi_B}{\partial yP_B}=P_A+20$$

となり，以下の図が得られる。

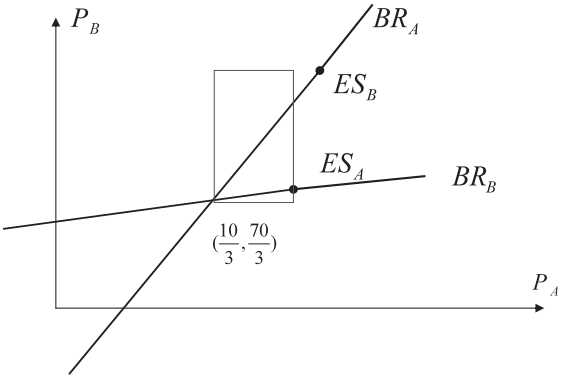


図１：１回目の Deletion **をめぐる反例**

このゲームでは，第１ラウンドの deletion をプレイヤー A 側から開始すると，一方のシュタッケルベルグ均衡点が delete される。すなわち，戦略値として実現されることが排除される。１ラウンドの deletion をプレイヤー

B 側から開始すると，一方のシュタッケルベルグ均衡点が delete されることはない。したがって，選択される可能性がある戦略値として排除されることはない。

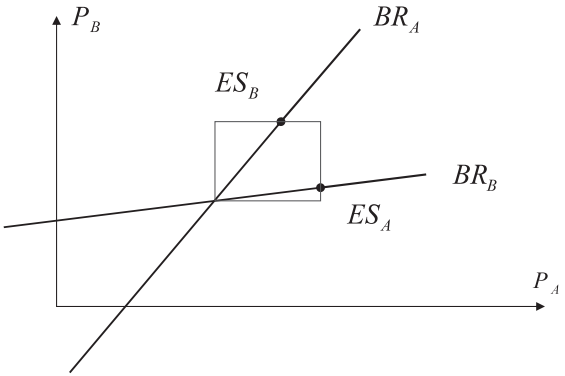


図 2 ：Hamilton and Slutsky (1990) の想定した状況

4 考 察

すでに明らかなように，HS (1990) による 2 ラウンドの deletion は，コミットメントゲームの均衡がどの領域内に出現するか，特に，真正な混合戦略ナッシュ均衡がどこに出現するかを考察するのに役立つと期待されるものである。ところが，先行研究で，deletion を直接に分析したものは少ない。わずかに，最適反応曲線が共に右上がりの価格戦略複占ゲームに特化したコミットメントゲームの考察をおこなっている PP (2004) が，その補論において，彼らのモデルにおいて，HS (1990) による 2 ラウンドの deletion 結果と同一の結論が得られるというコメントを与えているのみである。ただし，このコメントは，HS (1990) による 2 ラウンドの deletion を実際におこなったことによるのではなく，別の解析によって出現する領域が，HS (1990) による 2 ラウンドの deletion 結果と同一になるという主張である。一方，村田

省三・橋口真理子(2010) では，混合戦略均衡をもたらすコミットメント値が，同時手番ナッシュ均衡利得に対するパレート優位領域には存在しないことを主張しているが，そこでは，逸脱可能性をことごとく検討するという PP (2004) の分析方法が採用されている。また，村田省三(2010) は，HS (1990) による２ラウンドの deletion 法によらず，２次の利潤関数の場合に特定化するときには，直接に，真正な混合戦略ナッシュ均衡の非存在を証明している。そこでは，２ラウンドの deletion 後に残される領域内には真正な混合戦略ナッシュ均衡の非存在であることを証明している。

また，deletion 論法に関する若干の示唆を脚注で与えた後に示される，HS (1990) 定理８の証明には，deletion 論法に直接には依拠していない。ただし，定理８証明は，この deletion 法と極めて密接に関連する論法によっていて，それに基づいて，同時手番ナッシュ均衡点が真正な混合戦略均衡点になりえないことを論証しているとも考えられる。事実上，これらが deletion に関する研究のすべてである。そして，それ以降，コミットメントゲームの戦略に関するこの種の分析は出現していない。

5　おわりに

コミットメントゲームは，wait 戦略を含んでいるから，数理解析的ないしは計算的手法に接続させることが難しい。このことは，通常の解析的利潤関数を想定するゲームモデルに特徴的な明晰な数量解析的結果をもたらしにくい。すなわち，wait 戦略の導入によって，それを導入しないときと比較して均衡点がどの程度まで移動するかというタイプの比較静学分析に接続させることが困難である。もちろん，Wait 戦略そのものは微分不可能である。あるいは，このことがゲーム理論家にとって，魅力を感じさせない要素となっているのかもしれない。ゲーム理論のわが国への導入からすると半世紀程度を経過するが, 経済学者によるゲーム理論の登場からは30年ばかりであり，

さらに，標準的な経済分析に登場するようになってからという観点からすると，20年をわずかに超えるにすぎない。しかし，この分野の研究進展は急速であり，現在ではゲーム理論導入初期に活性化していた未解決の理論的問題の解明という（今から思えば）基礎的な研究よりも，２人ゲームを基本ゲームとする２回程度の動学化により，直截的な解析結果を得ようとする具体的研究が席巻する局面を迎えている。これまでの経過を知る立場からは，この研究ノートに記したような内容も，依然として残されているゲーム論上の問題のひとつとして意識されてもよいとも思う。本研究ノートは，そのような態度を背景に持っているため，本稿の記述スタイルにもまた，幾許かの未整理な要素が散見されるであろうことを認めなければならない。

参 考 文 献

[1] Amir,.R.(1995).“ Endogenous Timing Two-Player Games: A Counter Example, ” *Games and Economic Behavior*. **9**. 234-237.

[2] Hamilton,J., and S,Slutsky.(1990).“ Endogenious Timing in Duopoly Games: Stackelberg or Cournot Equilibria, ” *Games and Economic Behavior*. **2**. 29-46.

[3] 村田省三・橋口真理子(2010).「Hamilton & Slutsky (1990) 定理７の構造」『長崎大学経済学部研究年報』. **26**. 49-54.

[4] 村田省三(2010).「安定均衡と２次多項式」『経営と経済』. **90**. 329-336.

[5] Pastine,I., and E,Pastine.(2004).“ Cost of Delay and Endogeneous Price Leadership, ” *International Journal of Industorial Organization*. **22**. 135-145.