

夏 秋 義 広*

高 橋 和 雄**

小 西 保 則***

1. まえがき

ブランコをこぐ子供を見ていると、ブランコの往復の間に、ひざを曲げたり伸ばしたりしながら、振れを大きくしている。どうして重心の上下によって、ブランコの振れが大きくなるのであろうか。同じようなことは、構造物においても見受けられる。柱や平板に周期的変動軸力や面内力が作用すると、曲げ振動や面外振動が生ずることがある。ここにおいても、荷重の作用方向と異なる方向の振動が生じているわけである。一般に、静荷重によって静的不安定現象（座屈）が生ずる構造部材では、同じ作用方向の変動荷重により、異なる方向への振動が生ずることがある。これは、ケーブルやネットなどの引張部材にも見受けられる現象である。さらには、機械振動、流体関連振動など広く工学、物理の分野に存在する。

このような現象は、力学的には係数（パラメーター）励振振動（parametric vibration）、パラメトリック共振（parametric resonance）、あるいは静的不安定に対して動的不安定（dynamic instability）と呼ばれる。この現象を解析することを、動的安定解析および動的安定性（dynamic stability）という。

この問題の運動方程式をみると、いずれも運動方程式の係数項に周期項が含まれる係数励振振動型の微分方程式となっている。この微分方程式は、あるパラメーターの組合せのもとで、発散する性質をもっている。発散振動の解をもつ場合に、系に有意な振動が生ずることになる。係数励振振動は、工学的には一種の共振振動として位置付けられている。しかしながら、係数励振振動が通常の強制振動と異なる点は、いわゆる共振点以外でも振動すること、荷重の作用方向とは異なった方向の振動が生ずることである。これらは、分岐型の振動であることを示しているといえよう。

構造物を設計する場合、静的不安定現象（座屈）に対して安全なように配慮されている。しかし、荷重が周期的に変化する場合、係数励振振動によって、座屈荷重よりもはるかに小さい荷重振幅によって振動が起こりうる。また、ケーブル系構造物では、風の作用のもとに、幾何学的非線形項をかいして、同じようなメカニズムによる振動が顕著に生ずる。このタイプの振動は、構造部材の疲労や騒音の原因となりかねない。土木構造

物においても、スパンの長大化、軽量化、溶接構造の採用とともなう減衰の減少などによって、剛性が小さく振動しやすい構造形式が増えているので、このような観点からの研究も必要と思われる。

「構造物の動的安定性」、この言葉は、わが国においては、比較的新しい用語である。われわれがこの用語を知ったのは、ソビエト科学アカデミーの天才科学者Bolotin教授による3部作の1冊目の著書「弾性系の動的安定性¹⁾」の和訳²⁾が1972年（昭和47年）に出版されてからであろう。この本は、Bolotin教授の26才のときの研究をまとめたもので、彼の学位論文でもある。1956年にロシア語版が出版されると、中国語版1960年、ドイツ語版1961年、アメリカ版1964年と、当時としては異例の早さで各国語に翻訳され、多くの科学者をひきつけた。ボローチン旋風という言葉が残っているほどである。未完成の学問領域を体系化したこの本は、荒けずりながらも示唆に富み、われわれに多くのヒントを与えた。当然ながら、動的安定性を扱う場合には、Bolotinの影響が大きい。

係数励振振動系の支配方程式は、周期係数をもつMathieu-Hillの方程式で記述される。この方程式の一般解の形は、古くから知られているにもかかわらず、いまだに厳密解が得られていない。この事実が問題を複雑にしているようである。解を求めるにあたって、近似を導入する過程で、本質を見失う結果も起こりうる。このようなことが、不幸にして、Bolotinが近似を導入する場合に生じた。すなわち、Bolotinの方法では、係数励振振動のうち、単一の固有振動形をもつ単純共振しか得られない。もう一つの、複数の固有振動形の組合せから成る結合共振が見落とされている。このため、結合共振が卓越する問題であるにもかかわらず、現在でもBolotinの方法だけを用いて単純共振のみを求めている場合が見受けられるようである。

この20年間に於いて、応用力学の分野に最も大きな影響を与えたできごとは、電子計算機の発達・普及であろう。これによって、われわれは、これまでの解析解法に加えて有限要素法、差分法をはじめとする数値解法を手に入れた。Bolotinの時代とは異なる現在において、動的安定性問題に数値解法を導入することは、自然の流れといえよう。

以上の観点から、著者らは1976年に動的安定性の新しい解法を提案し³⁾、1982年にこれを一般化している⁴⁾。外国雑誌に投稿した著者らの論文の査読に対するレフリーのコメントにこうい

*技術開発室、課長（長崎大学大学院海洋生産科学研究科在学中）

**工博、長崎大学土木工学科、助教授

***工博、長崎大学土木工学科、教授

うのがあった。「In those days computers used 'values', この言葉は次のように理解するとわかりやすい。「かつては、現象を記述する運動方程式が得られても、それを解く手段がなかったために、解析が不可能であった。しかし、現在では計算機の利用を前提として、解析法を考えることができる。まさに、計算機のおかげである。」この言葉は、われわれにとって耳の痛い言葉であるが、一面においては事実であろう。最近の応用力学におけるカオスのブームは、まさにその典型的な例といえよう。

以上のような背景をもつ動的安定性問題は、土木技術者になじみが少ないようである。そこで、本論文では、「構造物の動的安定性」の性質、アプローチ法および橋梁構造物への応用を、なるべく基礎にさかのぼって述べるものである。

2. 動的安定性とは

2.1 振り子の支点を上下に動かしたら…?

図-1に示すような長さ l 、質量 m の質点からなる単振子が、支点Oで $y=e\sin\Omega t$ の周期的鉛直変位を受ける場合を考えよう⁵⁾。ここに、 e 、 Ω はそれぞれ周期的変位の振幅と円振動数である。

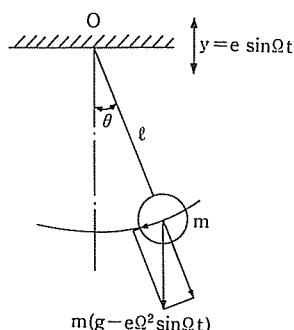


図-1 支点が上下する単振子

支点変位 y による鉛直方向の加速度が $d^2y/dt^2 = -e\Omega^2\sin\Omega t$ であることを考慮すると、単振子の運動方程式は角変位 θ を基準座標として、D'Alembertの原理より

$$-m \frac{d^2(l\theta)}{dt^2} - m(g - e\Omega^2\sin\Omega t)\sin\theta = 0 \quad (1)$$

と表される。 θ が微小な場合には $\sin\theta \approx \theta$ とみなせるので、式(1)は

$$\ddot{\theta} + \omega^2(1 - \varepsilon\sin\Omega t)\theta = 0 \quad (2)$$

と書き改めることができる。ここに、 $\omega = \sqrt{g/l}$ は単振子の固有円振動数、 $\varepsilon = e\Omega^2/g$ は励振パラメータである。また、 \cdot は時間に関する微分を示す。

式(2)は周期係数を有する2階の同次線形微分方程式であり、その解は ε と Ω を適当に選ぶと発散する場合がある。いま、式(2)を

$$\ddot{\theta} + \omega^2\theta = \varepsilon\omega^2\sin(\Omega t)\theta \quad (3)$$

と変形すると、式(3)の右辺は振子に作用する単位質量あたりの外力とみなすことができる。 ε が微小なときには、式(3)の第一近似解は $\theta = a\sin\omega t$ と与えられるので、周期変位の円振動数 Ω が振子の固有円振動数 ω の2倍($\Omega = 2\omega$)の場合には、時間 dt の間に系に加えられる仕事は

$$dW = \varepsilon\omega^2\sin(\Omega t)\theta \frac{d\theta}{dt} dt = \frac{1}{2}\varepsilon\omega^3a^2\sin^2(2\omega t)dt \quad (4)$$

となる。式(4)により $dW \geq 0$ であるため、振子には常にエネルギーが供給され、振幅は増大しつづける。

2.2 ブランコはなぜこげる?

ブランコをこぐ問題も実は係数励振振動系の運動で説明できる⁶⁾。図-2(a)に示すように、人間が立ってブランコをこぐとき、ブランコと人間の合計質量の中心は図-2(b)に示すような変化をしている。この場合、時間とともに変化するものは単振子の長さ l である。 $l(t) = l_0(1 + e\sin\Omega t)$ とおくと、ブランコの運動方程式は、 $\omega = \sqrt{g/l_0}$ および $\varepsilon = e(1 - \Omega^2/\omega^2)$ として、式(2)と同一の形に変換できる。したがって、人間がブランコの固有振動数の2倍の振動数で身体を上下に動かすとき、系は動力学的に不安定となり、ブランコはますます振れが大きくなる。

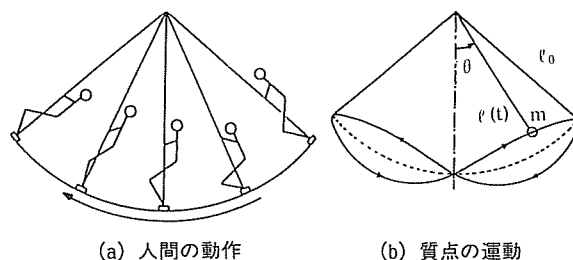


図-2 ブランコのメカニズム

式(2)はバネ定数 $k (=m\omega^2)$ が周期的に変化する系の運動方程式であるともみなせる。したがって、系の剛性や慣性力が周期的に変化する場合も係数励振振動問題となる。例えば、電車の架線は図-3(a)に示されるように、支持点と支間の中央とでパンタグラフによる押し上げ力に対し変形性能が異なる。そこで、架線とパンタグラフより構成される系を図-3(b)のようにモデル化すると、電車が一定速度 V で走行する時の架線パンタグラフ系は、バネ剛度が周期的に変化する系であるとみなせる。したがって、その運動方程式は周期係数をもつ微分方程式となる⁷⁾。

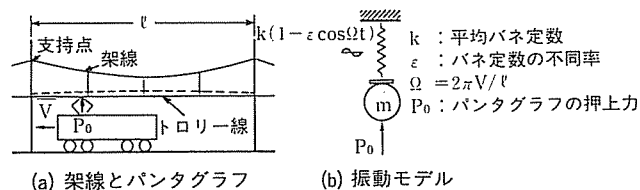


図-3 架線パンタグラフ系

2.3 係数励振振動系の支配方程式

周期係数をもつ最も簡単な同次微分方程式は、式(2)のように表され、その一般形は次のMathieuの方程式で与えられる。

$$\ddot{x} + (\delta + \varepsilon\cos 2t)x = 0 \quad (5)$$

ここに、 δ と ε はパラメータである。

この方程式は周期的な係数励振を受ける多くの系の応答を支

配する。式(5)は、 δ と ε の、ある組合せに対し安定解をもたない。図-4は式(5)の不安定領域を、 (δ, ε) 平面上で示したものである⁸⁾。図中、斜線の領域が不安定領域である。

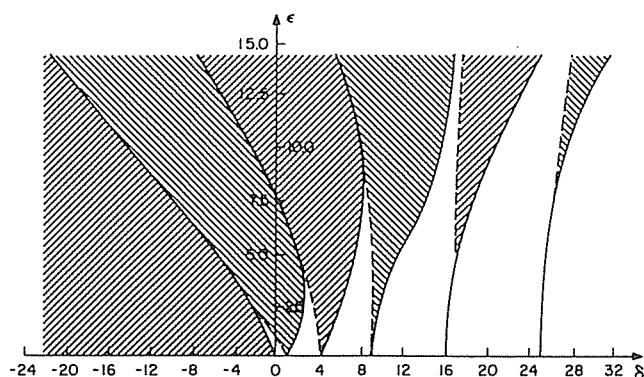


図-4 Mathieu方程式の不安定領域⁸⁾

周期的ではあるが必ずしも調和的ではない周期係数の場合には、次のHillの方程式となる。

$$\ddot{x} + p(t)x = 0 \quad (6)$$

ここに、 $p(t+T) = p(t)$ ：周期 T の周期関数。

なお、多自由度系の係数励振振動系の運動方程式は、一般に連立のMathieu-Hillの方程式に支配される。

2.4 工学に現れるさまざまな係数励振振動

工学に現われるさまざまな係数励振振動の例を表-1に示す。

表-1 工学における係数励振振動の事例

対 象	変動力の種類	現われる振動現象
メカニズム	振子 ブランコ パンタグラフ	支点の上下 重心の上下 架線の剛性 パンタグラフの振動
構造部材	柱 はり 平板 アーチ ケーブル	軸力 面内力 面内力 面内力 軸力 面外振動 面外振動 面外振動 面外振動
流体力を受けるパイプ	脈動流	たわみ振動
非線形振動の周期解	微小外乱	発散、収束による安定判別

構造部材の例としては、周期的軸力を受ける柱¹⁾や変動面内力が作用する平板⁹⁾、アーチ¹⁰⁾およびケーブル^{11), 12), 13)}などが挙げられる。一般に、静荷重によって静的不安定現象(座屈)が生じる構造部材および構造物には、同じ作用方向の特定の振動数をもつ周期的変動荷重によって動的不安定現象(係数励振振動)が起こりうる。なお、ケーブルの場合には、座屈は生じないが、同じメカニズムによって面外振動が生ずる。

液体を運ぶパイプ内では、ポンプによって引き起される非定常な流れにより脈動流となることがある。このようなパイプは、ある条件のもとで係数励振によりたわみ振動を生ずる場合がある^{14), 15)}。

非線形振動問題では、解の唯一性が成立しないために、得ら

れた解がすべて実現するとは限らない。このため、振幅の安定性を吟味する必要がある。系にわずかな擾乱を与えたとき、元の状態に戻る場合には解は安定であるけれども、遠ざかる場合には不安定である。このように、周期解に微小擾乱を与えたときの系の安定性は、変分方程式の解の安定性から判別できる。このときの多自由度系の変分方程式は連立のHillの方程式となる¹⁶⁾。

3. 動的安定性のアプローチ法の概説

3.1 一般解の性質

はりや板などの連続体の係数励振振動系の支配方程式を一般座標で表示すれば次のようになる¹⁾。

$$[C]\{\ddot{f}\} + 2[C][H]\{\dot{f}\} + ([I] - \alpha[A] - \varepsilon[B]\cos\Omega t)\{f\} = \{0\} \quad (7)$$

ここに、 $\{f\}$ ：一般座標からなる列ベクトル、 $[C] = \text{diag}(1/\omega_i^2)$ $[H] = \text{diag}(h_i)$ 、 $[A]$ ：初期応力行列、 $[B]$ ：係数励振行列、 $[I]$ ：単位行列、 α ：初期応力の大きさ、 ε ：励振力の荷重振幅、 Ω ：励振円振動数、 ω_i ：第 i 次の固有円振動数、 h_i ：第 i 次の減衰定数。

式(7)はFloquetの理論によれば、次の形の一般解をもつ。

$$\{f(t)\} = \exp(\lambda t) \cdot \{\phi(t)\} \quad (8)$$

ここに、 λ ：未定定数、 $\{\phi(t+T)\} = \{\phi(t)\}$ あるいは $\{\phi(t+2T)\} = \{\phi(t)\}$ で周期 $T (= 2\pi/\Omega)$ あるいは $2T (= 4\pi/\Omega)$ の周期関数。

式(7)の解の安定性は λ に依存する。すなわち、式(8)の λ の実数部がすべて負あるいは零ならば、 $\exp(\lambda t)$ が時間とともに収束するため解は安定であり、逆に一つでも正ならば解は発散して不安定となる。動的安定性問題における主要な目的の一つは、式(7)の解がどのような条件のときに安定解をもたないかを判定し、種々のパラメータ空間における解の不安定領域を決定することである。

3.2 動的不安定現象の種類

式(7)の系に生ずる不安定現象には、表-2に示す2種類がある。

表-2 不安定現象の種類

種 類	発生条件	時 間 波 形
単純共振	$\Omega \approx \frac{2\omega_i}{k}$	
結合共振	$\Omega \approx \frac{\omega_i \pm \omega_j}{k}$	

注 1) Ω ：励振振動数、 ω_i ：第 i 次の固有円振動数

2) $k=1, 2, 3, \dots$ ($k=1$ ：主不安定領域、 $k \geq 2$ ：副不安定領域)

単純共振(simple parametric resonance)は、励振振動数が系の固有円振動数の2倍の整数分の1付近で生じ、その応答は単一の固有振動形をもつ。振幅は時間とともに指数関数的に増大

する。一方、結合共振 (combination resonance) は多自由度系において励振振動数が2個の固有円振動数の和あるいは差の整数分の1付近で生じ、その応答は2個の固有振動形をもつ。+の場合を和形の結合共振、-の場合を差形の結合共振と呼ぶ。単純および結合共振のいずれに対しても、 $k=1$ の場合を主不安定領域 (primary unstable region) といい、 $k \geq 2$ の場合を副不安定領域 (secondary unstable region) という。

表-2の不安定振動のうち、どれが系に対して優勢であるかは式(7)の係数励振行列 [B] の要素構成によって定まる。

系に減衰が存在する場合、一般に不安定領域は狭くなるが、結合共振では減衰力の組合せによっては不安定領域が拡大する場合がある。この現象は、単純共振の場合に減衰力が常に安定化効果をもつのと対照的で、脱安定化効果と呼ばれる¹⁷⁾。

3.3 既往の解析法

係数励振振動系の不安定領域を求める手法としてはBolotinの方法¹⁾およびHsuの方法¹⁸⁾がおもに用いられている。

いま、減衰力および初期応力が存在しない系を考えると、式(7)は次のような連立のMathieuの方程式で表される。

$$[I](\ddot{f}) + ([D] - \bar{\varepsilon}[G] \cos \bar{\omega} \tau)(f) = \{0\} \quad (9)$$

ここに、 $[D] = \text{diag}(\bar{\omega}_i^2)$ 、 $[G]$: g_{ij} を要素とする正方行列、 $\bar{\omega} = \Omega/\omega_1$: 無次元励振力の振動数、 $\bar{\omega}_i = \omega_i/\omega_1$: 無次元固有円振動数、 $\bar{\varepsilon} = \varepsilon/\varepsilon_{cr}$: 無次元励振振幅、 ε_{cr} : 座屈荷重の大きさ、 $\tau = \omega_1 t$: 無次元時間。

Bolotinの方法は、Floquetの理論より安定と不安定の境界上の解が周期 $T (= 2\pi/\omega)$ あるいは $2T (= 4\pi/\omega)$ をもつ周期解であることに着目した解析法である。すなわち、主不安定領域(周期 $2T$)の境界線を求めるために、式(9)の周期解を次のようにフーリエ級数に仮定する。

$$\{f\} = \sum_k (\{a_k\} \sin \frac{k\bar{\omega}\tau}{2} + \{b_k\} \cos \frac{k\bar{\omega}\tau}{2}) \quad (10)$$

ここに、 $\{a_k\}$ 、 $\{b_k\}$: 未定定数ベクトル、 $k=1, 3, 5, \dots$ 。

式(10)を式(9)に代入し、無限項行列式からなる境界振動数式を誘導したのち、中央の行と列のまわりの数項を使って近似解を求めると、主不安定領域の境界線が次のように得られる。

$$1 - \bar{\varepsilon} \frac{g_{11}}{4\bar{\omega}_1^2} \leq \frac{\bar{\omega}}{2\bar{\omega}_1} \leq 1 + \bar{\varepsilon} \frac{g_{11}}{4\bar{\omega}_1^2} \quad (11)$$

副不安定領域の境界線(周期 T)を求めるためには、解を

$$\{f\} = \frac{\{b_0\}}{2} + \sum_k (\{a_k\} \sin \frac{k\bar{\omega}\tau}{2} + \{b_k\} \cos \frac{k\bar{\omega}\tau}{2}) \quad (12)$$

と仮定すれば、同様の方法で以下のように境界線が得られる。

ここに、 $k=2, 4, 6, \dots$ である。

$$1 - \bar{\varepsilon}^2 \frac{g_{11}^2}{4\bar{\omega}_1^4} \leq \frac{\bar{\omega}}{\bar{\omega}_1} \leq 1 \quad (13)$$

これに対して、Hsuの方法は、解を微小パラメータのべき級数で展開のうえ、解の周期性を利用して安定境界線を直接求める手法である。Hsuの方法によると、式(9)の結合共振の主不安定領域の第一近似値は次のように与えられる。

$$1 - \frac{\bar{\varepsilon}}{2(\bar{\omega}_1 \pm \bar{\omega}_j)} \sqrt{\frac{|g_{ij} g_{ji}|}{\bar{\omega}_1 \bar{\omega}_j}} \leq \frac{\bar{\omega}}{\bar{\omega}_1 \pm \bar{\omega}_j} \leq 1 + \frac{\bar{\varepsilon}}{2(\bar{\omega}_1 \pm \bar{\omega}_j)} \sqrt{\frac{|g_{ij} g_{ji}|}{\bar{\omega}_1 \bar{\omega}_j}} \quad (14)$$

ここに、複号は g_{ij} と g_{ji} が同符号の場合には+ (和形の結合共振) を取り、異符号の場合には- (差形の結合共振) を取る。

式(14)の精度は固有振動数が離れている場合にはかなり正確である。もし、固有振動数が接近している場合には、その影響を考慮しなければならない¹⁹⁾。

式(14)において、+の符号の場合には $\bar{\omega}_i = \bar{\omega}_j$ とすれば、式(11)と同じ式となり、Bolotinの式と一致する。したがって、単純共振および和形の結合共振の主不安定領域の境界線は、次のように表される。

$$1 - \bar{\varepsilon} \theta_1 \leq \frac{\bar{\omega}}{\bar{\omega}_c} \leq 1 + \bar{\varepsilon} \theta_1 \quad (15)$$

ここに、 $\bar{\omega}_c$ と θ_1 はそれぞれ主不安定領域の中心振動数および開き角である。

BolotinおよびHsuの方法は、安定境界線を求めるための実用的に優れた方法である。しかし、Bolotinの方法では結合共振は得られない。一方、Hsuの方法では単純・結合共振の副不安定領域は得られない。また、励振パラメータ ε が大きくなると適用できないなどの制約をもつ。したがって、適用する問題に対して、適宜使い分ける必要がある。さらに、これらの方法を減衰のある場合やHillの方程式に適用するには困難がともなう。式(7)を直接解く解法の開発が望まれるところである。

3.4 行列の固有値問題に変換する方法(著書らの方法)

以上の観点から、式(7)を一般的に解く方法を考える⁴⁾。

式(7)の一般解の周期関数を次のようにフーリエ級数を使って表現する^{11,2)}。

$$\{f\} = \exp(\lambda t) \left\{ \frac{\{b_0\}}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (\{a_k\} \sin k\bar{\omega}\tau + \{b_k\} \cos k\bar{\omega}\tau) \right\} \quad (16)$$

式(16)を式(7)に代入して、調和バランス法を用いれば、未定定数を求めるための同次方程式が次のように得られる。

$$\begin{aligned} & (\lambda^2 [C] + 2\lambda [C][H] + [I] - \alpha[A]) \{b_0\} - \bar{\varepsilon} [B] \{b_1\} = \{0\}, \\ & (\lambda^2 [C] + 2\lambda [C][H] + [I] - \alpha[A] - (\bar{\omega}^2 k^2 / 4) [C]) \{a_k\} \\ & \quad - 0.5 \bar{\varepsilon} [B] (\{a_{k-1}\} + \{a_{k+1}\}) - \bar{\omega} k ([C][H] + \lambda [C]) \{a_k\} = \{0\}, \\ & (\lambda^2 [C] + 2\lambda [C][H] + [I] - \alpha[A] - (\bar{\omega}^2 k^2 / 4) [C]) \{b_k\} \\ & \quad - 0.5 \bar{\varepsilon} [B] (\{b_{k-1}\} + \{b_{k+1}\}) + \bar{\omega} k ([C][H] + \lambda [C]) \{b_k\} = \{0\} \end{aligned} \quad (17)$$

ここに、 $k=1, 2, \dots$ 、 $\{a_0\} = \{0\}$ 。

同次方程式を次のように、 λ の0, 1, 2次の項に分けて表現する。

$$([M_0] - \lambda[M_1] - \lambda^2[M_2])(X) = \{0\} \quad (18)$$

ここに、 $[M_0]$ 、 $[M_1]$ 、 $[M_2]$: λ の0, 1, 2次の係数行列、 $\{X\} = \{b_0 \ b_1 \ b_2 \ \dots \ a_1 \ a_2 \ \dots\}^T$ 。

いま、 $\{Y\} = \lambda \{X\}$ なる新しいベクトルを導入すると、式(18)は次のような2倍サイズの固有値問題に変換される。

$$\begin{bmatrix} [0] & [I] \\ [M_2]^{-1}[M_0] & -[M_2]^{-1}[M_1] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X \\ Y \end{Bmatrix} = \lambda \begin{Bmatrix} X \\ Y \end{Bmatrix} \quad (19)$$

式(19)は実数係数の非対称行列の固有値問題である。この式は、減衰のある系の固有振動解析の基礎式と同じ形である。式(19)の λ は、QR double step法などの電子計算機の発展と有限要素法の普及によって一新された数値解法によって、容易に求めることができる。式(19)の固有値は共役複素数で与えられ、正の実数部をもてば、系は不安定となる。

本法の特徴は、式(7)を行列の固有値問題に変換したことにあり、すなわち、動的安定性解析の決定方程式が、電子計算機の利用に適した形に変換されたことになる。式(19)が減衰のある多自由度振動系の固有値解析と同じであることも興味深い。

次に、本法と既往の解法との関連を示すと、表-3 のようである。

表-3 本法と既往の解法との比較

解 法	基 本 式	得られる不安定領域
本 法 (1982年)	$([M_0] - \lambda[M_1] - \lambda^2[M_2]) \{X\} = \{0\}$	単純・結合共振の主・副不安定領域
Bolotinの方法 (1956年)	$\lambda = 0$ $[M_0] \{X\} = \{0\}$	単純共振の主・副不安定領域
Hsuの方法 (1963年)	摂動法による展開	単純・結合共振の主不安定領域

Bolotinの方法は、本法において $\lambda = 0$ とした解に相当する。この場合、解がうなり振動を伴うような安定境界、すなわち結合共振は得られていない。

Bolotinは文献1)において、式(8)の一般解の形を式(16)のように示している。しかし、当時、式(18)を解くことが不可能なために、 $\lambda = 0$ と置いた解のみを求める近似解法を採用した。このため、結合共振の存在を見逃したことになる。計算機の利用が可能で現在、われわれは、 $\lambda = 0$ とおく必要がない。この点が本解析法の根本的な学問上の貢献である。また、Hsuの方法は式(18)を摂動法で展開した解法に相当する。

3.5 はりの動的安定性への適用例

本解析法の適用例として、はりの曲げ、ねじれ(2自由度系)の動的安定性を示そう。Bolotinによって定式化された運動方程式は次のように与えられる¹⁾。

$$\omega^2 [I] \{\ddot{f}\} + 2\omega [D] \{\dot{f}\} + ([K] + [F] \cos \tau) \{f\} = \{0\} \quad (20)$$

ここに、

$$[I] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, [D] = \begin{bmatrix} 2h_1\sqrt{\gamma} & 0 \\ 0 & 2h_2 \end{bmatrix}, [K] = \begin{bmatrix} \gamma - \gamma\mu & \\ & -\mu \end{bmatrix},$$

$$[F] = \begin{bmatrix} 0 & -2\gamma\epsilon \\ -2\epsilon & 0 \end{bmatrix}$$

いま、 $\gamma = 0.1$ 、 $\mu = 0.5$ とすると、無次元固有円振動数はそれぞれ、 $\bar{\omega}_1 = 0.270$ 、 $\bar{\omega}_2 = 1.013$ である。

非減衰($h_1 = h_2 = 0.0$)と減衰のある場合($h_1 = 0.02$ 、 $h_2 = 0.01$)の不安定領域は図-5に示すとおりである¹⁾。

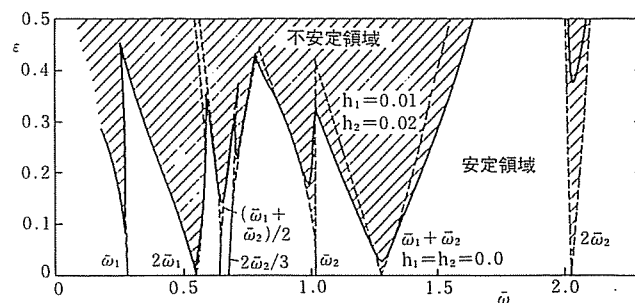


図-5 はりの曲げ、ねじれ振動の不安定領域

図のように $2\bar{\omega}_1$ 、 $2\bar{\omega}_1/2$ 、 $2\bar{\omega}_2$ 、 $2\bar{\omega}_2/2$ 、 $2\bar{\omega}_2/3$ 付近に単純共振の主・副不安定領域、および $\bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2$ 、 $(\bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2)/2$ 付近に和型の結合共振の主・副不安定領域が同時に得られている。本例の場合、結合共振 $\bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2$ が単純共振 $2\bar{\omega}_1$ 、 $2\bar{\omega}_2$ よりも広く、また、単純共振の副不安定領域 $\bar{\omega}_2$ が主不安定領域 $2\bar{\omega}_2$ よりも広い。つまり、図-5の不安定領域は、Bolotinの方法もしくはHsuの方法を単独に用いては得られない。本解析法によって、はじめて、すべての不安定領域が得られる。また、本解析法によれば、結合共振 $\bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2$ に現われている減衰による脱安定化効果を評価できていることも確認される。

この他、本解析法によって得られる安定境界線の精度^{20),21)}、連立のHillの方程式への応用²²⁾などが試みられており、安定判別法として実用的に十分であることが確認されている。

なお、本解析法は、安定判別図上において解の安定判別を行いながら境界線を作成するために、計算の手間がかかる。このために、BolotinもしくはHsuの方法による解を第1近似値として使用しながら、不安定領域を作成することなどが望ましい。

4. 橋梁構造物への応用例

4.1 橋桁の腹板の動的安定性

平板は構造部材を構成する基本単位として、はり、アーチ、ラーメンなどの部材に用いられている。例えば、プレートガーダーの支間中央の腹板は、面内曲げを支配的に受ける長方形板とみなすことができる。したがって、プレートガーダー橋が通行車輦などの影響により鉛直曲げ振動を起こせば、上下フランジと補剛材とに囲まれた腹板の板パネル(一枚の長方形板)には変動曲げモーメントが作用することになる(図-6)。

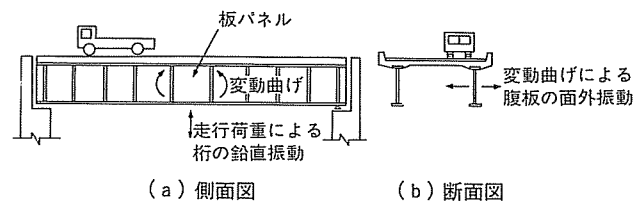


図-6 面内荷重を受けるプレートガーダーの腹板の例

腹板の板パネルの面外固有振動数と変動曲げモーメントの振動数、つまり桁全体の面内曲げ固有振動数との関係が表-2の条件を満足すれば、腹板には面外振動が励起される可能性がある。このような振動は疲労や騒音の原因ともなりかねないため、係数励振振動発生の可能性を調査しておく必要があると考えられる。

平板構造の動的安定性問題に関しては、これまでBolotin¹⁾、Hutt

ら²³⁾および八巻ら⁹⁾によって周期的等分布面内力を受ける長方形板が取扱われている。Duffieldら²⁴⁾は補剛板を、Merrittら²⁵⁾は斜板の動的安定性を解析しているが、いずれも変動面内力は等分布荷重である。面内曲げのような分布面内力を受ける場合の動的安定性は、あまり取扱われていないようである。

そこで、本論文では、プレートガーダーの腹板を対象とした面内変動曲げを受ける長方形板の動的安定性²⁶⁾、およびラーメン隅角部やアーチ橋の腹板を対象とした面内変動曲げを受ける扇形板の動的安定性²⁷⁾について、実際の取扱い方法とその結果について示そう。なお、3.4で示した解析法を連続体に応用した場合のフローは、図-7のように示される。

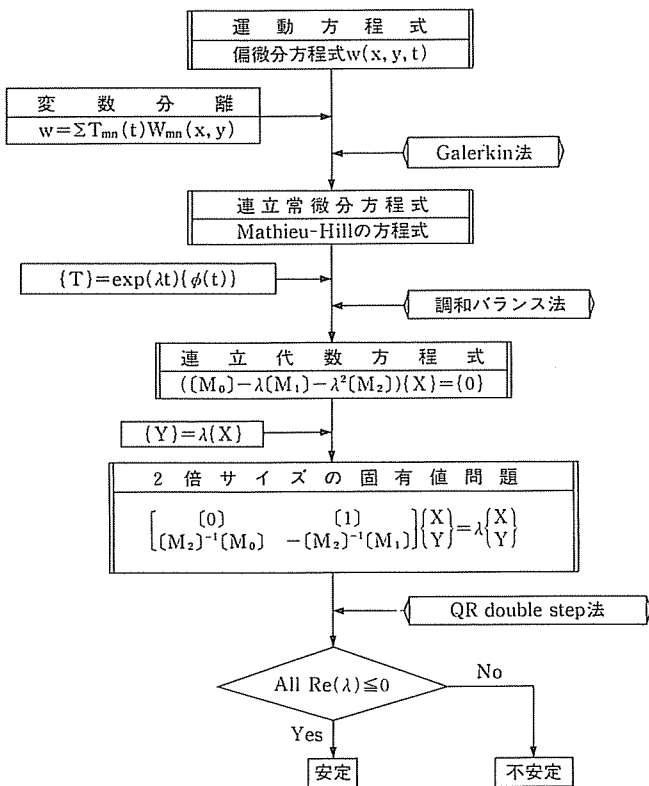


図-7 動的安定性解析のフロー

4.2 面内変動曲げを受ける長方形板の不安定領域²⁶⁾

図-8に示す長方形板の $x=0$, a の2辺に静的曲げモーメント M_0 と変動曲げモーメント $M_t \cos \Omega t$ の和から成る曲げモーメント M が作用する系を考える。この長方形板の安定を失った直後、つまり微小振動の範囲の面外曲げ振動の運動方程式は次のように表される。

$$L(w) = \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + D \nabla^4 w - \frac{6}{b^2} \left(1 - \frac{2y}{b}\right) (M_0 + M_t \cos \Omega t) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad (21)$$

ここに、 ρ : 板の密度、 h : 板厚、 $D = Eh^3 / \{12(1 - \nu^2)\}$: 板剛度、 E : ヤング率、 ν : ポアッソン比、 $\nabla^4 = (\partial^2 / \partial x^2 + \partial^2 / \partial y^2)^2$ 、 w : 板のたわみ。

式(21)の解を次のような時間関数と座標関数の積の形に仮定する。

$$w = h \sum_{s=1}^{\infty} T_{ms}(t) W_{ms}(x, y) \quad (22)$$

ここに、 $T_{ms}(t)$: 未知の時間関数、 $W_{ms}(x, y)$: 座標関数。

座標関数として平板の曲げ振動の基準関数を用いれば、境界条件を自動的に満足するので取扱いが便利である。また、基準関数の直交性が利用できるので、演算の一部が簡潔となる。

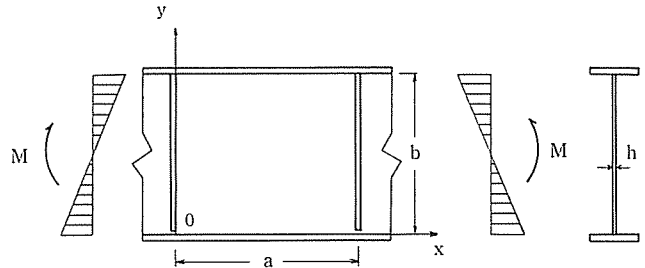


図-8 長方形板へのモデル化

式(22)を式(21)に代入のうえ、Galerkin法を用いれば、次のような時間関数 $\{T_m\}$ に関する連立のMathieuの方程式が得られる。

$$[A]\{\ddot{T}_m\} + \{[B] + (\bar{M}_0 + \bar{M}_t \cos \bar{\omega} \tau)[C]\}\{T_m\} = \{0\} \quad (23)$$

ここに、 $[A]$ 、 $[B]$ 、 $[C]$: 係数行列 (詳しくは文献26) 参照のこと)、 $\bar{M}_0 = M_0 / M_{cr}$ 、 $\bar{M}_t = M_t / M_{cr}$ 、 M_{cr} : 座屈曲げモーメント、 $\bar{\omega} = \Omega / \omega^1_{11}$ 、 $\tau = \omega^1_{11} t$ 、 $\omega^1_{11} : m=1$ の1次の固有円振動数、 $m=1, 2, \dots$: x 方向の半波数。

式(23)は3.4で述べた手法により、固有値問題に変換され、不安定領域が決定される。

式(23)の不安定領域の種類は、係数励振行列 $[C]$ の要素構成によって決まる。変動曲げモーメント $M_t \cos \Omega t$ を受ける長方形板と、文献9)の変動一様圧縮力 $q_t \cos \Omega t$ を受ける長方形板とについて、 $[C]$ の要素構成を示せば、表-4のとおりである。

表-4 長方形板の係数励振行列の要素構成と不安定領域

負荷形式	面内曲げ	一様分布荷重
[C]の内容	$\begin{bmatrix} 0 & C_{12} & 0 & C_{14} & \cdots \\ C_{21} & 0 & C_{23} & 0 & \cdots \\ 0 & C_{32} & 0 & C_{34} & \cdots \\ C_{41} & 0 & C_{43} & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} C_{11} & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & C_{22} & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & C_{33} & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$
	ここに、 $C_{ij} = C_{ji}$	
支配的な不安定領域	和形の結合共振 $\bar{\omega} = (\bar{\omega}^m_i + \bar{\omega}^m_j) / k$ ただし、 $i+j$ が奇数のみ	単純共振 $\bar{\omega} = 2\bar{\omega}^m / k$

$q_t \cos \Omega t$ の場合には $[C]$ は対角行列である。また、 $[A]$ および $[B]$ も対角行列であるので、各基準座標は1自由度系に分離できる。したがって、結合共振は存在せず、単純共振のみが現われる。一方 $M_t \cos \Omega t$ の場合には、 $[C]$ の対角要素が零で、かつ対称行列($C_{ij} = C_{ji}$)であるので、式(24)からも明らかなように和形の結合共振が現われる。また、 $(i+j)$ が奇数であるので、 $(\bar{\omega}^m_1 + \bar{\omega}^m_3) / k$ や $(\bar{\omega}^m_2 + \bar{\omega}^m_4) / k$ などの i と j の和が偶数の結合共振は存在しない。なお、静的曲げモーメント M_0 が $M_t \cos \Omega t$ と同時に作用する場合には、 $[C]$ の項が復元力の項 $\{[B] + \bar{M}_0 [C]\} \cdot \{T_m\}$ に入ってくるので、不安定領域の出現パターンはもっと複雑になる。

次に、実際に不安定領域を求めた結果を示してみよう。図-9は、 \bar{M}_0 の作用しない正方形板の不安定領域である。境界条件は、荷重辺単純支持で他対辺固定である。 $M_t \cos \Omega t$ が作用する場合には、[C]の非対角要素(連成項)をかいして $\bar{\omega}_1^2$, $\bar{\omega}_2^2$ などの単純共振の副不安定領域が現われるが、図に示すように、 $\bar{\omega}_1^2 + \bar{\omega}_2^2$ などの結合共振の主不安定領域に比べ、その幅は小さい。結合共振は、 $\bar{\omega}_1^m + \bar{\omega}_2^m$ などのようにy方向の次数が隣合う固有振動数の組合せが現われ、 $\bar{\omega}_1^m + \bar{\omega}_4^m$ などの離れた組合せでは生じない。

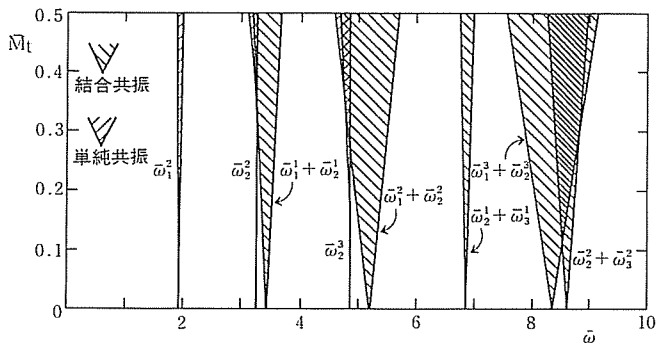


図-9 変動曲げを受ける正方形板の不安定領域

比較のため、同じ辺長比と境界条件の正方形板に $q_t \cos \Omega t$ が作用する場合の不安定領域を図-10に示す²⁸⁾。この場合、前述のように単純共振のみが現われる。このように、面内力の分布状態によって、現われる不安定領域がまったく異なることは、注意を要する。

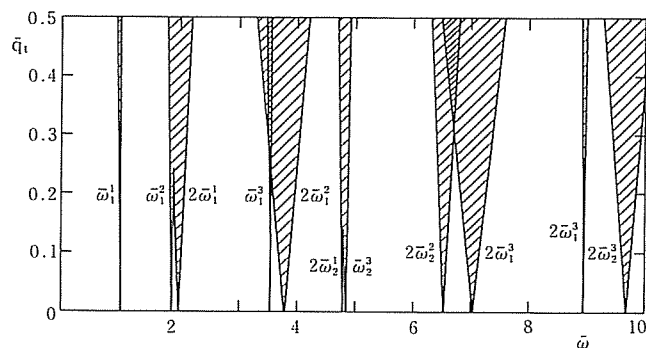


図-10 変動一様分布荷重を受ける正方形板の不安定領域

4.3 面内変動曲げを受ける扇形板の不安定領域²⁷⁾

次に扇形板の場合を示そう。図-11に示すような扇形板に、極座標 (r, θ) 系を導入する。この扇形板の直線辺に $M = M_0 + M_t \cos \Omega t$ の曲げモーメントが作用するとき、運動方程式は次のように表される。

$$L(w) = \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + D \nabla^4 w - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r N_r \frac{\partial w}{\partial r}) + \frac{N_\theta}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} = 0 \quad (24)$$

ここに、 $\nabla^4 = (\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2})^2$, N_r, N_θ : M による r, θ 方向の面内力。

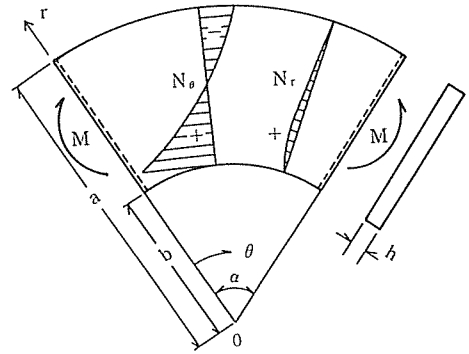


図-11 扇形板の一般図

解を時間と空間に分離のうえ、Galerkin法を用いれば、次のような時間関数に関する連立常微分方程式が得られる。

$$[I](\ddot{T}_n) + [A](T_n) + (\bar{M}_0 + \bar{M}_t \cos \bar{\omega} \tau)[B](T_n) = \{0\} \quad (25)$$

ここに[I]: 単位行列, [A]: 対角行列, [B]: 正方行列。

以下、長方形板の場合と同様な取扱いにより、不安定領域を決定することができる。

扇形板の場合、面内力の分布性状および座屈特性²⁹⁾は長方形板とはかなり異なる。また、式(25)の[B]行列は零要素をもたない対称行列である。したがって、不安定領域は単純共振および和形の結合共振が同時に存在する。

直線辺単純支持、円周辺固定の扇形板の不安定領域を静的曲げモーメント $\bar{M}_0 = 0.0$ 、開き角 $\alpha = 60^\circ$ および縦横比 $\mu = 1.0$ の場合について示せば、図-12のとおりである。この図は、長方形板の場合の図-9に相当するものである。図中の $\bar{\omega}_s$ の n, s は、それぞれ θ 方向および r 方向の次数である。図-12より扇形板の場合、長方形板とは異なって単純共振の主不安定領域が優勢であることが分かる。

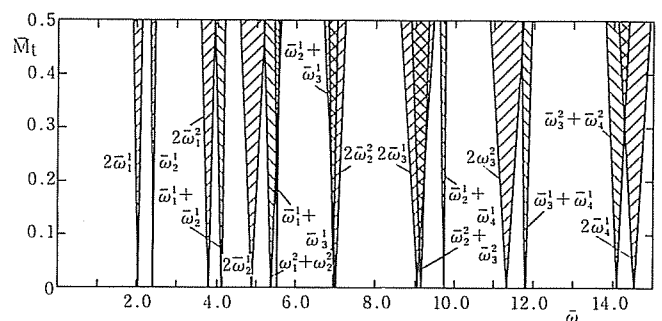


図-12 変動曲げを受ける扇形板の不安定領域

4.4 安定を失った後の応答

線形理論によれば、不安定領域における系の運動は時間とともに発散する振動である。しかしながら、平板の場合、振幅が板厚程度になれば平板内に生ずる引張力の影響によって、振動振幅は有限の大きくなる。したがって、安定を失った後の振幅を求めるためには、幾何学的非線形性を考慮した解析が必要となる。

ここでは4.2で取扱った長方形板に対し、平板の有限変形に関するKármánの式を用いて、安定を失った後の振幅を時間応答

解析して求めた一例を示そう³⁰⁾。

図-13は、面内曲げを受ける全周辺単純支持の正方形板の結合共振 $\bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2$ の不安定領域について、中心振動数 $\bar{\omega}=3.5$ 、励振力の振幅 $\bar{M}_t=0.5$ に対する時間関数 T_{n1} の時間応答を示したものである。図の縦軸は時間関数 T_{11} および T_{12} の面外応答値であり、板厚で無次元化されている。横軸の τ は無次元時間である。図-13に示すように、不安定領域の時間応答は有限の大きさとなり、うなりを伴った振動を生じていることがわかる。この場合、最初の2、3回のうなり振動における最大振幅が、最大応答を与える。

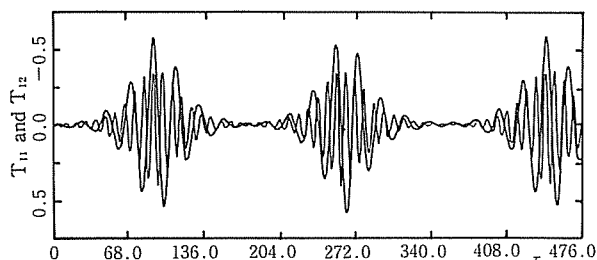


図-13 $\bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2$ の非線形時間応答

以上のほかに、静的曲げモーメントが同時に作用する場合には、座屈波形と似たモード形をもつ結合共振に特異な現象が現われること、および減衰力が励振力の小さい領域で非線形応答に顕著な効果を及ぼすことなどが明らかとなっているが、詳しくは文献³⁰⁾を参照されたい。さらに、初期変形がある場合には、その形状が不安定振動の固有振動形と一致した場合に最大応答に大きな影響を及ぼすことも明らかとなっている^{31),32)}。

4.5 平板構造の動的安定性に関するまとめ

長方形板および扇形板の解析結果からは、不安定領域は励振振動数すなわち桁の鉛直曲げ振動数が腹板の板パネルの面外固有振動数の2倍程度以上必要であること、および変動曲げモーメントの大きさがある程度以上要することなどが明らかとなっている。このような条件を満足する橋梁としては、単支間のプレートガーダー鉄道橋などが考えられる。また、不安定振動の発生および振幅に大きな影響を及ぼす量として、減衰力がある。したがって、動的安定性による不安定振動の発生を検討する場合、実構造における減衰の大きさの正確な評価が必要である。今後、実際の構造物におけるパラメータ解析や振動計測などを行って、動的不安定現象発生の可能性を調査する必要があると思われる。さらに、設計段階において動的不安定現象が予見されるような場合には、補剛材の配置などを工夫することによって振動数比を安定領域に設定することも可能であろう。

5. あとがき

本論文は「構造物の動的安定性」の解説をかねて、係数励振振動の性質、数学的アプローチ法および橋梁構造物の動的安定性を報告した。これらによって、動的安定性の全体像がある程度紹介できたと考える。本論文が土木技術者に動的安定性に関心をもってもらえきっかけとなれば幸いである。なお、本論文

をまとめるにあたって、長崎大学大学院学生平川倫明君の協力を得たことを付記する。

参考文献

- 1) Bolotin, V.V.: The Dynamic Stability of Elastic Systems, Holden-Day, Inc., San Francisco, 1964.
- 2) ボローチン、近藤・中田訳：弾性系の動的安定性、コロナ社、1972。
- 3) 山辺・高橋・河原：弾性体の非線形振動解析法について、土木学会第31回年次学術講演会講演概要集、第1部、pp. 537-538、昭和51年10月。
- 4) Takahashi, K.: Instability of Parametric Dynamic Systems with Non-uniform Damping, Journal of Sound and Vibration, Vol.85, pp.257-262, 1982.
- 5) 前沢：振動工学、森北出版、pp241-245, 1973.
- 6) 國枝：機械振動学、理工学社、pp192-193, 1984.
- 7) 織田：架線パンタグラフ系の振動、機械の研究、Vol.19, No.1, pp. 269-274, 1967.
- 8) Nayfeh, A.H. and Mook, D.T.: Nonlinear Oscillations, John Wiley & Sons, Inc., 1979.
- 9) 八巻・永井：周期的な圧縮荷重を受ける矩形板の動的安定、東北大学高速力学研究所報告、第36巻、第351号、pp147-168, 1975.
- 10) 會田・佐伯・窪田：周期性荷重を受ける骨組構造物の弾性安定解析、土木学会論文報告集、第249号、pp. 29-39, 1976.
- 11) Takahashi, K. and Konisi, Y.: Non-linear Vibration of Cables in Three Dimensions, Part II; Out-of-plane Vibrations under In-plane Sinusoidally Time-varying Load, Journal of Sound and Vibration, Vol.118, pp.85-97, 1987.
- 12) Kovács, I.: Zur Frage der Seilschwingungen und der Seildämpfung, Bautechnik, 59Jg., H.10, s.325-332, 1982.
- 13) Langson, H.E. and Larsen, O.D.: Generating Mechanisms for Cable Stay Oscillations at the Faro Bridges, CABRIDGE International Conference on Cable-stayed Bridges in Bangkok, Vol. 2, pp.1023-1033, 1987.
- 14) Chen, S.S.: Dynamic Stability of Tube Conveying Fluid, Proc. of ASCE, Vol.97-EM 5, pp.1469-1485, 1971.
- 15) Paidoussis, M.P. and Sundararajan, C.: Parametric and Combination Resonances of a Pipe Conveying Pulsating Fluid, Journal of Applied Mechanics, Vol.42, pp.780-784, 1975.
- 16) 高橋・河原・山辺：はりおよび薄板の非線形振動のGalerkin法による解の収束性および安定性について、土木学会論文報告集、第283号、pp.9-22, 1980.
- 17) Iwatatsubo, T., Sugiyama, Y. and Ogino, S.: Simple and Combination Resonances of Columns under Periodic Axial Loads, Journal of Sound and Vibration, Vol.33, pp.211-221, 1974.
- 18) Hsu, C.H.: On the Parametric Excitation of Dynamic Systems Having Multiple Degrees of Freedom, Journal of Applied Mechanics, Vol.30, pp.367-372, 1963.

- 19) Hsu,C.H. : Further Results on Parametric Excitation of a Dynamic System, Journal of Applied Mechanics, Vol.32, pp.373-377, 1965.
- 20) 高橋・米倉 : 係数励振振動系の不安定領域の計算法, 土木学会論文報告集, 第320号, pp.165-168, 1982.
- 21) Takahashi,K. : An Approach to Investigate the Instability of the Multiple-degree-of-freedom Parametric Dynamic Systems, Journal of Sound and Vibration, Vol.78, pp.519-529, 1981.
- 22) Takahashi, K. : Stability of Hill's Equation with Three Independent Parameters, Journal of Sound and Vibration, Vol. 79, pp.605-608, 1981.
- 23) Hutt, J.M.and Salam,A.E. : Dynamic Stability of Plates by Finite Elements, Proc. of ASCE, Vol.97-EM 3, pp.879-899, 1971.
- 24) Duffield,R.C. and Willems, N. : Parametric Resonance of Stiffened Rectangular Plates, Journal of Applied Mechanics, Vol.39, pp.217-226, 1972.
- 25) Merritt,R.G.and Willems,N. : Parametric Resonance of Skew Stiffened Plates, Journal of Applied Mechanics, Vol.40, pp.439-444, 1973.
- 26) 高橋・田川・池田・松川 : 面内曲げを受ける長方形板の動的安定性, 土木学会論文報告集, 第341号, pp.179-186, 1984.
- 27) 高橋・小西・平川・夏秋 : 面内変動曲げを受ける曲線平板構造の動的安定性, 構造工学論文集, Vol.34A, pp.807-815, 1988.
- 28) Takahashi,K. and Konishi,Y. : Dynamic Stability of a Rectangular Plate Subjected to Distributed In-plane Dynamic Force, Journal of Sound and Vibration, Vol.123, pp.115-127, 1988.
- 29) 夏秋・高橋・小西・平川 : 面内曲げを受ける曲線平板の座屈特性, 構造工学論文集, Vol.34A, pp.181-190, 1988.
- 30) Takahashi,K.,Konishi,Y.,Ikeda,T. and Kawano,R. : Non-linear Response of a Rectangular Plate Subjected to Inplane Dynamic Moment, Proc. of JSCE, No.374/I-6, pp.78-87, 1986.
- 31) Takahashi,K.,Konishi,Y.,Kawano,R.and Urakawa,S. : Dynamic Stability of an Initially Deflected Rectangular Plate Under an Inplane Dynamic Moment, Proc. of JSCE, No.392/I-9, pp.83-91, 1988.
- 32) 高橋・小西・川野・夏秋 : 面内変動曲げを受ける初期変形をもつ長方形板の動的安定性——静的曲げモーメントおよび減衰力の影響——, 長崎大学工学研究報告, 第17巻, 第29号, pp.160-164, 1987.