潮汐による海岸被圧地下水の流動

松原　　茂*・武政　剛弘*
薦田　広章*・浅海　英三**

Coastal Artesian Groundwater Flow due to Tide

by

Sigeru MATSUBARA
(Department of Civil Engineering)

Takehiro TAKEMASA
(Department of Civil Engineering)

Hiroaki KOMODA
(Department of Civil Engineering)

Eizo ASAMI
(Univ. of East Asia)

The piezometric head in artesian groundwater oscillates remarkably due to oceanic tide.

As is well known, the effect of the tide on the piezometric head prevails even in far inland.

The artesian groundwater is generally a very good source of drinking water, because of the purification properties of the soils; it is also used for irrigation, and, where surface water is scarce, for industrial purposes.

A large quantity of discharge from an aquifer produces a reduction in water pressure and therefore, at the same time, an increase in the effective stress in the soil skeleton of the porous medium.

The latter produces land subsidence (or consolidation) and sea water may infiltrate into artesian groundwater.

It is necessary to study the characteristics of the littoral artesian groundwater flow for preventing these groundwater pollution.

In this paper we will solve the differential equation for unsteady artesian groundwater flow under various boundary conditions that correspond to the geological structure in the littoral zone.

〔1〕 まえがき

海岸付近の井戸では海洋潮汐の影響をうけてその水位が上下することは古くから知られている．自由地下水層の浅井戸での感潮度は海岸より内陸に向って急減

昭和56年10月１日受理

* 長崎大学工学部土木工学科
** 東亜大学工学部

しており，水位変動が認められるのは海岸のごく近傍に限られている．それに反して被圧地下水層に達した掘抜井戸では，海岸潮汐の影響をうけてその水頭は著しく変化する．しかもその影響はいがいに内陸深くまでおよぶことが知られている．この被圧地下水は水質的にも水量的にも安定しているため飲料水ならびに工業用水としてさかんに利用されている．そのほか干拓地の除塩などカンガイ水としての用途も広い．しかしながら近年都市における水需要の飛躍的な増大による地下水利用量の急激な伸びは，各地で過剰揚水による地盤沈下あるいは地下酸欠空気の発生，井戸枯れ，地下水の塩水化などの地下水公害を惹起し社会問題化している．こうした被害を未然に防ぎかつ地下水を有効に利用するための地下水開発，保全が叫ばれてすでに数年が経過した．それに対する有効な対策も講じられないまま地下水公害は確実に深く静かに進行している．これらの対策の一歩として被圧地下水層の流れを数量的に解析し，その実体を知ることがまず要求される．ここでは種々の状態にある海岸被圧地下水のそれぞれの状況に応じた不定流被圧地下水に対する微分方程式を導きそれぞれに対する解を示した．

〔2〕 微分方程式の解

海岸付近では被圧帯水層の傾斜は一般に緩やかであるから，簡単のために上下の不透水層と被圧帯水層との境界面は水平であると仮定し，被圧帯水層が海に向って開口しているとする．そして上部不透層を貫ぬく多数の掘抜井戸によって被圧水が地上に噴出している状況を考える．今 Fig. 1 に示すように座標原点を開口部にとり，被圧帯水層の下面に海岸線に直角に内陸にむかって x 軸をとる．そして鉛直上向きに z 軸をとる．このような地下構造に対しては被圧弾性透水層の理論により非定常被圧地下水の微分方程式として次のものを得る．今任意の時刻 t，場所 x において被圧層に加わる外圧を ζ，被圧層内の地下水圧の平均状態よりの増加量を p とすると[1)]

$$\frac{\partial}{\partial t}(p-\theta\zeta)=K^2\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}-b^2 p \tag{1}$$

ここに $\theta=\alpha/\{\alpha+(1-\lambda)\gamma+\lambda\beta\}$

$$K^2=T/S=k/\{\alpha+(1-\lambda)\gamma+\lambda\beta\}$$
$$b^2=a_0/D\rho\{\alpha+(1-\lambda)\gamma+\lambda\beta\}$$
$$=b_0/D\rho g\{\alpha+(1-\lambda)\gamma+\lambda\beta\}$$
$$T=(k/\mu)\rho gD=k_1D$$
$$S=\rho gD\{\alpha+(1-\lambda)\gamma+\lambda\beta\}$$

で結ばれる．各記号の名称を以下に記す．

β：被圧水の圧縮率
α：被圧帯水層の垂直圧縮率
ρ：被圧水の密度
λ：被圧帯水層の間隙率
μ：被圧水の粘性係数
γ：土粒子の圧縮率
D：被圧帯水層の厚さ
g：重力加速度
k：固有透過度（intrinsic permeability 〔L^2〕）[2)]
k_1：透水係数（hydraulic conductivity 〔L/T〕）
T：透水量係数（transmissibility）
S：貯溜係数（coefficient of storage）

そして無数の掘抜井戸のため被圧水が地上へ噴出して

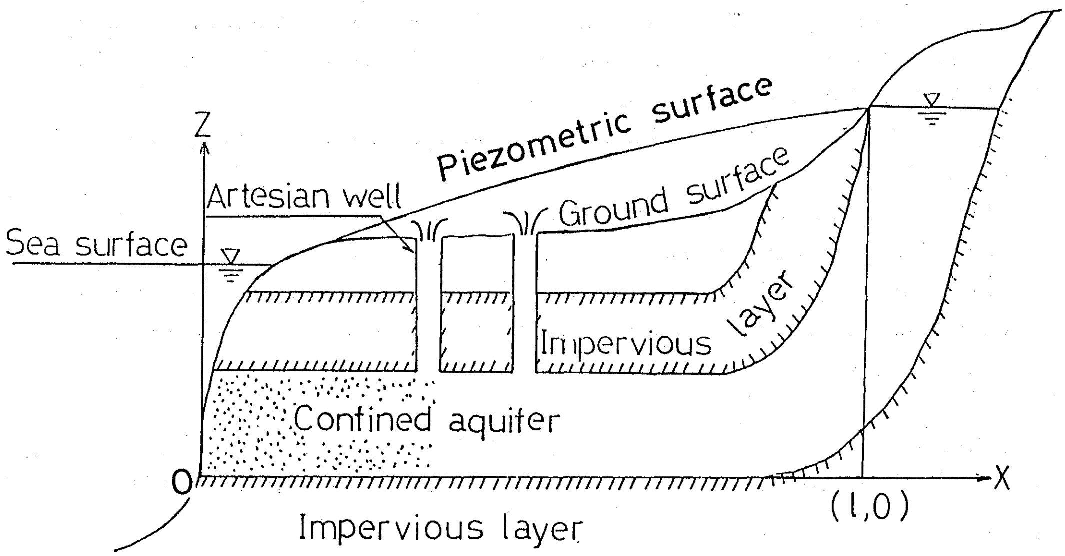

Fig. 1 Model of artesian groundwater (1)

いるとき，噴出量を層全体におしなべてこれが平均的に上部の不透層より単位時間，単位面積当り浸出していると考え，この量を浸出質量とした時は被圧水圧に，浸水量とした時は被圧水頭にそれぞれ比例するとして前者の比例定数を a_0，後者を b_0 とする．この(1)を種々の状況に応じて境界条件を変えることにより解法を試みる．

I）　海側開口，内陸遠端開放不圧の場合

この状況は海岸で被圧水層が海に開口し，被圧水は直接海水と連絡していてそこでの被圧水の圧力は海水の圧力と等しくなっているとする．そして被圧帯水層が受ける外圧の変化としては，被圧層上部の自由地下水位の変動，気圧の変化，海水荷重の変動等が考えられるが，この場合は被圧水の圧力変動 p に比してそれらは無視できるほど小さいとして

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t}=0 \tag{2}$$

とする．したがって(1)は次式のようになる．

$$\frac{\partial p}{\partial t}=K^2\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}-b^2p \tag{3}$$

この(3)を実際におこりうる境界条件のもとで解く．まず条件として最も一般的なものを考える．これは前述のように $x=0$ で被圧帯水層が海に開口し，その点での被圧水の圧力は海水の静水圧に等しくすなわち海洋潮汐があり，被圧帯水層の遠端 $x=l$ は Fig. 1 に示すような開放不圧状態でありそこでも水位の変動が存在する場合である．すなわち境界条件を次式でもって表わす．

$$\left.\begin{aligned}(p)_{x=0}&=f\cos\sigma_1 t\\ (p)_{x=l}&=g\cos(\sigma_2 t-\beta)\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

(3)を(4)の条件の下に解いて次の解を得る．

$$\begin{aligned}p=&\frac{f}{\sinh^2 m_1l\cos^2 n_1l+\cosh^2 m_1l\sin^2 n_1l}\\
&\times[\{\sinh ml_1\cos n_1l\sinh m_1(l-x)\\
&\cdot\cos n_1(l-x)\\
&+\cosh m_1l\sin n_1l\cosh m_1(l-x)\\
&\cdot\sin n_1(l-x)\}\cos\sigma_1t\\
&+\{\cosh m_1l\sin n_1l\sinh m_1(l-x)\\
&\cdot\cos n_1(l-x)\\
&-\sinh m_1l\cos n_1l\cosh m_1(l-x)\\
&\cdot\sin n_1(l-x)\}\sin\sigma_1t]\\
&+\frac{g}{\sinh^2 m_2l\cos^2 n_2l+\cosh^2 m_2l\sin^2 n_2l}\\
&\times[\{\sinh m_2l\cos n_2l\sinh m_2x\cos n_2x\\
&+\cosh m_2l\sin n_2l\cosh m_2x\sin n_2x\}\\
&\cdot\cos(\sigma_2t-\beta)\\
&+\{\cosh m_2l\sin n_2l\sinh m_2x\cos n_2x\\
&-\sinh m_2l\cos n_2l\cosh m_2x\sin n_2x\}\\
&\cdot\sin(\sigma_2t-\beta)]\end{aligned} \tag{5}$$

ここに

$$\left.\begin{aligned}\sqrt{b^2+i\sigma_1}&=K(m_1+in_1)=\pm\left\{\sqrt{\frac{\sqrt{b^4+\sigma_1^2}+b^2}{2}}+i\sqrt{\frac{\sqrt{b^4+\sigma_1^2}-b^2}{2}}\right\}\\
\sqrt{b^2+i\sigma_2}&=K(m_2+in_2)=\pm\left\{\sqrt{\frac{\sqrt{b^4+\sigma_2^2}+b^2}{2}}+i\sqrt{\frac{\sqrt{b^4+\sigma_2^2}-b^2}{2}}\right\}\end{aligned}\right) \tag{6}$$

である．この(5)についての吟味を行なってみる．

(a)地上への噴出量が大きい場合

掘抜井戸が多く存在して地上への噴出量が多いときは b^2 の値が大きくなり，(6)において b^4 にたいして σ_1，σ_2 を無視すると

$$\left.\begin{aligned}m_1&=m_2=\frac{b}{K}=\sqrt{\frac{a\mu}{\rho kD}}=\sqrt{\frac{b_0}{T}}\\ n_1&=n_2=0\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

となり，(5)は次式のようになる．

$$p=\frac{1}{\sinh ml}\left\{f\sinh m(l-x)\cos\sigma_1t+g\sinh mx\cos(\sigma_2t-\beta)\right\} \tag{8}$$

ここで $\sigma_1=\sigma_2(=\sigma)$ としたときの解は野満隆治氏[3]が示したものに一致し，(8)を次の形で示している．

$$p=fe^{mx}\cos\sigma t-\frac{\sinh mx}{\sinh ml}\left\{fe^{ml}\cos\sigma t-g\cos(\sigma t-\beta)\right\} \tag{9}$$

また被圧帯水層が内陸に無限に延びている時は，$l=\infty$ で $g=0$ として(8)に適用すると次式となる．

$$p=fe^{-mx}\cos\sigma_1t \tag{10}$$

この式は速水頌一郎氏などの著書に示されている[4]．これによると振巾は指数法則にしたがって，内陸に入るにつれて減少するが位相の遅れはみられない．吉川恭三氏[5]はこの(10)が別府温泉にて適用できることを示している．

(b)地上への噴出量が小さい場合

上部の不透層からの漏水が非常に少ないときは，(1)の記号で説明するように a_0 が非常に小さいとすると b が σ_1，σ_2 に比して無視できて(6)より次の関係を得る

$$\left.\begin{aligned}K(m_1+i\,n_1)&=\pm\sqrt{\frac{\sigma_1}{2}}(1+i)\\ K(m_2+i\,n_2)&=\pm\sqrt{\frac{\sigma_2}{2}}(1+i)\end{aligned}\right\} \tag{11}$$

これを(5)に代入して次式を得る．

$$p=\frac{f}{\left(\sinh^2\frac{l}{K}\sqrt{\frac{\sigma_1}{2}}\cos^2\frac{l}{K}\sqrt{\frac{\sigma_1}{2}}+\cosh^2\frac{l}{K}\sqrt{\frac{\sigma_1}{2}}\sin\frac{l}{K}\sqrt{\frac{\sigma_1}{2}}\right)}$$

$$\times\Bigg[\left\{\sinh\frac{l}{K}\sqrt{\frac{\sigma_1}{2}}\cos\frac{l}{K}\sqrt{\frac{\sigma_1}{2}}\right.$$
$$\cdot\sinh\frac{l-x}{K}\sqrt{\frac{\sigma_1}{2}}\cos\frac{l-x}{K}\sqrt{\frac{\sigma_1}{2}}$$
$$+\cosh\frac{l}{K}\sqrt{\frac{\sigma_1}{2}}\sin\frac{l}{K}\sqrt{\frac{\sigma_1}{2}}$$
$$\left.\cdot\cosh\frac{l-x}{K}\sqrt{\frac{\sigma_1}{2}}\sin\frac{l-x}{K}\sqrt{\frac{\sigma_1}{2}}\right\}$$
$$\cdot\cos\sigma_1 t$$
$$+\left\{\cosh\frac{l}{K}\sqrt{\frac{\sigma_1}{2}}\sin\frac{l}{K}\sqrt{\frac{\sigma_1}{2}}\right.$$
$$\cdot\sinh\frac{l-x}{K}\sqrt{\frac{\sigma_1}{2}}\cos\frac{l-x}{K}\sqrt{\frac{\sigma_1}{2}}$$
$$-\sinh\frac{l}{K}\sqrt{\frac{\sigma_1}{2}}\cos\frac{l}{K}\sqrt{\frac{\sigma_1}{2}}$$
$$\left.\cdot\cosh\frac{l-x}{K}\sqrt{\frac{\sigma_1}{2}}\sin\frac{l-x}{K}\sqrt{\frac{\sigma_1}{2}}\right\}$$
$$\cdot\sin\sigma_1 t\Bigg]$$

$$+\frac{g}{\left(\sinh^2\frac{l}{K}\sqrt{\frac{\sigma_2}{2}}\cos^2\frac{l}{K}\sqrt{\frac{\sigma_2}{2}}+\cosh^2\frac{l}{K}\sqrt{\frac{\sigma_2}{2}}\sin^2\frac{l}{K}\sqrt{\frac{\sigma_2}{2}}\right)}$$
$$\times\Bigg[\left\{\sinh\frac{l}{K}\sqrt{\frac{\sigma_2}{2}}\cos\frac{l}{K}\sqrt{\frac{\sigma_2}{2}}\right.$$
$$\cdot\sinh\frac{x}{K}\sqrt{\frac{\sigma_2}{2}}\cos\frac{x}{K}\sqrt{\frac{\sigma_2}{2}}$$
$$+\cosh\frac{l}{K}\sqrt{\frac{\sigma_2}{2}}\sin\frac{l}{K}\sqrt{\frac{\sigma_2}{2}}$$
$$\left.\cdot\cosh\frac{x}{K}\sqrt{\frac{\sigma_2}{2}}\sin\frac{x}{K}\sqrt{\frac{\sigma_2}{2}}\right\}$$
$$\cdot\cos(\sigma_2 t-\beta)$$
$$+\left\{\cosh\frac{l}{K}\sqrt{\frac{\sigma_2}{2}}\sin\frac{l}{K}\sqrt{\frac{\sigma_2}{2}}\right.$$
$$\cdot\sinh\frac{x}{K}\sqrt{\frac{\sigma_2}{2}}\cos\frac{x}{K}\sqrt{\frac{\sigma_2}{2}}$$
$$-\sinh\frac{l}{K}\sqrt{\frac{\sigma_2}{2}}\cos\frac{l}{K}\sqrt{\frac{\sigma_2}{2}}$$
$$\left.\cdot\cosh\frac{x}{K}\sqrt{\frac{\sigma_2}{2}}\sin\frac{x}{K}\sqrt{\frac{\sigma_2}{2}}\right\}$$
$$\cdot\sin(\sigma_2 t-\beta)\Bigg] \qquad (12)$$

そして被圧帯水層が内陸に無限に延びているときは，$l=\infty$，$g=0$ とすると(12)は次式のようになる．

$$p=fe^{-\frac{x}{K}\sqrt{\frac{\sigma_1}{2}}}\cos\left(\sigma_1 t-\frac{x}{K}\sqrt{\frac{\sigma_1}{2}}\right) \qquad (13)$$

この式も速水頌一郎氏[6]などの著書に示されている．また(12)は(3)で $b^2=0$ とおいたものを解いたものである．

さらに被圧帯水層の垂直圧縮率，土粒子の圧縮率，水の圧縮率を非常に小さいとして取り扱うと K^2 は大きな値になり，(12)において以下のような近似計算を行なうと

$$\left.\begin{aligned}&\sinh\frac{l}{K}\sqrt{\frac{\sigma_1}{2}}\fallingdotseq\frac{l}{K}\sqrt{\frac{\sigma_1}{2}} \qquad \cosh\frac{l}{K}\sqrt{\frac{\sigma_1}{2}}\fallingdotseq 1\\&\sin\frac{l}{K}\sqrt{\frac{\sigma_1}{2}}\fallingdotseq\frac{l}{K}\sqrt{\frac{\sigma_1}{2}} \qquad \cos\frac{l}{K}\sqrt{\frac{\sigma_1}{2}}\fallingdotseq 1\end{aligned}\right\} \qquad (14)$$

(12)は次式のようになる．

$$p=\frac{1}{l}\left\{(l-x)\,f\cos\sigma_1 t+xg\cos(\sigma_1 t-\beta)\right\} \qquad (15)$$

そして(15)で $\sigma_1=\sigma_2(=\sigma)$ としたものが野満氏[7]が示している解である．すなわち

$$\left.\begin{aligned}&\tan\beta=\frac{Wl\sigma}{CD} \qquad C=\frac{k\rho g}{\lambda\mu}\\&g=\frac{f}{\sqrt{1+(Wl\sigma/CD)^2}}=f\cos\beta\end{aligned}\right\} \qquad (16)$$

ここに W は遠端 l における開放水面の巾である．

II) 海側開口，内陸遠端閉塞

この状況は $x=0$ のところの条件は(I)の場合と同じであるが，遠端 ($x=l$) で閉塞している盲管状被圧地下水層の場合である．このさいの境界条件は以下のようになる．

$$\left.\begin{aligned}&(p)_{x=0}=f\cos\sigma t\\&\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_{x=l}=0\end{aligned}\right\} \qquad (17)$$

(17)を(3)に適用すると解として次式を得る．

$$p=\frac{f}{\cosh^2 m_1 l\cos^2 n_1 l+\sinh^2 m_1 l\sin^2 n_1 l}$$
$$\times\Big[\{\cosh m_1 l\cos n_1 l\cosh m_1(l-x)$$
$$\cdot\cos n_1(l-x)$$
$$+\sinh m_1 l\sin n_1 l\sinh m_1(l-x)$$
$$\cdot\sin n_1(l-x)\}\cos\sigma t$$
$$+\{\sinh m_1 l\sin n_1 l\cosh m_1(l-x)$$
$$\cdot\cos n_1(l-x)$$
$$-\cosh m_1 l\cos n_1 l\sinh m_1(l-x)$$
$$\cdot\sin n_1(l-x)\}\sin\sigma t\Big] \qquad (18)$$

ここに

$$K(m_1+i\,n_1)=\sqrt{b^2+i\sigma} \qquad (19)$$

で定義される．この(18)についての吟味を行なってみる．

(a)被圧帯水層及び被圧水の圧縮性を考慮に入れない場合

被圧帯水層の垂直圧縮率，土粒子の圧縮率，水の圧縮率が非常に小さいため b^2 の値が大きくなる（これは地上への噴出量が大きい状況と同じ意味をもつ）．従

って σ を b^2 に比して無視すると(7)と同様に

$$\left.\begin{aligned} m_1 &= m = \frac{b}{K} = \sqrt{\frac{\mu a}{k\rho D}} = \sqrt{\frac{b_0}{T}} \\ n_1 &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

となり，(18)は次式のようになる．

$$p = \frac{f}{\cosh ml} \cosh m(l-x) \cos \sigma t \tag{21}$$

さらに以上の状況に加えて途中地上への噴出量がほとんどないときは(20)より $m \fallingdotseq 0$ となり(21)は

$$p = f \cos \sigma t \tag{22}$$

となる．これは野満氏[8]の導いた結果で潮汐による水圧変化はそのまま即座に遠方まで伝わり，振巾の減衰も位相差もない．これは状況から判断しても当然のことである．

(b)地上への噴出量が小さい場合

途中漏水が非常に少ない状況ゆえ(19)より(11)を参照して

$$K(m_1 + i\, n_1) = \pm\sqrt{\frac{\sigma}{2}}\,(1+i) \tag{23}$$

となり，(18)はつぎのように変形される．

$$\begin{aligned} p = {} & \frac{f}{\left(\cosh^2\frac{l}{K}\sqrt{\frac{\sigma}{2}}\cos^2\frac{l}{K}\sqrt{\frac{\sigma}{2}} + \sinh^2\frac{l}{K}\sqrt{\frac{\sigma}{2}}\sin^2\frac{l}{K}\sqrt{\frac{\sigma}{2}}\right)} \\ & \times\Bigg[\Big\{\cosh\frac{l}{K}\sqrt{\frac{\sigma}{2}}\cos\frac{l}{K}\sqrt{\frac{\sigma}{2}} \\ & \quad \cosh\frac{l-x}{K}\sqrt{\frac{\sigma}{2}}\cos\frac{l-x}{K}\sqrt{\frac{\sigma}{2}} \\ & \quad +\sinh\frac{l}{K}\sqrt{\frac{\sigma}{2}}\sin\frac{l}{K}\sqrt{\frac{\sigma}{2}} \\ & \quad \cdot\sinh\frac{l-x}{K}\sqrt{\frac{\sigma}{2}}\sin\frac{l-x}{K}\sqrt{\frac{\sigma}{2}}\Big\} \\ & \quad \cdot\cos\sigma t \\ & +\Big\{\sinh\frac{l}{K}\sqrt{\frac{\sigma}{2}}\sin\frac{l}{K}\sqrt{\frac{\sigma}{2}} \\ & \quad \cdot\cosh\frac{l-x}{K}\sqrt{\frac{\sigma}{2}}\cos\frac{l-x}{K}\sqrt{\frac{\sigma}{2}} \\ & \quad -\cosh\frac{l}{K}\sqrt{\frac{\sigma}{2}}\cos\frac{l}{K}\sqrt{\frac{\sigma}{2}} \\ & \quad \cdot\sinh\frac{l-x}{K}\sqrt{\frac{\sigma}{2}}\sin\frac{l-x}{K}\sqrt{\frac{\sigma}{2}}\Big\} \\ & \quad \cdot\sin\sigma t\Bigg] \end{aligned} \tag{24}$$

ここで被圧帯水層と被圧水の圧縮性を考慮に入れないと K^2 の値が大きくなり，(14)と同様ではあるが簡単のためにさらに

$$\left.\begin{aligned} &\sinh\frac{l}{K}\sqrt{\frac{\sigma}{2}} \fallingdotseq \frac{l}{K}\sqrt{\frac{\sigma}{2}} = 0 \quad \cosh\frac{l}{K}\sqrt{\frac{\sigma}{2}} \fallingdotseq 1 \\ &\sin\frac{l}{K}\sqrt{\frac{\sigma}{2}} \fallingdotseq \frac{l}{K}\sqrt{\frac{\sigma}{2}} = 0 \quad \cos\frac{l}{K}\sqrt{\frac{\sigma}{2}} \fallingdotseq 1 \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

とおくと(24)は(22)と一致する．

(III)　海側閉塞で海水荷重を考慮する場合

被圧水と海水とが直接連絡していないときでも被圧水の圧力が海洋潮汐に応じて変化する場合が考えられる．これは Fig. 2 に示すように海側 ($0<x<a$) の部分で被圧帯水層への海水荷重の変化によって説明される．

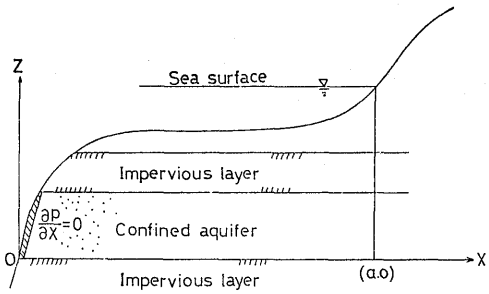

Fig. 2　Model of artesian groundwater (2)

海洋潮汐による荷重変化を単振動の形で表わして

$$\left.\begin{aligned} &0 \leqq x \leqq a \ \ \text{で}\ \ \zeta = A_0 \sin \sigma t \\ &a \leqq x \ \ \text{で}\ \ \zeta = 0 \end{aligned}\right\} \tag{26}$$

また被圧帯水層の先端 $x=0$ で水の出入はないので境界条件は

$$\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_{x=0} = 0 \tag{27}$$

とする．(1)を(26)，(27)の条件のもとで種々の場合についてこれを解く．ただし解法にあたり $x=a$ にて p 及び $\partial p/\partial x$ が連続である仮定は認めている．

(a)　$x \geqq 0$ の被圧帯水層が半無限の場合

この場合の(1)に対する解は(26)，(27)を用いて次式が導かれる．$x>a$ にたいしては

$$\begin{aligned} p = \frac{\sigma\theta A_0}{2(\sigma^2+b^4)}\Bigg\{ & b^2 e^{-\frac{x-a}{K}\sqrt{\frac{\sqrt{b^4+\sigma^2}+b^2}{2}}} \\ & \cdot\cos\left(\sigma t - \frac{x-a}{K}\sqrt{\frac{\sqrt{b^4+\sigma^2}-b^2}{2}}\right) \\ & - b^2 e^{-\frac{x+a}{K}\sqrt{\frac{\sqrt{b^4+\sigma^2}+b^2}{2}}} \\ & \cdot\cos\left(\sigma t - \frac{x+a}{K}\sqrt{\frac{\sqrt{b^4+\sigma^2}-b^2}{2}}\right) \\ & + \sigma e^{-\frac{x-a}{K}\sqrt{\frac{\sqrt{b^4+\sigma^2}+b^2}{2}}} \\ & \cdot\sin\left(\sigma t - \frac{x-a}{K}\sqrt{\frac{\sqrt{b^4+\sigma^2}-b^2}{2}}\right) \end{aligned}$$

$$-\sigma\, e^{-\frac{x+a}{K}\sqrt{\frac{\sqrt{b^4+\sigma^2}+b^2}{2}}}$$

$$\cdot \sin\left(\sigma t-\frac{x+a}{K}\sqrt{\frac{\sqrt{b^4+\sigma^2}-b^2}{2}}\right)\Bigg\} \tag{28}$$

ここで途中漏水が非常に少ないとして $b^2=0$ とおけば吉川恭三氏の導いた式になり，地下水圧の潮汐に伴う周期変化が海洋潮汐に先行して起っていることを示している．すなわち(28)で $b^2=0$ として $K=\sqrt{T/S}$ なることを考慮に入れると次式を得る．

$$p=\frac{A_0\theta}{2}\Bigg[e^{-(x-a)\sqrt{\frac{\sigma S}{2T}}}\cdot\sin\left\{\sigma t-(x-a)\sqrt{\frac{\sigma S}{2T}}\right\}-e^{-(x+a)\sqrt{\frac{\sigma S}{2T}}}\sin\left\{\sigma t-(x+a)\sqrt{\frac{\sigma S}{2T}}\right\}\Bigg] \tag{29}$$

ここで吉川氏は(29)において $x=a$ に原点をずらして，荷重は $-a<x<0$ の範囲にかかるとしてつぎの式を導いている[9]．

$$p=\frac{A_0\theta}{2}\Big[e^{-\kappa x}\sin(\sigma t-\kappa x)-e^{-\kappa(x+2a)}\cdot\sin\{\sigma t-\kappa(x+2a)\}\Big]$$
$$=B\theta A_0\, e^{-\kappa x}\sin(\sigma t-\kappa x+\delta) \tag{30}$$

ここに

$$\left.\begin{aligned}B&=\frac{1}{2}\sqrt{1+e^{-4a\kappa}-2e^{-2a\kappa}\cos(2a\kappa)}\\ \delta&=\tan^{-1}\left[\frac{e^{-2a\kappa}\sin(2a\kappa)}{1-e^{-2a\kappa}\cos(2a\kappa)}\right]\\ \kappa&=\sqrt{\frac{\sigma S}{2T}}\end{aligned}\right\} \tag{31}$$

である．(30)において $(-\kappa x+\delta)$ が正の値をとるときは地下水圧の潮汐に伴う周期変化は海洋潮汐に先行して起ることになるが，吉川氏は愛知県海部郡にてこの事実を観測している[10]．このことがらは野満氏が別府温泉の一部で起ることをすでに指摘している[11]．また浅虫温泉の海に極く近い井戸でもこの現象の起こることを吉川氏は報告している[12]．さらにアメリカのニューヨーク州の Oyster Bay あたりにやはりこの種の感潮井があると Veatch は述べている[13]．

(b) 遠端 $x=l$ にて不圧状態の場合

この場合には $x=0$ においては前述の(a)の状況と同様で，遠端 $x=l$ にて不圧状態なる境界条件

$$(p)_{x=l}=0 \tag{32}$$

を(26)，(27)に加えて(1)を解くと次式のごとくなる．すなわち $x>a$ に対しては

$$p=\frac{4\sigma A_0\theta}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)}\sin\frac{(2n+1)\pi}{2l}a\times\frac{\left\{\frac{K^2(2n+1)^2\pi^2}{4l^2}+b^2\right\}\cos\sigma t+\sigma\sin\sigma t}{\left\{\frac{K^2(2n+1)^2\pi^2}{4l^2}+b^2\right\}^2+\sigma^2}\times\cos\frac{(2n+1)\pi}{2l}x$$
$$=\frac{4\sigma A_0\theta}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha_n}{(2n+1)}\sin\frac{(2n+1)\pi}{2l}a\times\sin(\sigma t+\delta_n)\cos\frac{(2n+1)\pi}{2l}x \tag{33}$$

ここに

$$\left.\begin{aligned}\alpha_n&=\left[\sigma^2+\left\{\frac{K^2(2n+1)^2\pi^2}{4l^2}+b^2\right\}^2\right]^{-1/2}\\ \tan\delta_n&=\left\{\frac{K^2(2n+1)^2\pi^2}{4l^2}+b^2\right\}/\sigma\end{aligned}\right\} \tag{34}$$

である．

(c) 遠端 $x=l$ にて閉塞の場合

この場合には $x=0$ における条件は前述の(a)，(b)と同様にして，遠端 $x=l$ において閉塞して盲管状被圧地下水層をなしている時の境界条件

$$\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_{x=l}=0 \tag{35}$$

を(26)，(27)に加えて(1)を解くと $x>a$ においては次式を得る．

$$p=\frac{2\theta A_0\sigma a}{l}\times\frac{b^2\cos\sigma t+\sigma\sin\sigma t}{b^4+\sigma^2}+\frac{2\theta A_0\sigma}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi a}{l}\times\frac{\left(\frac{K^2n^2\pi^2}{l^2}+b^2\right)\cos\sigma t+\sigma\sin\sigma t}{\left(\frac{K^2n^2\pi^2}{l^2}+b^2\right)^2+\sigma^2}\times\cos\frac{n\pi}{l}x$$
$$=\frac{2\theta A_0\sigma a}{l}\times\frac{b^2\cos\sigma t+\sigma\sin\sigma t}{b^4+\sigma^2}+\frac{2A_0\theta\sigma}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha_n}{n}\sin\frac{n\pi a}{l}\cdot\sin(\sigma t+\delta_n)\cos\frac{n\pi x}{l} \tag{36}$$

ここに

$$\left.\begin{aligned}\alpha_n&=\left[\sigma^2+\left(\frac{K^2n^2\pi^2}{l^2}+b^2\right)^2\right]^{-1/2}\\ \tan\delta_n&=\left(\frac{K^2n^2\pi^2}{l^2}+b^2\right)/\sigma\end{aligned}\right\} \tag{37}$$

である.

〔3〕 結び

本論文は海岸被圧地下水の海洋潮汐による変動について，これを支配する微分方程式を総合的に解析したものである．これらの結果は筆者らの今後の現地観測資料等の解析に使用されるであろう.

〔4〕 参考文献

1) ROGER J. M. DE WIEST: Flow through Porous Media. p. 10～17 Academic Press
2) 山本荘毅，榧根勇，建設省水文研究グループ：最新地下水学 p. 358 山海堂
3)，7)，8)，11)，13) 野満隆治：海岸地下水の研究（第3報）p. 109～118 地球物理
4)，6)，9) 石原藤次郎，本間 仁：応用水理学中Ⅱ p. 309 ～317 丸善
5) 吉川恭三：地下水圧の周期的変化に伴う地面の傾動 陸水学雑誌 Vol. 17
10)，12) 吉川恭三：愛知県海部郡に於ける水理学的研究 陸水学雑誌 Vol. 18
14) 小平吉男：三角級数の応用 p. 288～293 p. 457～460 岩波書店
15) 紫崎達雄：地下水開発・保全の基本理念を考える 一地下水研究の80年への課題一 農業土木学会誌 Vol. 49 No. 1 p. 23～29
16) A. J. Raudkivi and R. A. Callander: Analysis of Groundwater Flow. p. 39～43 Edward Arnold