

# [論文] 面内変動せん断力を受ける長方形板の動的安定性

夏 秋 義 広\*  
高 橋 和 雄\*\*

## 1. まえがき

プレートガーダー橋が交通荷重などによって振動すれば、主桁の腹板に作用する面内力は周期的に変動する。変動面内力の振動数と腹板の面外振動の固有振動数がパラメトリック共振の条件を満足すれば、腹板は係数励振により振動する可能性がある。このような面外振動は疲労や騒音の原因ともなりかねないため、係数励振振動発生の可能性を調査しておくことは工学的に重要な問題であると考えられる。

このような観点から、著者らは面内変動曲げを受ける長方形板や扇形板の動的安定性を報告し<sup>1)</sup>、面外不安定振動の種類およびその発生領域を各種のパラメーターのもとに明らかにした。しかしながら、橋梁の主桁の支点付近あるいはラーメン部材の隅角部では、曲げのほかにせん断力も作用している。主桁腹板を対象とする場合、腹板は主としてせん断力を負担することを考慮すると、せん断力が支配的な荷重となることも予想される。

そこで、本論文では、周期的に変動する面内せん断力を受ける長方形板の面外不安定振動に関する動的安定性を解析するものである。微小変形理論に基づいた運動方程式をガラーキン法と調和バランス法によって固有値問題に変換する手法を用いる。本題の場合、動的不安定領域が同一の振動数領域に現れる<sup>2)</sup>。したがって、基礎方程式を、分割されたマトリックス方程式の形に変換し、不安定領域を分離する手法を提案する。

数値計算として、面内変動せん断力を受ける長方形板の面外不安定領域を種々の境界条件のもとに明らかにし、他の荷重条件の場合と比較する。さらに、曲げとせん断を同時に受ける場合についても言及する。

## 2. 基礎方程式および境界条件

プレートガーダーの主桁腹板を、図-1に示す一枚の長方形板に仮定する。この長方形板の周辺に、静的せん断力 $N_{xy0}$ と周期的せん断力 $N_{xyt}\cos\Omega t$ の和からなる面内力 $N_{xy}$ が作用する。

$$N_{xy} = N_{xy0} + N_{xyt}\cos\Omega t \quad (1)$$

ここに、 $N_{xy0}$ ：静的せん断力の大きさ、 $N_{xyt}$ ：変動せん断力の振幅、 $\Omega$ ：励振振動数、 $t$ ：時間、

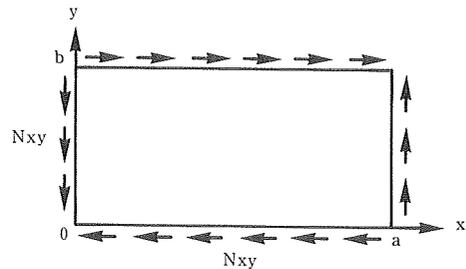


図-1 長方形板の一般図

この長方形板の微小振動の運動方程式は、次のように与えられる。

$$L(w) = \rho d \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + D \nabla^4 w - 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = 0 \quad (2)$$

ここに、 $w$ ：面外たわみ、 $\rho$ ：板の密度、 $D = Ed^3 / \{12(1-\nu^2)\}$ ：板剛度、 $E$ ：ヤング係数、 $d$ ：板厚、 $\nu$ ：ポアソン比、 $\nabla^4 = (\partial^2 / \partial x^2 + \partial^2 / \partial y^2)^2$ 。

式(1)を式(2)に代入し、無次元化すると、

$$L(w) = \frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2} + \frac{1}{k_{11}^4} D \nabla^4 w - \kappa_{xy} (\bar{N}_{xy0} + \bar{N}_{xyt} \cos \bar{\omega} \tau) \frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \eta} = 0 \quad (3)$$

ここに、 $\nabla^4 = (\frac{1}{\mu^2} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2})^2$ 、 $\kappa_{xy} = \frac{2}{\mu} \frac{\lambda_{cr} \pi^2}{K_{11}^4}$ 、 $\xi = \frac{x}{a}$ 、

$$\eta = \frac{y}{b}, \mu = \frac{a}{b}.$$

式(3)には以下の無次元量が導入されている。

$$\bar{N}_{xy0} = \frac{N_{xy0}}{N_{cr}}, \bar{N}_{xyt} = \frac{N_{xyt}}{N_{cr}}, \bar{\omega} = \frac{\Omega}{\Omega_{11}}, \tau = \Omega_{11} t. \quad (4)$$

ここに、 $N_{cr} = \lambda_{cr} D \pi^2 / b^2$ ：座屈せん断力、 $\lambda_{cr}$ ：座屈固有値、 $\Omega_{11} = k_{11}^2 \sqrt{D / \rho d b^4}$ ：面内力の作用しない長方形板の最低次の固有振動数、 $k_{11}$ ：自由振動の最低次の固有値。

本解析では、以下の3ケースの境界条件を考慮する。

case I：全周辺単純支持

$$w = \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} = 0 \quad (\xi = 0, 1) \quad w = \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} = 0 \quad (\eta = 0, 1) \quad (5a)$$

case II：一対辺単純支持、他対辺固定

$$w = \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} = 0 \quad (\xi = 0, 1) \quad w = \frac{\partial w}{\partial \eta} = 0 \quad (\eta = 0, 1) \quad (5b)$$

\* 橋梁技術開発室 課長

\*\* 長崎大学土木工学科 助教授

caseIII : 全周固定

$$w = \frac{\partial w}{\partial \xi} = 0 \quad (\xi=0,1) \quad w = \frac{\partial w}{\partial \eta} = 0 \quad (\eta=0,1) \quad (5c)$$

### 3. 解法

以上の境界条件を考慮して、式(3)の解を次のように仮定する。

$$w = \sum_{m,n} T_{mn}(\tau) W_{mn}(\xi, \eta) \quad (6)$$

ここに、 $T_{mn}$  : 未知の時間関数、 $W_{mn}$  : 座標関数。

ここで、座標関数として、面内力の作用しない長方形板の自由振動の基準関数を用いる。すなわち、

$$\text{case I} : W_{mn} = \sin(m\pi\xi)\sin(n\pi\eta) \quad (7a)$$

$$\text{case II} : W_{mn} = \sin(m\pi\xi) \cdot \sum_j a_j^n \{ \cos(j-1)\pi\eta - \cos(j+1)\pi\eta \} \quad (7b)$$

$$\text{case III} : W_{mn} = \sum_i a_i^m \{ \cos(i-1)\pi\xi - \cos(i+1)\pi\xi \} \cdot \sum_j a_j^n \{ \cos(j-1)\pi\eta - \cos(j+1)\pi\eta \} \quad (7c)$$

ここに、 $a_j^n$  および  $a_i^m$  : モード係数。

基準関数は次の条件を満足しなければならない。

$$\nabla^4 W_{mn}(\xi, \eta) = k_{mn} W_{mn}(\xi, \eta) \quad (8)$$

式(6)および式(8)を式(3)に代入すると、

$$L(w) = \sum_{m,n} \left\{ \ddot{T}_{mn}(\tau) + \frac{\Omega_{mn}^2}{\Omega_{11}^2} T_{mn}(\tau) \right\} W_{mn}(\xi, \eta) - \kappa_{xy} (\bar{N}_{xy0} + \bar{N}_{xyt} \cos \bar{\omega} \tau) \sum_{m,n} T_{mn}(\tau) \frac{\partial^2 W_{mn}}{\partial \xi \partial \eta} \quad (9)$$

仮定解は式(3)を必ずしも満足しない。つまり、式(9)の右辺は必ずしも零とはならない。したがって、ガラーキソ法を用いる。

$$\int_0^1 \int_0^1 L(w) W_{ij}(\xi, \eta) d\xi d\eta = 0 \quad (10)$$

ここに、 $i, j = 1, 2, \dots, N$ 。

式(10)の定積分を実行すれば、次のような連立常微分方程式が得られる。

$$[A]\{\ddot{T}\} + [B]\{T\} + (\bar{N}_{xy0} + \bar{N}_{xyt} \cos \bar{\omega} \tau)[C]\{T\} = \{0\} \quad (11)$$

ここに、 $[A]$ 、 $[B]$ 、 $[C]$  : 正方形行列 (付録1参照)、および  $\{T\} = \{T_{11} T_{12} T_{13} \dots T_{1N} T_{21} T_{22} T_{23} \dots T_{2N} T_{31} T_{32} \dots T_{3N} \dots T_{NN}\}$ 。

$[A]$  の逆行列を式(11)の両辺に左から乗ずれば、

$$[I]\{\ddot{T}\} + [F]\{T\} + (\bar{N}_{xy0} + \bar{N}_{xyt} \cos \bar{\omega} \tau)[G]\{T\} = \{0\} \quad (12)$$

ここに、 $[I]$  : 単位行列、 $[F] = [A]^{-1} \times [B] = \text{diag}(\omega_{11}^2, \omega_{12}^2, \dots, \omega_{21}^2, \dots, \omega_{NN}^2)$ 、 $[G] = [A]^{-1} \times [C]$ 。

式(12)の解を、収束・発散を支配する指数関数の項と運動の周期性を保証するフーリエ級数の項との積の形に仮定する<sup>9)</sup>。

$$\{T\} = \exp(\lambda\tau) (0.5\{b_0\} + \sum_k \{a_k\} \text{sink} \bar{\omega} \tau + \{b_k\} \text{cosk} \bar{\omega} \tau) \quad (13)$$

ここに、 $\{b_0\}$ 、 $\{a_k\}$ 、 $\{b_k\}$  : 時間に依存しないベクトル。

式(13)を式(12)に代入し、調和バランス法を用いると、次のような連立代数方程式が得られる。

$$([M_0] - \lambda[M_1] - \lambda^2[M_2])\{X\} = \{0\} \quad (14)$$

ここに、 $[M_0]$ 、 $[M_1]$ 、 $[M_2]$  :  $\lambda$  の 0 次 (定数)、1 次、2 次の定数マトリックス (付録2参照)、 $\{X\} = \{\{b_0\} \{b_1\} \{b_2\} \{b_3\} \dots \{a_1\} \{a_2\} \{a_3\} \dots\}^T$ 。

式(14)の固有値 $\lambda$ は、次のような2倍サイズのマトリックスの固有値を求めることにより得られる。

$$\begin{bmatrix} [0] & [I] \\ [M_2]^{-1}[M_0] & -[M_2]^{-1}[M_1] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X \\ Y \end{Bmatrix} = \lambda \begin{Bmatrix} X \\ Y \end{Bmatrix} \quad (15)$$

ここに、 $\{Y\} = \lambda \{X\}$ 。

系の安定性は、固有値の実数部の符号によって、直接判定できる<sup>9)</sup>。しかしながら本題の場合、不安定領域が同一の振動数領域に現れる<sup>9)</sup>。重なった不安定領域を分離するため、マトリックス方程式の分割を行う。

### 4. マトリックス方程式の分割

今、 $m, n = 1, 2, 3, 4$  の16自由度まで考慮すると、式(12)の時間関数は次のように与えられる。

$$\{T\} = \{T_{11} T_{12} T_{13} T_{14} T_{21} T_{22} T_{23} T_{24} T_{31} T_{32} T_{33} T_{34} T_{41} T_{42} T_{43} T_{44}\}^T \quad (16)$$

係数励振マトリックス  $[G]$  は次のようになる。

$$[G] = \begin{bmatrix} [0] & [G]_{11}^{11} & [0] & [G]_{11}^{11} \\ [G]_{11}^{21} & [0] & [G]_{11}^{21} & [0] \\ [0] & [G]_{11}^{31} & [0] & [G]_{11}^{31} \\ [G]_{11}^{41} & [0] & [G]_{11}^{41} & [0] \end{bmatrix} \quad (17)$$

ここに、

$$[G]_{11}^{mn} = \begin{bmatrix} 0 & g_{m112} & 0 & g_{m114} \\ g_{m211} & 0 & g_{m213} & 0 \\ 0 & g_{m312} & 0 & g_{m314} \\ g_{m411} & 0 & g_{m413} & 0 \end{bmatrix}$$

および、 $[0]$  :  $4 \times 4$  の零マトリックス。

式(17)に示すように、行列  $[G]$  は疎行列で、要素の3/4は零である。行と列を入れ替えることにより、行列  $[G]$  は次のような4個の副マトリックスに変換できる。

$$[G] = \begin{bmatrix} [0] & [0] & [0] & [G_{14}] \\ [0] & [0] & [G_{23}] & [0] \\ [0] & [G_{32}] & [0] & [0] \\ [G_{41}] & [0] & [0] & [0] \end{bmatrix} \quad (18)$$

ここに、 $[G_{14}]$ 、 $[G_{23}]$ 、 $[G_{32}]$ 、 $[G_{41}]$  :  $4 \times 4$  の非零な要素からなる副マトリックス。

この変換に伴い、時間関数  $\{T\}$  および係数行列  $[F]$  は以下のように変換される。

$$\{T\} = \{T_{11} T_{13} T_{31} T_{33} T_{12} T_{14} T_{32} T_{34} T_{21} T_{23} T_{41} T_{43} T_{22} T_{24} T_{42} T_{44}\}^T \quad (19a)$$

$$[F] = \text{diag}(\omega_{11}^2 \omega_{13}^2 \omega_{31}^2 \cdots \omega_{12}^2 \cdots \omega_{21}^2 \cdots \omega_{44}^2) \quad (19b)$$

これらのマトリックスの性質より、マトリックス方程式(18)は次のような2個の方程式に分割される。

Type 1 ( $m+n$ =偶数) :

$$[I_1] \{\dot{T}_1\} + [F_1] \{T_1\} + (\bar{N}_{xy0} + \bar{N}_{xyt} \cos \bar{\omega} \tau) [G_1] \{T_1\} = \{0\} \quad (20a)$$

Type 2 ( $m+n$ =奇数) :

$$[I_2] \{\dot{T}_2\} + [F_2] \{T_2\} + (\bar{N}_{xy0} + \bar{N}_{xyt} \cos \bar{\omega} \tau) [G_2] \{T_2\} = \{0\} \quad (20b)$$

ここに、 $\{T_1\} = \{T_{11} T_{13} T_{31} T_{33} T_{22} T_{24} T_{42} T_{44}\}^T$ ,

$\{T_2\} = \{T_{12} T_{14} T_{32} T_{34} T_{21} T_{23} T_{41} T_{43}\}^T$ ,

$$[G_1] = \begin{bmatrix} [0] & [G_{14}] \\ [G_{41}] & [0] \end{bmatrix} \text{ および } [G_2] = \begin{bmatrix} [0] & [G_{23}] \\ [G_{32}] & [0] \end{bmatrix}$$

不安定領域はこれら2つの方程式からそれぞれ単独に得られる。

不安定領域の種類とその幅は、係数励振マトリックス  $[G]$  の要素構成に依存する。本題の場合、行列  $[G]$  の連成項(非対角項)が同符号であるので、参考文献<sup>4)</sup>に示されるように、 $\bar{\omega} = (\omega_{mn} + \omega_{kl})/k$  付近の和形の結合共振が現れる。また、 $[G]$  の対角要素が零であるので、パラメトリック共振は連成項を介してのみ起こる。このため本題の場合、単純共振は重要でない。さらに、式(20a)および式(20b)の連成項から、結合共振  $\omega_{mn} + \omega_{kl}$  に関して次の性質が導かれる。

$$\text{Type 1 : } m+n = \text{偶数でかつ } m \neq k, n \neq l \quad (21a)$$

$$\text{Type 2 : } m+n = \text{奇数でかつ } m \neq k, n \neq l \quad (21b)$$

このマトリックス分割法を用いれば、不安定領域の種類を容易に特定でき、固有値問題の計算時間も短縮できる。

## 5. 面外不安定領域

周期的変動せん断力  $\bar{N}_{xyt}$  のみ ( $\bar{N}_{xy0} = 0$ ) を受ける長方形板の面外不安定領域を3つの境界条件に対して図-2~図-7に示す。図中、縦軸  $\bar{N}_{xyt} = N_{xyt}/N_{cr}$  は座屈せん断力で無次元化した変動せん断力の振幅を示す。横軸  $\bar{\omega} = \Omega/\Omega_{11}$  は最低次の固有振動数で無次元化した励振振動数を示す。斜線部の領域が不安定領域であり、 $\bar{N}_{xyt} = 0.5$  で  $\bar{\omega}$  が 0.1 より小さい幅の狭い不安定領域は省略している。

図に示すように、和形の結合共振  $\omega_{mn} + \omega_{kl}$  が得られている。

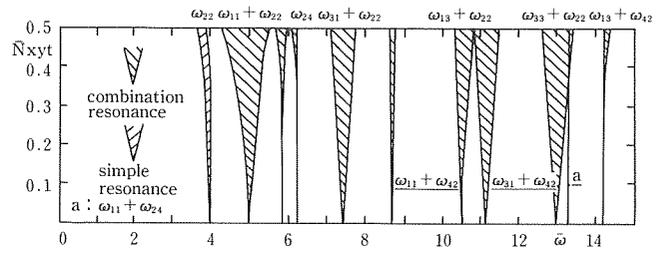


図-2 長方形板の動的不安定領域：  
case I, Type 1,  $\bar{N}_{xy0} = 0$ ,  $\mu = 1.5$ .

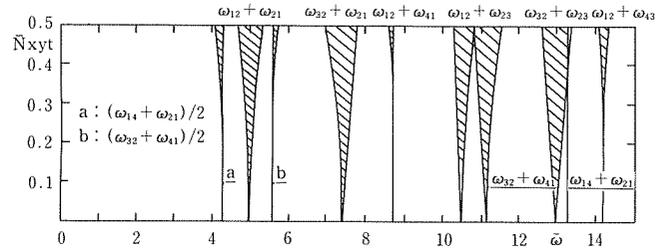


図-3 長方形板の動的不安定領域：  
case I, Type 2,  $\bar{N}_{xy0} = 0$ ,  $\mu = 1.5$ .

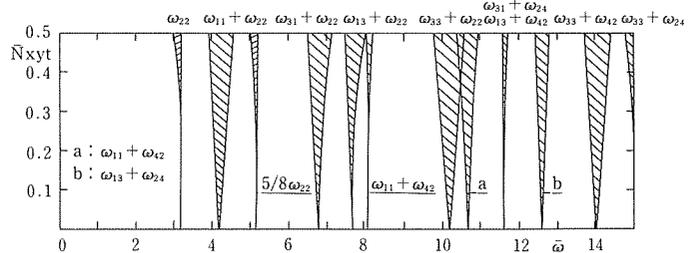


図-4 正方形板の動的不安定領域：  
case II, Type 1,  $\bar{N}_{xy0} = 0$ ,  $\mu = 1.0$ .

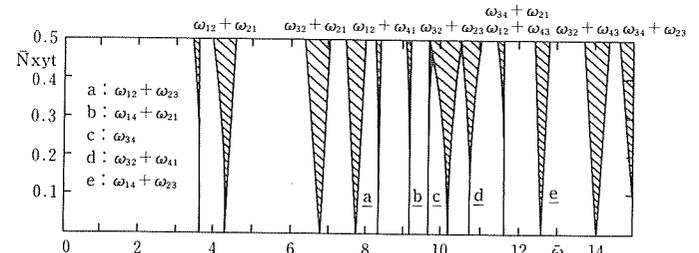


図-5 正方形板の動的不安定領域：  
case II, Type 2,  $\bar{N}_{xy0} = 0$ ,  $\mu = 1.0$ .

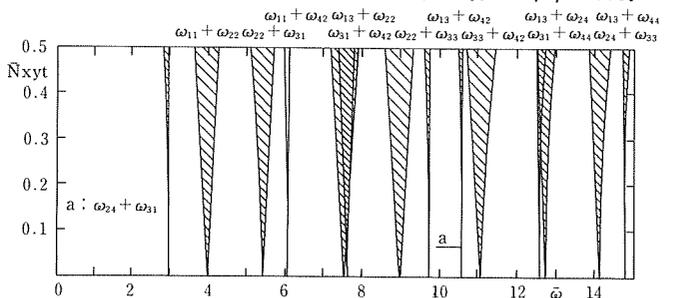


図-6 長方形板の動的不安定領域：  
case III, Type 1,  $\bar{N}_{xy0} = 0$ ,  $\mu = 1.5$ .

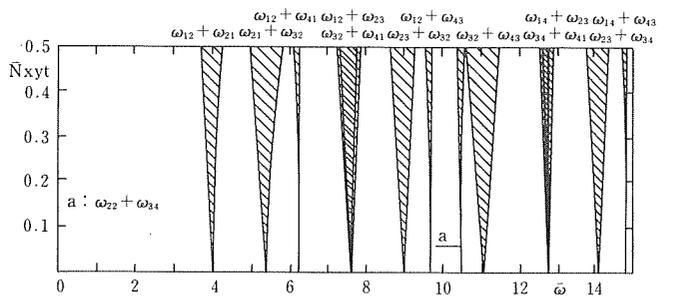


図-7 長方形板の動的不安定領域：  
case III, Type 2,  $\bar{N}_{xy0} = 0$ ,  $\mu = 1.5$ .

表一 無次元固有振動数, 定数 $k_{11}$ ,  $\lambda_{cr}$ .

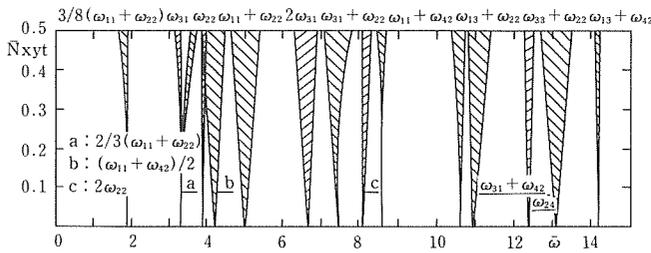
m \ n	case I ( $\mu = 1.5$ )				case II ( $\mu = 1.0$ )				case III ( $\mu = 1.5$ )			
	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
1	1.0000	3.0769	6.5385	11.3846	1.0000	2.3966	4.4755	7.2309	1.0000	2.4506	4.6563	7.5965
2	1.9231	4.0000	7.4615	12.3077	1.8909	3.2707	5.3686	8.1433	1.5460	2.9613	5.1587	8.0974
3	3.4615	5.5385	9.0000	13.8462	3.5305	4.8486	6.9330	9.7114	2.4732	3.8386	6.0179	8.9511
4	5.6154	7.6923	11.1538	16.0000	5.8826	7.1474	9.2015	11.9666	3.7514	5.0711	7.2222	10.1410
$k_{11}$	1.4444				2.9333				5.2005			
$\lambda_{cr}$	7.1503				12.5892				11.4893			

各境界条件に対して, Type 1 と Type 2 の結合共振が同一の振動数 $\omega_{mn} + \omega_{kl} = \omega_{m'n'} + \omega_{k'l'}$ で現れている. ここに,  $m+k=m'+k'$ および $n+l=n'+l'$ である. このように, マトリックス分割法を用いる本解析法は, 重なった不安定領域を特定するのに非常に有効である. 本題の場合, 係数励振マトリックス[G]の対角要素は零であるので, 直接項から励起される単純共振は現れない. 連成項を介して単純共振の副不安定領域 $\omega_{mn}$ が得られているが, その幅は結合共振に比べ小さい.

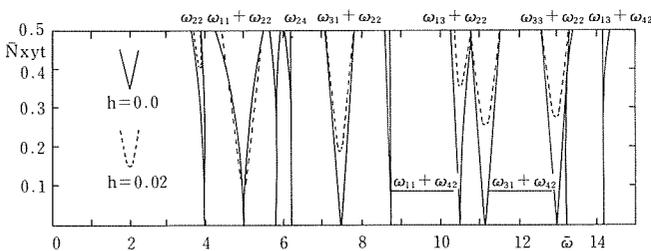
各ケースの無次元固有振動数, および定数 $k_{11}$ ,  $\lambda_{cr}$ を表一に示す.  $k=m+1$ および $l=n+1$  ( $m < k, n < l$ ) などのように, x, y 方向の半波数が隣合う場合, 対応する固有振動数が接近するため, その不安定領域の幅が広い. 一方, x, y 方向の半波数が離れている場合には, 結合共振の不安定領域の幅は狭い.

$\bar{N}_{xy0} = 0.3$ の静的せん断力を考慮した場合の面外不安定領域をCase 1のType 1に対して図一8に示す. 静的せん断力 $\bar{N}_{xy0}$ が $\bar{N}_{xy0} \cos \bar{\omega} \tau$ と同時に作用する場合には, [G]の項が復元力の項( $[F] + \bar{N}_{xy0} [G]$ ) (T)に入ってきてモード間の連成が起るため, 単純共振の主不安定領域 $2\omega_{mn}$ が現れてくる. 静的せん断力が作用しないときに狭かった単純共振の副不安定領域の幅も広がる.

図一9は,  $h=0.02$ の減衰を考慮した場合の不安定領域を



図一8 不安定領域に及ぼす静的せん断力の影響: case I, Type 1,  $\bar{N}_{xy0} = 0.3$ ,  $\mu = 1.5$ .

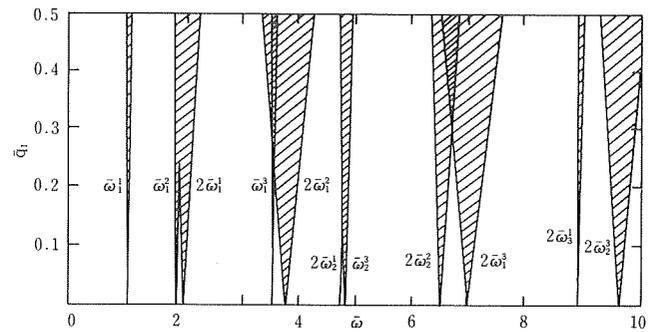


図一9 不安定領域に及ぼす減衰力の影響: case I, Type 1,  $\bar{N}_{xy0} = 0$ ,  $\mu = 1.5$ .

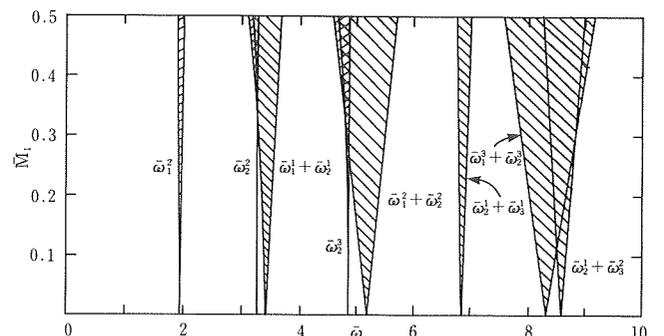
Case 1のType 1に対して示したものである. 図に示すように, 減衰があると, 不安定領域はパラメータ平面の横軸から離れ, 底点が丸みを帯びて, その幅は狭くなる. さらに, 幅の狭い不安定領域は消滅し, 安定化する. このように, 減衰力は特に励振力の小さい部分で効いてくるため, 実際構造における減衰と励振力の正確な評価が重要となってくる.

## 6. 荷重条件の比較

図一10および図一11に, それぞれ等分布変動面内力および面内変動曲げを受ける正方形板の不安定領域を示す<sup>5)6)</sup>. 等分布変動面内力を受ける場合, 図一10に示されるように単純共振が単独に励起され, 結合共振は起こらない. 一方, 曲げモーメントあるいはせん断力が作用する場合には, 図一11あるいは図一4, 5に示すように結合共振が優勢である. しかしながら, 現れる結合共振の種類は異なっている. すなわち, 曲げモーメントの場合, 荷重辺方向に同じ半波数(m)で他の方向に異なった半波数( $n \neq l$ )を持つ結合共振 $\omega_{mn} + \omega_{ml}$ が現れる. 一方, せん断力の場合には, 両方向に異なる半波数( $m \neq k, n \neq l$ )を持つ結合共振 $\omega_{mn} + \omega_{kl}$ が現れる. このように, 不安定領域は荷重条件に依存



図一10 等分布変動面内力による正方形板の不安定領域: case II,  $\bar{q}_0 = 0$ ,  $\mu = 1.0$ .



図一11 面内変動曲げによる正方形板の不安定領域: case II,  $\bar{M}_0 = 0$ ,  $\mu = 1.0$ .

して異なるので、平板構造の動的安定解析を行う場合には、正確な面内力分布を用いる必要がある。また、動的安定問題では、必ずしも単純共振のみが現れるとは限らないので、問題によっては注意を要する。

## 7. 曲げとせん断を同時に受ける場合

曲げとせん断を同時に受ける長方形板の線形自由振動の基礎方程式は、式(2)に曲げモーメントによるx方向面内力の項<sup>6)</sup>を加えることにより、次のように与えられる。

$$L(w) = \rho d \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + D \nabla^4 w - 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - \frac{6}{b^2} \left(1 - \frac{2y}{b}\right) (M_0 + M_t \cos \Omega t) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad (22)$$

ここに、 $M_0$ ,  $M_t$  : 静的曲げモーメントおよび変動曲げモーメントの振幅。

式(22)を無次元化し、式(6)および式(8)を代入してガラーキンを法を用いると、

$$[A]\{\ddot{T}\} + [B]\{T\} + (\bar{N}_{xy0} + \bar{N}_{xyt} \cos \bar{\omega} \tau) [C]\{T\} + (\bar{M}_0 + \bar{M}_t \cos \bar{\omega} \tau) [D]\{T\} = \{0\} \quad (23)$$

ここに、 $\bar{M}_0 = \frac{M_0}{M_{cr}}$ ,  $\bar{M}_t = \frac{M_t}{M_{cr}}$ ,  $M_{cr} = \frac{\lambda_m D \pi^2}{6}$  : 面内曲げによる座屈モーメント、 $\lambda_m$  : 座屈固有値、 $[D]$  : 正方行列(付録3参照)。

$[A]$  の逆行列を式(23)の両辺に左から乗ずれば、

$$[I]\{\ddot{T}\} + [F]\{T\} + (\bar{N}_{xy0} + \bar{N}_{xyt} + \bar{N}_{xyt} \cos \bar{\omega} \tau) [G]\{T\} + (\bar{M}_0 + \bar{M}_t \cos \bar{\omega} \tau) [H]\{T\} = \{0\} \quad (24)$$

ここに、 $[H] = [A]^{-1} \times [D]$ 。

面内曲げによる係数励振マトリックス $[H]$ は次の形をしている<sup>6)</sup>。

$$[H] = \begin{pmatrix} [H]_{11}^{nn} & [0] & [0] & [0] \\ [0] & [H]_{22}^{nn} & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [H]_{33}^{nn} & [0] \\ [0] & [0] & [0] & [H]_{44}^{nn} \end{pmatrix} \quad (25)$$

ここに、

$$[H]_{ij}^{mn} = \begin{pmatrix} 0 & h_{m112} & 0 & h_{m114} \\ h_{m211} & 0 & h_{m213} & 0 \\ 0 & h_{m312} & 0 & h_{m314} \\ h_{m411} & 0 & h_{m413} & 0 \end{pmatrix}$$

式(18)で示した行列の入れ替えに従うと、係数行列 $[H]$ も次のような4個の非零な副マトリックスに変換される。

$$[H] = \begin{pmatrix} [0] & [0] & [H_{13}] & [0] \\ [0] & [0] & [0] & [H_{24}] \\ [H_{31}] & [0] & [0] & [0] \\ [0] & [H_{42}] & [0] & [0] \end{pmatrix} \quad (26)$$

ここに、 $[H_{13}]$ ,  $[H_{24}]$ ,  $[H_{31}]$ ,  $[H_{42}]$  :  $4 \times 4$ の非零な要素からなる副マトリックス。

式(26)を式(18)と対比すると、係数励振マトリックス $[G]$ と $[H]$ の対角要素はどちらも零であり、両行列の非対角項は互いに連成しないのが判る。したがって、曲げとせん断はそれぞれ独立に取り扱うことができる。

## 8. あとがき

本論文は、平板構造の動的安定問題の一つとして、せん断力を受ける長方形板の面外不安定領域を求めたものである。不安定領域の現れ方は荷重条件によって大きく異なることが理解されたと思う。

走行車輛によるプレートガダ腹板の局外面外振動を説明するメカニズムの一つとして、著者らは動的安定性を考えている。このメカニズムによると、不安定領域の斜線部の範囲に振動数比が位置すると、腹板に有意な振動が生ずる可能性がある。パラメトリック共振は、励振力や減衰の大きさに影響を受けるため、今後、実際の構造におけるパラメータ解析や振動計測などが必要であろう。

なお本文中の数値計算および図表の作成には、長崎大学工学部土木工学科の学生諸君、特に川副洋一君(現、三井建設)および西川博公君(現、諫早市役所)の手助けによるところが大きい。記して感謝の意を表します。

## 参考文献

- 1) 夏秋・高橋・小西：構造物の動的安定性——そのアプローチ法と橋梁構造への応用——、片山技報, No. 8, pp. 7-15, 1988.
- 2) 高橋・夏秋・川副・小西：面内変動せん断力を受ける長方形板の動的安定性、構造工学論文集, Vol.35A, pp.45-52, 1988.
- 3) 高橋：Instability of Parametric Dynamic Systems with Non-Uniform Damping, Journal of Sound and Vibration, Vol. 85, pp.257-262, 1982.
- 4) Hsu, C.S. : On the Parametric Excitation of a Dynamic System Having Multiple Degrees of Freedom, Journal of Applied Mechanics, Vol.30, pp.367-372, 1963.
- 5) 八巻・永井：周期的な圧縮荷重を受ける矩形板の動的安定、東北大学高速力学研究所報告, 第36巻, 第351号, pp.147-168, 1975.
- 6) 高橋・田川・池田・松川：面内曲げを受ける長方形板の動的安定性、土木学会論文報告集, 第341号, pp.179-186, 1984.

## 付録1 係数行列 $[A]$ , $[B]$ , $[C]$

$$[A] : a(j + (i-1)N, n + (m-1)N) = \Pi_{mni}^1$$

$$[B] : b(j + (i-1)N, n + (m-1)N) = \omega_{mn}^2 \Pi_{mni}^1$$

$$[C] : c(j + (i-1)N, n + (m-1)N) = -\kappa_{xy} \Pi_{mni}^4$$

ここに、 $\Pi_{mni}^1 = \int W_{mn} W_{ij} d\xi d\eta$ ,  $\Pi_{mni}^4 = \int \frac{\partial^2 W_{mn}}{\partial \xi \partial \eta} W_{ij} d\xi d\eta$ .

付録 2 定数マトリックス  $[M_0]$ ,  $[M_1]$ ,  $[M_2]$

$$[M_0] = \begin{pmatrix} [F] + \bar{N}_{xy0}[G] & \bar{N}_{xyt}[G] & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \bar{N}_{xyt}[G] & 2\{[F] + \bar{N}_{xy0}[G] - \bar{\omega}^2[I]\} & \bar{N}_{xyt}[G] & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{N}_{xyt}[G] & 2\{[F] + \bar{N}_{xy0}[G] - 4\bar{\omega}^2[I]\} & \bar{N}_{xyt}[G] & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{N}_{xyt}[G] & 2\{[F] + \bar{N}_{xy0}[G] - 9\bar{\omega}^2[I]\} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\{[F] + \bar{N}_{xy0}[G] - \bar{\omega}^2[I]\} & \bar{N}_{xyt}[G] & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{N}_{xyt}[G] & 2\{[F] + \bar{N}_{xy0}[G] - 4\bar{\omega}^2[I]\} & \bar{N}_{xyt}[G] \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{N}_{xyt}[G] & 2\{[F] + \bar{N}_{xy0}[G] - 9\bar{\omega}^2[I]\} \end{pmatrix}$$

$$[M_1] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4\bar{\omega}[I] & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -8\bar{\omega}[I] & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -12\bar{\omega}[I] \\ 0 & -4\bar{\omega}[I] & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -8\bar{\omega}[I] & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -12\bar{\omega}[I] & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$[M_2] = \begin{pmatrix} -[I] & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2[I] & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2[I] & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2[I] & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2[I] & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2[I] & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2[I] \end{pmatrix}$$

ここに、 $0 : [I], [F], [G]$  と同じ大きさの零行列.

付録 3 係数行列  $[D]$

$$[D] : d(j + (i-1)N, n + (m-1)N) = -\kappa_m \Pi^2_{mni}$$

$$\text{ここに, } \kappa_m = \frac{1}{\mu^2} \frac{\lambda_m \pi^2}{k_{11}^4} (1-2\eta), \Pi^2_{mni} = \int \frac{\partial^2 W_{mn}}{\partial \xi^2} W_{ij} d\xi d\eta.$$