

共鳴・共振現象の多重波理論 III

——複合弦の強制振動——

福 山 豊

長崎大学教育学部物理学教室

(平成2年10月31日受理)

Multiple Wave Theory of Resonance Phenomena III

——Forced Vibration of Compound String——

Yutaka FUKUYAMA

Department of Physics, Faculty of Education

Nagasaki University, Nagasaki, Japan

(Received Oct. 31, 1990)

Abstract

The resonance phenomena of a string with nonuniform mass density fixed at both ends are considered. Equations showed the vibration form in the string are conducted from the fact that the wave motion in the string is represented to be a superposition of all waves reflected at both ends. Analysis of modes of vibration and calculation of the frequencies of the overtones are done.

§1. は じ め に

固有振動の概念は、波動現象を理解するための重要な概念であり、高等学校の物理においても弦や気柱の共振・共鳴現象と関連して取り扱われている。ところで、弦の線密度がもし一様でない場合は、固有振動のモードはどのようなになるだろうか。この場合の固有振動を理解し、一様な線密度の固有振動と比較するために次のような振動を考察する。

図1に示すような二つの線密度の異なった同じ長さの弦を結合させた複合弦の両端を固定端とし、この弦の途中にU型磁石をまたがらせて固定する。その後、複合弦の両端に交流電流を流すと、とびとびの振動数の場合に大きな振動を生じ、共振していることがわかる。この場合の非調和的振動の固有振動は、単一線密度による固有振動のモードとはかなり異なる振動パターンを示し、また、非調和的振動の一連の倍振動の振動数が基本振動の振動数の整数倍にはならずかなりずれることが報告されている^{1), 2)}。

そこで、本報では、著者が弦や気柱の共振・共鳴現象を理解するために用いた多重波による理論的考察³⁾⁻¹⁷⁾を、この複合弦の共振現象に適用して、複合弦の振動の振る舞いを理論的に導き出し、その結果の検討を試みたので報告する。

§ 2. 複合弦の振動変位の多重波表示

両端を固定端とした長さ ℓ の左側半分と右側半分とが、線密度 ρ の弦 G_1 と複合弦 ρ' の弦 G_2 とからできている複合弦を考える。

この複合弦の左の端を座標の原点ととり、二つの弦の結合点を $\ell/2$ とし、右の端を ℓ とする。左の端から d のところに弦をまたいで U 型磁石を固定する。この装置において、弦の両端に交流電流を流し、これによって励起された複合弦の振動の様子を理論的に考察する。

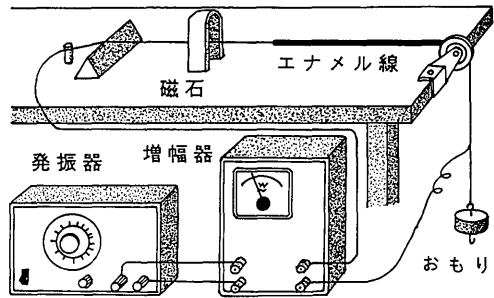


図1 複合弦の強制振動実験

弦上の位置 x は、図2に示すように、(A)左の端と磁石の間、(B)磁石と結合点の間、(C)結合点と右の端の間のいずれかによって振動の様子を区別して考察する必要がある。この図でM, N, C, DとXは、それぞれ、左の弦の固定端、右の弦の固定端、二つの弦の結合点、磁石の位置、それに弦上の着目点を表している。

磁石の位置で発生し、弦上を伝播する正弦波の振幅を A とし、振動数と角振動数を、それぞれ、 ν と ω とする。このときの弦 G_1 と弦 G_2 の伝播速度 (v)、波長 (λ) と波数 ($k=2\pi/\lambda=\omega/v$) は、 v, v' と λ, λ' と k, k' とによって表すことにする。

また、左端と右端の固定端での反射係数は、 $R_{10}(=-1)$ と $R_{23}(=-1)$ とし、弦 G_1 の波が弦 G_2 の端で反射されるとき反射係数と弦 G_2 の波が G_1 の端で反射されるとき反射係数は、 R_{12} と $R_{21}(=-R_{12})$ とする。さらに、弦 G_1 の波が弦 G_2 へ伝播する透過係数と、弦 G_2 の波が弦 G_1 へ伝播する透過係数は、それぞれ、 $T_{12}(=1+R_{12})$ と $T_{21}(=1+R_{21}=1-R_{12})$ とする。

さらに、弦上の波は、距離を s だけ伝播すると、そのときの波の振幅は e^{-as} 倍だけ小さくなるものと仮定した。ただし、弦 G_1 と弦 G_2 の減衰係数を、それぞれ、 a と a' と表した。

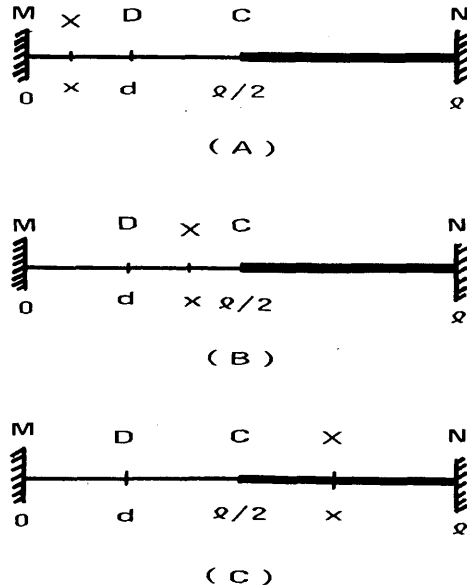


図2 x の範囲、(A) $0 \leq x \leq d$, (B) $d \leq x \leq \ell/2$, (C) $\ell/2 \leq x \leq \ell$

A. $0 \leq x \leq d$ の弦の振動変位

時刻 t における弦上 x の位置での変位 $y^A(x, t)$ は、磁石のところで発生して右へ伝播していく波 $y_R^A(x, t)$ と左へ伝播していく波 $y_L^A(x, t)$ との合成によって表示できる。

まず、右へ伝播していく波から考えよう。磁石の位置 D から伝播し、 C や N で反射されてはじめて X に到着している波 $y_{R,1}^A(x, t)$ は

$$\begin{aligned} y_{R,1}^A(x, t) = & R_{12} A e^{-a(\ell-d-x)} \sin\{\omega t - k(\ell-d-x)\} \\ & + T_{12} R_{23} T_{21} A e^{-a(\ell-d-x)-a'\ell} \sin\{\omega t - k(\ell-d-x) - k'\ell\} \\ & + T_{12} R_{23} R_{21} R_{23} T_{21} A e^{-a(\ell-d-x)-2a'\ell} \sin\{\omega t - k(\ell-d-x) - 2k'\ell\} \\ & + T_{12} (R_{23} R_{21})^2 R_{23} T_{21} A e^{-a(\ell-d-x)-3a'\ell} \sin\{\omega t - k(\ell-d-x) - 3k'\ell\} \\ & + \dots \end{aligned} \quad (1)$$

と表すことができる。

この式の右辺第1項は、 D で発生した波が右へ進行し、結合点 C で1度反射されて X に到着した波、第2項は、 D からの波が C を通過して弦の右端 N で反射して、また C を通過して X に到着した波を表している。第3項は、 D からの波が C を通過し、 N で反射し、また C で反射され、さらに N で反射され C を通過して X に到着した波である。以下同様にし、 D からの波が C を通過して N で反射され、それが C で2度、3度と反射されてはじめて X に到着した波を表している。

ここで、(1)式を、あとの計算を簡単にするために、複素数で表示することになると、

$$y_{R,1}^A(x, t) = \text{Im}[Y_{R,1}^A(x, t)] \quad (2)$$

で表される $Y_{R,1}^A(x, t)$ を導入すると便利であり、以後も複素数表示 Y を使用する。

その結果、(1)式は

$$\begin{aligned} Y_{R,1}^A(x, t) = & R_{12} Y_{R,0}^A(x, t) \\ & + T_{12} R_{23} T_{21} e^{-a'\ell - ik'\ell} Y_{R,0}^A(x, t) \\ & + T_{12} R_{23} R_{21} R_{23} T_{21} e^{-2a'\ell - i2k'\ell} Y_{R,0}^A(x, t) \\ & + T_{12} (R_{23} R_{21})^2 R_{23} T_{21} e^{-3a'\ell - i3k'\ell} Y_{R,0}^A(x, t) \\ & + \dots \end{aligned} \quad (3)$$

と表すことができる。

ただし、

$$Y_{R,0}^A(x, t) = A e^{-a(\ell-d-x) + i\{\omega t - k(\ell-d-x)\}} \quad (4)$$

と定義している。

(3)式は、等比級数の和の公式を用いて

$$\begin{aligned} Y_{R,1}^A(x, t) = & [R_{12} + T_{12} R_{23} T_{21} e^{-a'\ell - ik'\ell} \{1 + R_{23} R_{21} e^{-a'\ell - ik'\ell} \\ & + (R_{23} R_{21})^2 e^{-2a'\ell - i2k'\ell} + \dots\}] Y_{R,0}^A(x, t) \\ = & \left[R_{12} + \frac{T_{12} R_{23} T_{21} e^{-a'\ell - ik'\ell}}{1 - R_{23} R_{21} e^{-a'\ell - ik'\ell}} \right] Y_{R,0}^A(x, t) \\ = & R Y_{R,0}^A(x, t) \end{aligned}$$

と表される。

ここで、

$$R = R_{12} + \frac{T_{12} R_{23} T_{21} e^{-a'\ell - ik'\ell}}{1 - R_{23} R_{21} e^{-a'\ell - ik'\ell}} \quad (6)$$

と定義した。また、この級数が収束することは付録Aに示す。

次に、さらに左へ進行し、弦の左端Mで反射してXに2度目に到着している波 $Y_{R,2}^A(x,t)$ は

$$Y_{R,2}^A(x,t) = R_{10} e^{-2ax - i2kx} Y_{R,1}^A(x,t) \quad (7)$$

で表されることがわかる。

さらに右へ進行し、CとNで数回反射され、3度目にXに到着している波 $Y_{R,3}^A(x,t)$ は

$$\begin{aligned} Y_{R,3}^A(x,t) &= R e^{-a(\ell-2x) - ik(\ell-2x)} Y_{R,2}^A(x,t) \\ &= R_{10} R e^{-a\ell - ik\ell} Y_{R,1}^A(x,t) \end{aligned} \quad (8)$$

と表される。

同様に、Xに4度目、5度目、6度目、……と到着している波は、それぞれ、

$$\begin{aligned} Y_{R,4}^A(x,t) &= R_{10} e^{-2a\ell - i2k\ell} Y_{R,3}^A(x,t) \\ &= R_{10}^2 R e^{-a(\ell+2x) - ik(\ell+2x)} Y_{R,1}^A(x,t), \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} Y_{R,5}^A(x,t) &= R e^{-a(\ell-2x) + ik(\ell-2x)} Y_{R,4}^A(x,t) \\ &= R_{10}^2 R^2 e^{-2a\ell - i2k\ell} Y_{R,1}^A(x,t), \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} Y_{R,6}^A(x,t) &= R_{10} e^{-2a\ell - i2k\ell} Y_{R,5}^A(x,t) \\ &= R_{10}^3 R^2 e^{-2a(\ell+x) - i2k(\ell-x)} Y_{R,1}^A(x,t), \end{aligned} \quad (11)$$

• • • • •

と表すことができる。

これらのうち奇数番目の波(5), (8), (10)式を加え合わせると

$$\begin{aligned} Y_{R,odd}^A(x,t) &= [1 + R_{10} R e^{-a\ell - ik\ell} + (R_{10} R)^2 e^{-2a\ell - i2k\ell} + \dots] Y_{R,1}^A(x,t) \\ &= \frac{1}{1 - R_{10} R e^{-a\ell - ik\ell}} Y_{R,1}^A(x,t) \end{aligned} \quad (12)$$

となる。この級数が収束することは付録Bに示す。

また、偶数番目の波(7), (9), (11)式を加え合わせると

$$\begin{aligned} Y_{R,even}^A(x,t) &= [1 + R_{10} R e^{-a\ell - ik\ell} + (R_{10} R)^2 e^{-2a\ell - i2k\ell} + \dots] R_{10} e^{-2ax - i2kx} Y_{R,1}^A(x,t) \\ &= \frac{R_{10} e^{-2ax - i2kx}}{1 - R_{10} R e^{-a\ell - ik\ell}} Y_{R,1}^A(x,t) \end{aligned} \quad (13)$$

となる。

さらに、(12)式と(13)式を合成すると、磁石の位置で発生した波のうち、右へ伝播していった波を、すべて重ね合わせた合成波 $Y_R^A(x,t)$ を求めることができ

$$Y_R^A(x,t) = \frac{1 + R_{10} e^{-2ax - i2kx}}{1 - R_{10} R e^{-a\ell - ik\ell}} Y_{R,1}^A(x,t) \quad (14)$$

と表される。

次に、Dで発生した波が左へ伝播していった波について考えてみる。前と同様に考えると、弦の両端や結合点で反射して、Xに1度目、2度目、3度目、……と到着している波は、それぞれ、

$$Y_{L,1}^A(x,t) = A e^{-a(d-x) + i\{\omega t - k(d-x)\}}, \quad (15)$$

$$Y_{L,2}^A(x,t) = R_{10} e^{-2ax - i2kx} Y_{L,1}^A(x,t), \quad (16)$$

$$\begin{aligned} Y_{L,3}^A(x,t) &= R e^{-a(\ell-2x) - ik(\ell-2x)} Y_{L,2}^A(x,t) \\ &= R_{10} R e^{-a\ell - ik\ell} Y_{L,1}^A(x,t), \end{aligned} \quad (17)$$

$$Y_{L,4}^A(x,t) = R_{10} e^{-2ax - i2kx} Y_{L,3}^A(x,t) \quad (18)$$

$$\begin{aligned}
&= R_{10}^2 R e^{-a(\ell+2x)-ik(\ell+2x)} Y_{L,1}^A(x, t), \\
Y_{L,5}^A(x, t) &= R e^{-a(\ell-2x)-ik(\ell-2x)} Y_{L,4}^A(x, t) \\
&= R_{10}^2 R^2 e^{-2a\ell-2ik\ell} Y_{L,1}^A(x, t),
\end{aligned} \tag{19}$$

$$\begin{aligned}
Y_{L,6}^A(x, t) &= R_{10} e^{-2ax-2ikx} Y_{L,5}^A(x, t) \\
&= R_{10}^3 R^2 e^{-2a(\ell+x)-2ik(\ell+x)} Y_{L,1}^A(x, t)
\end{aligned} \tag{20}$$

と表される。

そこで、奇数項(15), (17), (19)式の合成 $Y_{L,odd}^A(x, t)$ と偶数項(16), (18), (20)式の合成 $Y_{L,even}^A(x, t)$ は、それぞれ、

$$\begin{aligned}
Y_{L,odd}^A(x, t) &= [1 + R_{10} R e^{-a\ell-ik\ell} + (R_{10} R)^2 e^{-2a\ell-2ik\ell} + \dots] Y_{L,1}^A(x, t) \\
&= \frac{1}{1 - R_{10} R e^{-a\ell-ik\ell}} Y_{L,1}^A(x, t)
\end{aligned} \tag{21}$$

$$\begin{aligned}
Y_{L,even}^A(x, t) &= [1 + R_{10} R e^{-a\ell-ik\ell} + (R_{10} R)^2 e^{-2a\ell-2ik\ell} + \dots] R_{10} e^{-2ax-2ikx} Y_{L,1}^A(x, t) \\
&= \frac{R_{10} e^{-2ax-2ikx}}{1 - R_{10} R e^{-a\ell-ik\ell}} Y_{L,1}^A(x, t)
\end{aligned} \tag{22}$$

となり、結局、磁石の位置で発生して左へ伝播していったすべての波を重ね合わせた合成波 $Y_L^A(x, t)$ は、(21)式と(22)式から

$$Y_L^A(x, t) = \frac{1 + R_{10} e^{-2ax-2ikx}}{1 - R_{10} R e^{-a\ell-ik\ell}} Y_{L,1}^A(x, t) \tag{23}$$

と表すことができる。

以上の結果から、(14)式と(23)式をもちいて、MとDの間のXの位置における振動の変位 $Y^A(x, t)$ は

$$Y^A(x, t) = \frac{1 + R_{10} e^{-2ax-2ikx}}{1 - R_{10} R e^{-a\ell-ik\ell}} \{ Y_{R,1}^A(x, t) + Y_{L,1}^A(x, t) \} \tag{24}$$

となる。

この式に、(4), (5)と(15)式を代入し、 R_{10} は固定端であり -1 であることを考慮すると

$$Y^A(x, t) = \frac{1 - e^{-2ax-2ikx}}{1 + R e^{-a\ell-ik\ell}} [R A e^{-a(\ell-d-x)+i(\omega t-k(\ell-d-x))} + A e^{-a(d-x)+i(\omega t-k(d-x))}] \tag{25}$$

となる。

(B.4)式から R は

$$R = \frac{R_{12} - e^{-a'\ell-ik'\ell}}{1 - R_{12} e^{-a'\ell-ik'\ell}} \tag{26}$$

と表されるから、(25)式は

$$\begin{aligned}
Y^A(x, t) &= [(1 - e^{-2ax-2ikx}) \{ (R_{12} - e^{-a'\ell-ik'\ell}) A e^{-a(\ell-d-x)+i(\omega t-k(\ell-d-x))} \\
&\quad + (1 - R_{12} e^{-a'\ell-ik'\ell}) A e^{-a(d-x)+i(\omega t-k(d-x))} \} / [1 + R_{12} e^{-a\ell-ik\ell} \\
&\quad - R_{12} e^{-a'\ell-ik'\ell} - e^{-a'\ell-ik'\ell-a\ell-ik\ell}]]
\end{aligned} \tag{27}$$

と表される。ここで、

$$R_{10} = R_{23} = -1 \tag{28}$$

であることをもちいた。

これは、さらに変形することができ

$$\begin{aligned}
Y^A(x, t) &= 2A e^{i\omega t} \sinh\{(a+ik)x\} \\
&\quad \times [\sinh\{a(\ell/2-d) + a'\ell/2 + ik(\ell/2-d) + ik'\ell/2\}]
\end{aligned} \tag{29}$$

$$+ R_{12} \sinh\{-a(\ell/2-d) + a'\ell/2 - ik(\ell/2-d) + ik'\ell/2\}] \\ \times 1/[\sinh\{(a+a')\ell/2 + i(k+k')\ell/2\} - R_{12} \sinh\{(a-a')\ell/2 + i(k-k')\ell/2\}]$$

と表すことができる。

B. $d \leq x \leq \ell/2$ の場合の振動変位

次に、磁石と弦の結合点との間の振動について考察する。ここでも磁石の位置Dで発生した正弦波が、それぞれ右と左へ進行する場合を別々に計算する。

まず、右へ進行し、はじめてXに到着している波 $Y_{R,1}^B(x, t)$ は

$$Y_{R,1}^B(x, t) = A e^{-a(x-d) + i(\omega t - k(x-d))} \quad (30)$$

となる。

さらに右へ進行し、結合点Cや弦の端Nで反射され、2度目にXに到着している波 $Y_{R,2}^B(x, t)$ は、Aの場合と同様にして

$$\begin{aligned} Y_{R,2}^B(x, t) &= R_{12} e^{-a(\ell-2x) - ik(\ell-2x)} Y_{R,1}^B(x, t) \\ &\quad + T_{12} R_{23} T_{21} e^{-a(\ell-2x) - a'\ell - ik(\ell-2x) - ik'\ell} Y_{R,1}^B(x, t) \\ &\quad + T_{12} R_{23} R_{21} R_{23} T_{21} e^{-a(\ell-2x) - 2a'\ell - ik(\ell-2x) - i2k'\ell} Y_{R,1}^B(x, t) \\ &\quad + T_{12} (R_{23} R_{21})^2 R_{23} T_{21} e^{-a(\ell-2x) - 3a'\ell - ik(\ell-2x) - i3k'\ell} Y_{R,1}^B(x, t) \\ &\quad + \dots \\ &= [R_{12} + T_{12} R_{23} T_{21} e^{-a'\ell - ik'\ell} \{1 + R_{21} R_{23} e^{-a'\ell - ik'\ell} + (R_{21} R_{23})^2 e^{-2a'\ell - i2k'\ell} + \dots\}] \\ &\quad \times e^{-a(\ell-2x) - ik(\ell-2x)} Y_{R,1}^B(x, t) \\ &= \left[R_{12} + \frac{T_{12} R_{23} T_{21} e^{-a'\ell - ik'\ell}}{1 - R_{21} R_{23} e^{-a'\ell - ik'\ell}} \right] e^{-a(\ell-2x) - ik(\ell-2x)} Y_{R,1}^B(x, t) \\ &= R e^{-a(\ell-2x) - ik(\ell-2x)} Y_{R,1}^B(x, t) \end{aligned} \quad (31)$$

と表される。ただし、(6)式を用いた。

同様にして、M、C、Nで反射して、3度目、4度目、……にXに到着している波は、

$$\begin{aligned} Y_{R,3}^B(x, t) &= R_{10} e^{-2ax - i2kx} Y_{R,2}^B(x, t) \\ &= R_{10} R e^{-a\ell - ik\ell} Y_{R,1}^B(x, t), \end{aligned} \quad (32)$$

$$\begin{aligned} Y_{R,4}^B(x, t) &= R e^{-a(\ell-2x) - ik(\ell-2x)} Y_{R,3}^B(x, t) \\ &= R_{10} R^2 e^{-2a(\ell-x) - i2k(\ell-x)} Y_{R,1}^B(x, t), \end{aligned} \quad (33)$$

$$\begin{aligned} Y_{R,5}^B(x, t) &= R_{10} e^{-2ax - i2kx} Y_{R,4}^B(x, t) \\ &= R_{10} R^2 e^{-2a\ell - i2k\ell} Y_{R,1}^B(x, t), \end{aligned} \quad (34)$$

$$\begin{aligned} Y_{R,6}^B(x, t) &= R e^{-a(\ell-2x) - ik(\ell-2x)} Y_{R,5}^B(x, t) \\ &= R_{10} R^3 e^{-a(3\ell-2x) - ik(3\ell-2x)} Y_{R,1}^B(x, t) \end{aligned} \quad (35)$$

...

と表すことができる。

奇数番目の波の重ね合わせは、(30)、(32)と(34)式から

$$\begin{aligned} Y_{R,odd}^B(x, t) &= \{1 + R_{10} R e^{-a\ell - ik\ell} + (R_{10} R)^2 e^{-2a\ell - i2k\ell} + \dots\} Y_{R,1}^B(x, t) \\ &= \frac{1}{1 - R_{10} R e^{-a\ell - ik\ell}} Y_{R,1}^B(x, t) \end{aligned} \quad (36)$$

となり、また、偶数番目の波の重ね合わせは、(31)、(33)と(35)式から

$$Y_{R,even}^B(x, t) = \{1 + R_{10} R e^{-a\ell - ik\ell} + (R_{10} R)^2 e^{-2a\ell - i2k\ell} + \dots\} R e^{-a(\ell-2x) - ik(\ell-2x)} Y_{R,1}^B(x, t)$$

$$= \frac{Re^{-a(\ell-2x)-ik(\ell-2x)}}{1-R_{10}Re^{-a\ell-ik\ell}} Y_{R,1}^B(x, t) \quad (37)$$

と表される。

その結果、磁石の位置で発生し、右へ進行している波の合成波 $Y_R^B(x, t)$ は、(36)式と(37)式から

$$Y_R^B(x, t) = \frac{1+Re^{-a(\ell-2x)-ik(\ell-2x)}}{1-R_{10}Re^{-a\ell-ik\ell}} Y_{R,1}^B(x, t) \quad (38)$$

と表すことができる。

次に、磁石の位置で発生し左へ進行していった波について考察しよう。

右へ進行する場合と同じようにして、第 n 度目に X に到着している波 $Y_{L,n}^B(x, t)$ は、

$$Y_{L,1}^B(x, t) = R_{10}Ae^{-a(x+d)+i\{\omega t-k(x+d)\}}, \quad (39)$$

$$\begin{aligned} Y_{L,2}^B(x, t) &= R_{12}e^{-a(\ell-2x)-ik(\ell-2x)} Y_{L,1}^B(x, t) \\ &\quad + T_{12}R_{23}T_{21}e^{-a(\ell-2x)-a'\ell-ik(\ell-2x)-k'\ell} Y_{L,1}^B(x, t) \\ &\quad + T_{12}R_{23}R_{21}R_{23}T_{21}e^{-a(\ell-2x)-2a'\ell-ik(\ell-2x)-2k'\ell} Y_{L,1}^B(x, t) \\ &\quad + T_{12}(R_{23}R_{21})^2R_{23}T_{21}e^{-a(\ell-2x)-3a'\ell-ik(\ell-2x)-3k'\ell} Y_{L,1}^B(x, t) \\ &\quad + \dots \end{aligned} \quad (40)$$

$$= Re^{-a(\ell-2x)-ik(\ell-2x)} Y_{L,1}^B(x, t),$$

$$\begin{aligned} Y_{L,3}^B(x, t) &= R_{10}e^{-2ax-i2kx} Y_{L,2}^B(x, t) \\ &= R_{10}Re^{-a\ell-ik\ell} Y_{L,1}^B(x, t), \end{aligned} \quad (41)$$

$$\begin{aligned} Y_{L,4}^B(x, t) &= Re^{-a(\ell-2x)-ik(\ell-2x)} Y_{L,3}^B(x, t) \\ &= R_{10}R^2e^{-2a(\ell-x)-i2k(\ell-x)} Y_{L,1}^B(x, t), \end{aligned} \quad (42)$$

$$\begin{aligned} Y_{L,5}^B(x, t) &= R_{10}Re^{-2ax-i2kx} Y_{L,4}^B(x, t) \\ &= R_{10}^2R^2e^{-2a\ell-i2k\ell} Y_{L,1}^B(x, t), \end{aligned} \quad (43)$$

$$\begin{aligned} Y_{L,6}^B(x, t) &= Re^{-a(\ell-2x)-ik(\ell-2x)} Y_{L,5}^B(x, t) \\ &= R_{10}^2R^3e^{-a(3\ell-2x)-ik(3\ell-2x)} Y_{L,1}^B(x, t), \end{aligned} \quad (44)$$

• • • •

と表される。

これらの式を用いて、奇数番目の波の重ね合わせと、偶数番目の波の重ね合わせのおのの合成波は、

$$\begin{aligned} Y_{L,odd}^B(x, t) &= \{1+R_{10}Re^{-a\ell-ik\ell}+(R_{10}R)^2e^{-2a\ell-i2k\ell}+\dots\} Y_{L,1}^B(x, t) \\ &= \frac{1}{R_{10}Re^{-a\ell-ik\ell}} Y_{L,1}^B(x, t), \end{aligned} \quad (45)$$

$$\begin{aligned} Y_{L,even}^B(x, t) &= \{1+R_{10}Re^{-a\ell-ik\ell}+(R_{10}R)^2e^{-2a\ell-i2k\ell}+\dots\} Re^{-a(\ell-2x)-ik(\ell-2x)} Y_{L,1}^B(x, t) \\ &= \frac{Re^{-a(\ell-2x)-ik(\ell-2x)}}{1-R_{10}Re^{-a\ell-ik\ell}} Y_{L,1}^B(x, t) \end{aligned} \quad (46)$$

となる。

その結果、磁石のところから左へ進行していった波の合成波 $Y_L^B(x, t)$ は、(45)式と(46)式から

$$Y_L^B(x, t) = \frac{1+Re^{-a(\ell-2x)-ik(\ell-2x)}}{1-R_{10}Re^{-a\ell-ik\ell}} Y_{L,1}^B(x, t) \quad (47)$$

と表すことができる。

(38)式と(47)式から、DとCの間のXにおける振動の変位 $Y^B(x, t)$ は

$$Y^B(x, t) = \frac{1 + Re^{-a(\ell-2x) - ik(\ell-2x)}}{1 - R_{10}Re^{-a\ell - ik\ell}} \{Y_{R,1}^B(x, t) + Y_{L,1}^B(x, t)\} \quad (48)$$

と表される。

この式に、(26)、(30)と(39)式を用いると

$$Y^B(x, t) = Ae^{-ax + i(\omega t - kx)} (e^{ad + ikd} - e^{-ad - ikd}) \times \frac{\{(1 - R_{12}e^{-a'\ell - ik'\ell}) + (R_{12} - e^{-a'\ell - ik'\ell})e^{-a(\ell-2x) - ik(\ell-2x)}\}}{1 + R_{12}e^{-a\ell - ik\ell} - R_{12}e^{-a'\ell - ik'\ell} - e^{-a\ell - ik\ell - a'\ell - ik'\ell}} \quad (49)$$

となり、さらに二、三の計算の結果

$$Y^B(x, t) = 2Ae^{i\omega t} \sinh\{(a + ik)d\} \times \{\sinh\{a(\ell/2 - x) + a'\ell/2 + ik(\ell/2 - x) + ik'\ell/2\} + R_{12} \sinh\{-a(\ell/2 - x) + a'\ell/2 - ik(\ell/2 - x) + ik'\ell/2\} \times 1/[\sinh\{(a + a')\ell/2 + i(k + k')\ell/2 - R_{12} \sinh\{(a - a')\ell/2 + i(k - k')\ell/2\}]\} \quad (50)$$

と表すことができる。

C. $\ell/2 \leq x \leq \ell$ の場合の弦の振動変位

ここでは、2種の弦の結合点と右の弦の右端の間にある位置の振動について考察する。

まず、磁石の位置で発生した波が右へ進行して、はじめてXに到着している波 $Y_{R,1}^C(x, t)$ を考えるため

$$Y_{R,0}^C(x, t) = Ae^{-a(\ell/2 - d) - a'(x - \ell/2) + i(\omega t - k(\ell/2 - d) - k'(x - \ell/2))} \quad (51)$$

を導入すると、 $Y_{R,1}^C(x, t)$ は

$$\begin{aligned} Y_{R,1}^C(x, t) &= T_{12}Y_{R,0}^C(x, t) \\ &\quad + R_{12}R_{10}T_{12}e^{-a\ell - ik\ell}Y_{R,0}^C(x, t) \\ &\quad + (R_{12}R_{10})^2T_{12}e^{-2a\ell - i2k\ell}Y_{R,0}^C(x, t) \\ &\quad + (R_{12}R_{10})^3T_{12}e^{-3a\ell - i3k\ell}Y_{R,0}^C(x, t) \\ &\quad + \dots \\ &= \{1 + R_{12}R_{10}e^{-a\ell - ik\ell} + (R_{12}R_{10})^2e^{-2a\ell - i2k\ell} + \dots\} T_{12}Y_{R,0}^C(x, t) \\ &= \frac{T_{12}}{1 - R_{12}R_{10}e^{-a\ell - ik\ell}} Y_{R,0}^C(x, t) \end{aligned} \quad (52)$$

と表される。この級数が収束することは付録Aに示す。

また、2度目にXに到着している波 $Y_{R,2}^C(x, t)$ は、

$$Y_{R,2}^C(x, t) = R_{23}e^{-2a'(\ell - x) - i2k'(\ell - x)} Y_{R,1}^C(x, t) \quad (53)$$

と表され、3度目にXに到着している波 $Y_{R,3}^C(x, t)$ は

$$\begin{aligned} Y_{R,3}^C(x, t) &= R_{21}e^{-a'(2x - \ell) - ik'(2x - \ell)} Y_{R,2}^C(x, t) \\ &\quad + T_{21}R_{10}T_{12}e^{-a'(2x - \ell) - ik'(2x - \ell) - a\ell - ik\ell} \{1 + R_{10}R_{12}e^{-a\ell - ik\ell} + (R_{10}R_{12})^2e^{-2a\ell - i2k\ell} + \dots\} \\ &= e^{-a'(2x - \ell) - ik'(2x - \ell)} \left\{ R_{21} + \frac{T_{21}R_{10}T_{12}e^{-a\ell - ik\ell}}{1 - R_{10}R_{12}e^{-a\ell - ik\ell}} \right\} Y_{R,2}^C(x, t) \\ &= R_{23}Se^{-a'\ell - ik'\ell} Y_{R,1}^C(x, t) \end{aligned} \quad (54)$$

と表すことができる。ただし、Sは

$$S = R_{21} + \frac{T_{21}R_{10}T_{12}e^{-a\ell - ik\ell}}{1 - R_{10}R_{12}e^{-a\ell - ik\ell}} \quad (55)$$

と定義した。

同様に、4 度目、5 度目、6 度目に X に到着している波は、それぞれ、

$$\begin{aligned} Y_{R,4}^c(x,t) &= R_{23} e^{-2a'(\ell-x)-i2k'(\ell-x)} Y_{R,3}^c(x,t) \\ &= R_{23}^2 S e^{-a'(3\ell-2x)-ik'(3\ell-2x)} Y_{R,1}^c(x,t), \end{aligned} \quad (56)$$

$$\begin{aligned} Y_{R,5}^c(x,t) &= S e^{-a'(2x-\ell)-ik'(2x-\ell)} Y_{R,4}^c(x,t) \\ &= R_{23}^2 S^2 e^{-2a'\ell-i2k'\ell} Y_{R,1}^c(x,t), \end{aligned} \quad (57)$$

$$\begin{aligned} Y_{R,6}^c(x,t) &= R_{23} e^{-2a'(\ell-x)-i2k'(\ell-x)} Y_{R,5}^c(x,t) \\ &= R_{23}^3 S^2 e^{-a'2(2\ell-x)-i2k'(2\ell-x)} Y_{R,1}^c(x,t) \end{aligned} \quad (58)$$

• • • •

と表される。

(54)式から(58)式を用いて、奇数番目と偶数番目の各合成波は、それぞれ、

$$\begin{aligned} Y_{R,odd}^c(x,t) &= \{1 + R_{23} S e^{-a'\ell-ik'\ell} + (R_{23} S)^2 e^{-2a'\ell-i2k'\ell} + \dots\} Y_{R,1}^c(x,t) \\ &= \frac{1}{1 - R_{23} S e^{-a'\ell-ik'\ell}} Y_{R,1}^c(x,t), \end{aligned} \quad (59)$$

$$\begin{aligned} Y_{R,even}^c(x,t) &= R_{23} e^{-2a'(\ell-x)-i2k'(\ell-x)} \{1 + R_{23} S e^{-a'\ell-ik'\ell} + (R_{23} S)^2 e^{-2a'\ell-i2k'\ell} + \dots\} Y_{R,1}^c(x,t) \\ &= \frac{R_{23} e^{-2a'(\ell-x)-i2k'(\ell-x)}}{1 - R_{23} S e^{-a'\ell-ik'\ell}} Y_{R,1}^c(x,t) \end{aligned} \quad (60)$$

となる。これらの級数が収束することは付録 B に示す。

(59)式と(60)式から、磁石の位置で発生し、右へ進行していった波をすべて重ね合わせた合成波 $Y_R^c(x,t)$ は

$$Y_R^c(x,t) = \frac{1 + R_{23} e^{-2a'(\ell-x)-i2k'(\ell-x)}}{1 - R_{23} S e^{-a'\ell-ik'\ell}} Y_{R,1}^c(x,t) \quad (61)$$

と表される。

次に、磁石の位置で発生した波が左へ進行していった波について考察する。まず始めにはじめて X に到着している波 $Y_{L,1}^c(x,t)$ を考えるため

$$Y_{L,0}^c(x,t) = A e^{-a(\ell/2+d)-a'(x-\ell/2)+i(\omega t-k(\ell/2+d)-k'(x-\ell/2))} \quad (62)$$

を用いると

$$\begin{aligned} Y_{L,1}^c(x,t) &= R_{10} T_{12} Y_{L,0}^c(x,t) \\ &\quad + R_{10} R_{12} R_{10} T_{12} e^{-a\ell-ik\ell} Y_{L,0}^c(x,t) \\ &\quad + (R_{10} R_{12})^2 R_{10} T_{12} e^{-2a\ell-i2k\ell} Y_{L,0}^c(x,t) \\ &\quad + \dots \\ &= \{1 + R_{12} R_{10} e^{-a\ell-ik\ell} + (R_{12} R_{10})^2 e^{-2a\ell-i2k\ell} + \dots\} R_{10} T_{12} Y_{L,0}^c(x,t) \\ &= \frac{R_{10} T_{12}}{1 - R_{12} R_{10} e^{-a\ell-ik\ell}} Y_{L,0}^c(x,t) \end{aligned} \quad (63)$$

と表される。

2 度目に X に到着している波 $Y_{L,2}^c(x,t)$ は

$$Y_{L,2}^c(x,t) = R_{23} e^{-2a'(\ell-x)-i2k'(\ell-x)} Y_{L,1}^c(x,t) \quad (64)$$

となり、3 度目、4 度目、5 度目、6 度目……に X に到着している波は、それぞれ、

$$\begin{aligned} Y_{L,3}^c(x,t) &= S e^{-a'(2x-\ell)-ik'(2x-\ell)} Y_{L,2}^c(x,t) \\ &= R_{23} S e^{-a'\ell-ik'\ell} Y_{L,1}^c(x,t) \end{aligned} \quad (65)$$

$$\begin{aligned} Y_{L,4}^c(x,t) &= R_{23} e^{-2a'(\ell-x)-i2k'(\ell-x)} Y_{L,3}^c(x,t) \\ &= R_{23}^2 S e^{-a'(3\ell-2x)-ik'(3\ell-2x)} Y_{L,1}^c(x,t) \end{aligned} \quad (66)$$

$$Y_{L,5}^c(x, t) = S e^{-a'(2x-\ell) - ik'(2x-\ell)} Y_{L,4}^c(x, t) \\ = R_{23}^2 S^2 e^{-2a'\ell - i2k'\ell} Y_{L,1}^c(x, t), \quad (67)$$

$$Y_{L,6}^c(x, t) = R_{23} e^{-2a'(\ell-x) - i2k'(\ell-x)} Y_{L,5}^c(x, t) \\ = R_{23}^3 S^2 e^{-2a'(2\ell-x) - i2k'(2\ell-x)} Y_{L,1}^c(x, t) \quad (68)$$

• • • •

となる。

奇数番目と偶数番目のおのこの合成波は

$$Y_{L,odd}^c(x, t) = \frac{1}{1 - R_{23} S e^{-a'\ell - ik'\ell}} Y_{L,1}^c(x, t), \quad (69)$$

$$Y_{L,even}^c(x, t) = \frac{R_{23} e^{-2a'(\ell-x) - i2k'(\ell-x)}}{1 - R_{23} S e^{-a'\ell - ik'\ell}} Y_{L,1}^c(x, t) \quad (70)$$

となるので、(69)と(70)式の合成波 $Y_L^c(x, t)$ は

$$Y_L^c(x, t) = \frac{1 + R_{23} e^{-2a'(\ell-x) - i2k'(\ell-x)}}{1 - R_{23} S e^{-a'\ell - ik'\ell}} Y_{L,1}^c(x, t) \quad (71)$$

と表される。

(61)式と(71)式から、CとNの間のXにおける振動の変位 $Y^c(x, t)$ は

$$Y^c(x, t) = \frac{1 + R_{23} e^{-2a'(\ell-x) - i2k'(\ell-x)}}{1 - R_{23} S e^{-a'\ell - ik'\ell}} \{ Y_{R,1}^c(x, t) + Y_{L,1}^c(x, t) \} \quad (72)$$

となることがわかる。

この(72)式に(51), (52), (62), (63)式と(B-4)式を用いると

$$Y^c(x, t) = A e^{i\omega t} (e^{ad+ikd} - e^{-ad-ikd}) e^{-a\ell/2 - a'(x-\ell/2) - i(k\ell/2 + k'(x-\ell/2))} \\ \times (1 + R_{12}) \{ 1 - e^{-2a'(\ell-x) - i2k'(\ell-x)} \} \\ \times 1/[1 + R_{12} e^{-a\ell - ik\ell} - R_{12} e^{-a'\ell - ik'\ell} - e^{-a\ell - ik\ell - a'\ell - ik'\ell}] \quad (73)$$

と表され、さらに計算を行うと

$$Y^c(x, t) = \frac{2A e^{i\omega t} \sinh\{(a+ik)d\} (1 + R_{12}) \sinh\{a'(\ell-x) + ik'(\ell-x)\}}{\sinh\{(a+a')\ell/2 + i(k+k')\ell/2\} - R_{12} \sinh\{(a-a')\ell/2 + i(k-k')\ell/2\}} \quad (74)$$

と表すことができる。

以上のA, B, Cの場合に求めた振動変位(29), (50)と(74)式は、次の式のLに、それぞれ、A, B, Cを代入すると1つの式

$$Y^L(x, t) = 2A e^{i\omega t} \sinh\{(a+ik)u\} \{ \sinh\{a(\ell/2-v) + a'(\ell-w) + ik(\ell/2-v) + ik'(\ell-w)\} \\ + R_{12} \sinh\{-a(\ell/2-v) + a'(\ell-w) - ik(\ell/2-v) + ik'(\ell-w)\} \} \\ \times 1/[\sinh\{(a+a')\ell/2 + i(k+k')\ell/2\} - R_{12} \sinh\{(a-a')\ell/2 + i(k-k')\ell/2\}] \quad (75)$$

で表される。ただし

Aの場合； $u=x, v=d, w=\ell/2,$

Bの場合； $u=d, v=x, w=\ell/2,$

Cの場合； $u=d, v=\ell/2, w=x,$

と置くものとする。

ところで

$$\sinh(A + iB) = \sqrt{\cosh^2 A - \cos^2 B} e^{i\varphi}, \quad (77)$$

ただし

$$\begin{aligned}\cos \varphi &= \frac{\sinh A \cos B}{\sqrt{\cosh^2 A - \cos^2 B}}, \\ \sin \varphi &= \frac{\cosh A \sin B}{\sqrt{\cosh^2 A - \cos^2 B}}\end{aligned}\quad (78)$$

の関係を用いれば、(75)式は

$$\begin{aligned}Y^L(x, t) &= 2Ae^{i\omega t + i\varphi_1} \sqrt{\cosh^2(au) - \cos^2(ku)} \\ &\quad \times [\sqrt{\cosh^2\{a(\ell/2 - v) + a'(\ell - w)\} - \cos^2\{k(\ell/2 - v) + k'(\ell - w)\}} \cdot e^{i\varphi_2} \\ &\quad + R_{12} \sqrt{\cosh^2\{-a(\ell/2 - v) + a'(\ell - w)\} - \cos^2\{-k(\ell/2 - v) + k'(\ell - w)\}} \cdot e^{i\varphi_3} \quad (79) \\ &\quad \times 1/[\sqrt{\cosh^2\{(a + a')\ell/2\} - \cos^2\{(k + k')\ell/2\}} \cdot e^{i\varphi_4} \\ &\quad - R_{12} \sqrt{\cosh^2\{(a - a')\ell/2\} - \cos^2\{(k - k')\ell/2\}} \cdot e^{i\varphi_5}]\end{aligned}$$

と表される。

ただし、 φ_1 , φ_2 , φ_3 , φ_4 と φ_5 は

$$\cos \varphi_1 = \frac{\sinh(au) \cos(ku)}{\sqrt{\cosh^2(au) - \cos^2(ku)}}, \quad \sin \varphi_1 = \frac{\cosh(au) \sin(ku)}{\sqrt{\cosh^2(au) - \cos^2(ku)}}, \quad (80)$$

$$\cos \varphi_2 = \frac{\sinh\{a(\ell/2 - v) + a'(\ell - w)\} \cos\{k(\ell/2 - v) + k'(\ell - w)\}}{\sqrt{\cosh^2\{a(\ell/2 - v) + a'(\ell - w)\} - \cos^2\{k(\ell/2 - v) + k'(\ell - w)\}}} \quad (81)$$

$$\sin \varphi_2 = \frac{\cosh\{a(\ell/2 - v) + a'(\ell - w)\} \sin\{k(\ell/2 - v) + k'(\ell - w)\}}{\sqrt{\cosh^2\{a(\ell/2 - v) + a'(\ell - w)\} - \cos^2\{k(\ell/2 - v) + k'(\ell - w)\}}}$$

$$\cos \varphi_3 = \frac{\sinh\{-a(\ell/2 - v) + a'(\ell - w)\} \cos\{-k(\ell/2 - v) + k'(\ell - w)\}}{\sqrt{\cosh^2\{-a(\ell/2 - v) + a'(\ell - w)\} - \cos^2\{-k(\ell/2 - v) + k'(\ell - w)\}}}, \quad (82)$$

$$\sin \varphi_3 = \frac{\cosh\{-a(\ell/2 - v) + a'(\ell - w)\} \sin\{-k(\ell/2 - v) + k'(\ell - w)\}}{\sqrt{\cosh^2\{-a(\ell/2 - v) + a'(\ell - w)\} - \cos^2\{-k(\ell/2 - v) + k'(\ell - w)\}}},$$

$$\cos \varphi_4 = \frac{\sinh\{(a + a')\ell/2\} \cos\{(k + k')\ell/2\}}{\sqrt{\cosh^2\{(a + a')\ell/2\} - \cos^2\{(k + k')\ell/2\}}}, \quad (83)$$

$$\sin \varphi_4 = \frac{\cosh\{(a + a')\ell/2\} \sin\{(k + k')\ell/2\}}{\sqrt{\cosh^2\{(a + a')\ell/2\} - \cos^2\{(k + k')\ell/2\}}},$$

$$\cos \varphi_5 = \frac{\sinh\{(a - a')\ell/2\} \cos\{(k - k')\ell/2\}}{\sqrt{\cosh^2\{(a - a')\ell/2\} - \cos^2\{(k - k')\ell/2\}}}, \quad (84)$$

$$\sin \varphi_5 = \frac{\cosh\{(a - a')\ell/2\} \sin\{(k - k')\ell/2\}}{\sqrt{\cosh^2\{(a - a')\ell/2\} - \cos^2\{(k - k')\ell/2\}}},$$

と表される。

§ 3. 減衰係数を無視した近似式

複合弦の振動の式(79)は、一見したところこのままでは大変複雑に感じられるので、この式の減衰係数の a と a' を 0 とした極限での近似式を導くことにする。

(77)式と(78)式から

$$\sinh(iB) = \sin B \cdot e^{i\pi/2} \quad (85)$$

となることを考慮し、(79)式の実数による表示を行なうと振動の式は

$$y^t(x, t) = \frac{2A \sin ku [\sin\{k(\ell/2 - v) + k'(\ell - w)\} + R_{12} \sin\{-k(\ell/2 - v) + k'(\ell - w)\}] \sin(\omega t + \pi/2)}{\sin\{(k+k')\ell/2\} - R_{12} \sin\{(k-k')\ell/2\}} \quad (86)$$

と表すことができる。

これを各範囲にわけて表すと

$$y^A(x, t) = \frac{2A \sin kx [\sin\{k(\ell/2 - d) + k'\ell/2\} + R_{12} \sin\{-k(\ell/2 - d) + k'\ell/2\}]}{\sin\{(k+k')\ell/2\} - R_{12} \sin\{(k-k')\ell/2\}} \sin(\omega t + \pi/2), \quad (87)$$

$$y^B(x, t) = \frac{2A \sin kd [\sin\{k(\ell/2 - x) + k'\ell/2\} + R_{12} \sin\{-k(\ell/2 - x) + k'\ell/2\}]}{\sin\{(k+k')\ell/2\} - R_{12} \sin\{(k-k')\ell/2\}} \sin(\omega t + \pi/2), \quad (88)$$

$$y^C(x, t) = \frac{2A \sin kd (1 + R_{12}) \sin\{k'(\ell - x)\}}{\sin\{(k+k')\ell/2\} - R_{12} \sin\{(k-k')\ell/2\}} \sin(\omega t + \pi/2), \quad (89)$$

となり、これらの境界 $x=d$ と $x=\ell/2$ で

$$y^A(d, t) = y^B(d, t), \quad y^B(\ell/2, t) = y^C(\ell/2, t) \quad (90)$$

が成立し、境界上で変位が連続していることがわかる。また、(87), (88)と(89)式から振動の形は、正弦関数で表されることがわかる。

§ 4. 共振定常波と共振振動数のずれ

この振動が共振を生じる条件は、(87), (88)と(89)式の分母の絶対値が振動数 ν に対して極小になる条件であるから、次に共振振動数を求めてみることにする。これらの分母の自乗を振動数の関数 $W(\nu)$ で表すと

$$W(\nu) = \left[\sin\left\{\left(\frac{1}{v} + \frac{1}{v'}\right)\pi\ell\nu\right\} - R_{12} \sin\left\{\left(\frac{1}{v} - \frac{1}{v'}\right)\pi\ell\nu\right\} \right]^2 \quad (91)$$

で表すことができる。

この関数 $W(\nu)$ を ν で微分をおこなうと

$$\begin{aligned} \frac{dW(\nu)}{d\nu} = & 2 \left[\sin\left\{\left(\frac{1}{v} + \frac{1}{v'}\right)\pi\ell\nu\right\} - R_{12} \sin\left\{\left(\frac{1}{v} - \frac{1}{v'}\right)\pi\ell\nu\right\} \right] \\ & \times \left[\left(\frac{1}{v} + \frac{1}{v'}\right)\pi\ell \cdot \cos\left\{\left(\frac{1}{v} + \frac{1}{v'}\right)\pi\ell\nu\right\} - R_{12} \left(\frac{1}{v} - \frac{1}{v'}\right)\pi\ell \cdot \cos\left\{\left(\frac{1}{v} - \frac{1}{v'}\right)\pi\ell\nu\right\} \right] \end{aligned} \quad (92)$$

となる。その結果、極値の条件は

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{v} + \frac{1}{v'}\right) \sin\left\{\left(\frac{1}{v} + \frac{1}{v'}\right)2\pi\ell\nu\right\} - 2R_{12} \left\{\frac{1}{v} \cdot \sin\left(\frac{2\pi\ell}{v}\nu\right) - \frac{1}{v'} \sin\left(\frac{2\pi\ell}{v'}\nu\right)\right\} \\ & + R_{12}^2 \cdot \left(\frac{1}{v} - \frac{1}{v'}\right) \sin\left\{\left(\frac{1}{v} - \frac{1}{v'}\right)2\pi\ell\nu\right\} = 0 \end{aligned} \quad (93)$$

と表すことができる。

この式の第1項に比べて、第2項と第3項は小さいと考えることができるので、(93)式を

$$\begin{aligned} \sin\left\{\left(\frac{1}{v} + \frac{1}{v'}\right)2\pi\ell\nu\right\} = & \frac{vv'}{v+v'} \left[2R_{12} \left\{\frac{1}{v} \cdot \sin\left(\frac{2\pi\ell}{v}\nu\right) - \frac{1}{v'} \sin\left(\frac{2\pi\ell}{v'}\nu\right)\right\} \right. \\ & \left. - R_{12}^2 \left(\frac{1}{v} - \frac{1}{v'}\right) \sin\left\{\left(\frac{1}{v} - \frac{1}{v'}\right)2\pi\ell\nu\right\} \right] \end{aligned} \quad (94)$$

と表すと、 $W(\nu)$ が極小になるようにするためには

$$\left(\frac{1}{v} + \frac{1}{v'}\right)2\pi\ell\nu = 2n\pi + \alpha \quad (n=1, 2, 3, \dots) \quad (95)$$

と近似することができる。ただし α は(94)式の右辺を表している。

α は 1 より小さい値と考えられるので、(95)式の右辺の α の振動数 ν には、

$$\left(\frac{1}{v} + \frac{1}{v'}\right)2\pi\ell\nu = 2n\pi \quad (n=1, 2, 3, \dots) \quad (96)$$

で決まる $\nu = \nu_0$ を代入するものとする。

ここで、まず、共振の定常波について検討しよう。

定常波の振動の形を決めるために、第 0 近似の式(96)を用いることにする。さらに具体的に検討するため G_1 の弦の線密度 ρ と G_2 の弦の線密度 ρ' を 1 対 4 としよう。波長と弦の伝播速度は線密度と弦の張力 T とで

$$v = \nu\lambda = \sqrt{\frac{T}{\rho}}, \quad v' = \nu\lambda' = \sqrt{\frac{T}{\rho'}} \quad (97)$$

の関係があるので¹⁸⁾

$$\lambda' = \lambda/2, \quad v' = v/2 \quad (98)$$

となり、(96)式から

$$\frac{\ell}{\lambda} + \frac{\ell}{\lambda'} = \frac{\ell}{\lambda} + \frac{2\ell}{\lambda} = n \quad (n=1, 2, 3, \dots) \quad (99)$$

と導かれる。この式と(98)式から各々の波長は

$$\lambda = \frac{3\ell}{n}, \quad \lambda' = \frac{3\ell}{2n} \quad (n=1, 2, 3, \dots) \quad (100)$$

となることがわかる。これはホルンの観測結果と一致する¹⁾。

次に、共振振動数について検討しよう。

(94)式の右辺に相当する α に(100)式を代入して、それを $\alpha^{(n)}_0$ とすると

$$\begin{aligned} \alpha^{(n)}_0 &= \frac{vv'}{v+v'} \left[2R_{12} \left\{ \frac{1}{v} \sin\left(2\pi \cdot \frac{n}{3}\right) - \frac{1}{v'} \sin\left(2\pi \cdot \frac{2n}{3}\right) \right\} - R_{12}^2 \left(\frac{1}{v} - \frac{1}{v'} \right) \sin\frac{2\pi}{3}(n-2n) \right] \\ &= \frac{1}{3} \left[2R_{12} \left\{ \sin\left(\frac{2\pi}{3} \cdot n\right) - 2 \sin\left(\frac{2\pi}{3} \cdot 2n\right) \right\} - R_{12}^2 \sin\left(\frac{2\pi}{3} \cdot n\right) \right], \quad (n=1, 2, 3, \dots) \end{aligned} \quad (101)$$

と表される。最後の式の変形には(98)式を用いた。(101)式から明らかなように、 n は 1, 2, 3 のときだけ異った値をもち、4 以降は 1~3 の値をサイクリックにくりかえす。

(101)式の中の R_{12} の値は、次のインピーダンス¹⁸⁾

$$Z_1 = \sqrt{\rho T}, \quad Z_2 = \sqrt{\rho' T} \quad (102)$$

をつかって

$$R_{12} = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} = -R_{21} \quad (103)$$

と表され、 ρ と ρ' の比が 1 対 4 の場合には、 $R_{12} = -1/3$ となることが導かれる。

これらを考慮すると $\alpha^{(n)}_0 (n=1, 2, 3, \dots)$ は、それぞれ

$$\alpha^{(1)}_0 = -\frac{19\sqrt{3}}{54}, \quad \alpha^{(2)}_0 = \frac{19\sqrt{3}}{54}, \quad \alpha^{(3)}_0 = 0 \quad (104)$$

となることが導かれる。

この結果、(95)式は、倍振動の振動数は基本振動の振動数の整数倍になるという関係を示す

(96)式を修正し, $n=1, 2, 3$ のときの振動数 ν_1, ν_2, ν_3 は,

$$\nu_1 = \left(1 - \frac{19\sqrt{3}}{2\pi \cdot 54}\right) \nu_1^0, \quad \nu_2 = \left(2 + \frac{19\sqrt{3}}{2\pi \cdot 54}\right) \nu_1^0, \quad \nu_3 = 3\nu_1^0 \quad (105)$$

となることが導かれ, 振動数は整数倍にはならず, ずれを生じることがわかる。ここで, ν_1^0 は(96)式の基本振動の振動数である。

ずれの値 $19\sqrt{3}/(2\pi \cdot 54)$ は, ほぼ0.1であり, 基本振動の振動数は ν_1^0 のときより約1割小さくなると考えられる。この結果に対する実験との比較は, ここで取扱った条件と一致するかどうか正確にはわからないが, ほぼ似た条件のもとでの実験¹⁾との比較では, かなり似た傾向を示している。実際の実験結果と定量的な比較を行うためには, ここで無視した弦による減衰係数を正しく考慮する必要がある。これらは今後の検討課題である。

付 録 A

$|R_{23}R_{21}e^{-a'\ell - ik'\ell}| < 1, |R_{23}R_{10}e^{-a\ell - ik\ell}| < 1$ の証明

R_{23} と R_{10} は両方とも固定端であり, -1 である。 R_{21} と R_{12} は $R_{21} = -R_{12}$ の関係があり -1 と 1 の間にあるので, 上記の絶対値はつねに 1 より小さいことがわかる。

付 録 B

$|R_{10}Re^{-a\ell - ik\ell}| < 1, |R_{23}Se^{-a'\ell - ik'\ell}| < 1$ の証明

(6)式と(55)式から R と S は,

$$R = R_{12} + \frac{T_{12}R_{23}T_{21}e^{-a'\ell - ik'\ell}}{1 - R_{23}R_{21}e^{-a'\ell - ik'\ell}}, \quad S = R_{21} + \frac{T_{21}R_{10}T_{12}e^{-a\ell - ik\ell}}{1 - R_{10}R_{12}e^{-a\ell - ik\ell}} \quad (B.1)$$

と表されるが

$$T_{12} = 1 + R_{12}, \quad T_{21} = 1 + R_{21}, \quad R_{12} = -R_{21}, \quad R_{23} = R_{10} = -1 \quad (B.2)$$

だから

$$T_{12}T_{21} = (1 + R_{12})(1 + R_{21}) = (1 + R_{12})(1 - R_{12}) = 1 - R_{12}^2 \quad (B.3)$$

となるので

$$R = \frac{R_{12} - e^{-a'\ell - ik'\ell}}{1 - R_{12}e^{-a'\ell - ik'\ell}}, \quad S = \frac{-R_{12} - e^{-a\ell - ik\ell}}{1 + R_{12}e^{-a\ell - ik\ell}} \quad (B.4)$$

と表される。

これらの分子の絶対値の自乗から分母の自乗をさし引いて計算すると,

$$\begin{aligned} & \{(R_{12} - e^{-a'\ell} \cos k'\ell)^2 + (-e^{-a'\ell} \sin k'\ell)^2\} - \{1 - R_{12}e^{-a'\ell} \cos k'\ell\}^2 + (-R_{12}e^{-a'\ell} \sin k'\ell)^2 \\ & = R_{12}^2 - 1 + (1 - R_{12}^2)e^{-a'\ell} = (1 - R_{12}^2)(e^{-a'\ell} - 1) < 0, \end{aligned} \quad (B.5)$$

$$\begin{aligned} & \{(R_{12} - e^{-a\ell} \cos k\ell)^2 + (-e^{-a\ell} \sin k\ell)^2\} - \{1 + R_{12}e^{-a\ell} \cos k\ell\}^2 + (-R_{12}e^{-a\ell} \sin k\ell)^2 \\ & = R_{12}^2 - 1 + (1 - R_{12}^2)e^{-a\ell} = (1 - R_{12}^2)(e^{-a\ell} - 1) < 0, \end{aligned} \quad (B.6)$$

となり, R と S の絶対値は 1 より小さいことが導かれ, 上記の命題は正しいことが導かれる。

参 考 文 献

- 1) D.E. Hall: Phys. Teach. **27** (1989) 673.
- 2) T.D. Rossing: Am. J. Phys. **43** (1975) 735.
- 3) 福山豊：物理教育, **33**, 1 (1985) 19.
- 4) 福山豊, 広瀬美恵子, 阿部由美子, 富山哲之：物理教育, **33**, 3 (1985) 220.
- 5) 福山豊, 阿部由美子, 広瀬美恵子, 富山哲之：物理教育, **34**, 4 (1986) 237.
- 6) 富山哲之, 福山豊：長崎大教育教科教育研報, 10 (1986) 25.
- 7) Y. FUKUYAMA: Int. Conf. TRENDS IN PHYSICS EDUCATION Proceedings Part II (1986) 121.
- 8) 福山豊, 富山哲之, 川里祥之：物理教育, **35**, 4 (1987) 248.
- 9) 福山豊：長崎大教育自然研報, 39 (1988) 21.
- 10) 富山哲之, 福山豊：物理教育, **36**, 2 (1988) 95.
- 11) 福山豊, 富山哲之, 森山一夫：物理教育, **36**, 4 (1988) 389.
- 12) 福山豊：長崎大教育自然研報, 40 (1989) 13.
- 13) 福山豊, 中島克彦：長崎大教育教科教育研報, 13 (1989) 11.
- 14) 福山豊, 森田まゆみ：長崎大教育教科教育研報, 13 (1989) 35.
- 15) 福山豊, 森田まゆみ：物理教育, **37**, 3 (1989) 200.
- 16) 福山豊, 中島克彦：物理教育, **38**, 1 (1990) 17.
- 17) 福山豊, 阿比留慎一：長崎大教育教科教育研報, 15 (1990) 1.
- 18) 有山正孝：振動・波動 (裳華房, 1960).