

電圧形インバータ駆動誘導電動機系の 線形サンプル値モデルの応用

山田 英二*・辻 峰 男*
泉 勝 弘*・森 崎 徳 浩**
小山 純**

Application of the Linear Sampled-Data Model of an Induction Motor Driven by Voltage Source Inverter

by

Eiji YAMADA*, Mineo TSUJI*, Katsuhiro IZUMI*
Norihiro MORISAKI** and Jun OYAMA**

The behavior of an induction motor driven by voltage source inverter is described by non-linear system that repeats periodically. So far, many approximate analyses considered only fundamental wave component of phase voltages are published. But the analysis considered switching actions of the transistors is not established enough, especially an analysis of the system added the controllers is scarcely done.

We proposed the linear sampled-data model about an equilibrium point by considering higher harmonic components when the system is in an open-loop operation. In this paper, by using this linear model, we derive a linear model of the system including feedback controllers, and show that this model is useful for stability analysis and computation of transient responses.

1. まえがき

電圧形インバータ駆動誘導電動機系の動作は周期的に繰り返す非線形システムとして記述できるが、従来相電圧の基本波成分のみを考慮した近似解析が多く発表されており¹⁾²⁾、トランジスタのスイッチング作用を厳密に考慮した解析法は十分に確立されていない。特に、制御系が付加された場合の解析はほとんど行われていない。

筆者らは先にこの系に関して、相電圧の高調波成分を考慮した平衡点に関する開ループ運転時の線形サンプル値モデルを導出した³⁾。本稿ではこの線形モデルを利用して、フィードバック制御装置まで含めた系全体の線形モデルを新たに導出し、このモデルが安定解

析や過渡応答の計算に有用であることを示す。提案する解析法は状態変数法に基づいており、厳密で汎用性に富み、計算手順も比較的簡単である。

2. 開ループ運転時の線形サンプル値モデル

フィードバック制御装置を含まない開ループ運転時の電圧形インバータ駆動誘導電動機系は、定常解析で定まる平衡点に関し状態量の微小変動を考えると、次式の線形サンプル値モデルで表わせる³⁾。

状態方程式：

$$\Delta \mathbf{x}^{k+1} = \Phi \Delta \mathbf{x}^k + \Theta \Delta \mathbf{u}^k \quad (1)$$

出力方程式：

$$\Delta \mathbf{y}^k = \mathbf{C} \Delta \mathbf{x}^k + \mathbf{D} \Delta \mathbf{u}^k \quad (2)$$

昭和59年10月1日受理

*電子工学科 (Department of Electronics)

**電気工学科 (Department of Electrical Engineering)

Table 1 Time representation of state values

Values at $t = t_k^+$	$v_f^k, i_d^k, i_{sd}^k, i_{sq}^k$ $\psi_{rd}^k, \psi_{rq}^k, e_c^k$
Mean values or effective values for $t_k^+ \leq t \leq t_{k+1}^-$	$T_e^k, I_{sd}^k, I_d^k, V_t^k$
Quantities which are constant for $t_k^+ \leq t \leq t_{k+1}^-$	$E_d^k, T_L^k, V_t^{**k}, \omega_r^k$ $\omega_r^{**k}, \omega_{sl}^k, \omega_{sl}^{**k}, \omega_f^{**k}$
Quantities of period	T^k, f^k

但し,

$$\Delta x^k = [\Delta v_1^k, \Delta i_d^k, \Delta i_{sd}^k, \Delta i_{sq}^k, \Delta \psi_{rd}^k, \Delta \psi_{rq}^k, \Delta \omega_r^k]^T \quad (3)$$

$$\Delta u^k = [\Delta E_d^k, \Delta f^k, \Delta T_L^k]^T \quad (4)$$

$$\Delta y^k = [\Delta T_e^k, \Delta I_{sd}^k, \Delta I_d^k, \Delta V_t^k]^T \quad (5)$$

ここで、以下に使う文字も含めて Table 1 に記号の定義を示す。

Φ の (i, j) 成分は、定常解における $t = t_k^+$ での j 番目の状態変数に対する $t = t_{k+1}^+$ における i 番目の状態変数の偏微分であり、また θ の (i, j) 成分は、 j 番目の入力に対する i 番目の状態変数の偏微分である。このことから解析的に Φ 、 θ の大部分の要素は求まるが、回転角速度 ω_r やインバータ周波数 f に関する要素は数値偏微分により求めている。系の出力は必要に応じて選定されるべきものであるが、期間 $t_k^+ \leq t \leq t_{k+1}^-$ における状態量の平均値を考えると C のみでなく D も要素をもつ。 C 、 D の計算法は Φ 、 θ と同様である。

3. V/f 一定制御時の解析

3.1 系の記述

V/f 一定制御にも種々の方法があるが、ここでは Fig. 1 に示すシステムについて解析を行う。

インバータ角周波数指令 ω_r^* を与えると V/f の比より端子電圧指令 V_t^* が定まり、電動機の端子電圧の実効値 V_t を V_t^* に一致させるように制御する。そのため V_t^* と V_t との差を PI 制御器に加え、その出力により直流電源電圧 E_d を制御するようなフィードバック系を考える。

Fig. 2 に PI 制御器の構成を示す。ここでは E_d を発生する順変換装置は単なる比例要素として考え、そのゲインを K_c としている。図より次式を得る。

$$p e_c = \frac{K_p}{T_i} (V_t^* - V_t) \quad (6)$$

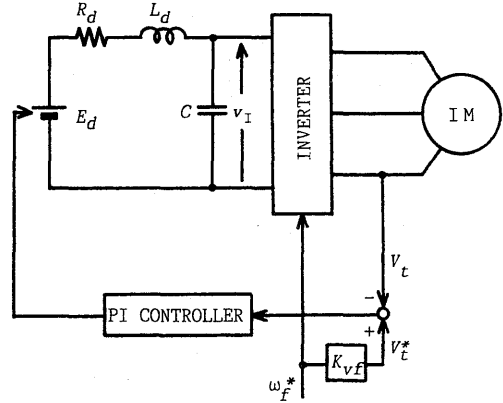
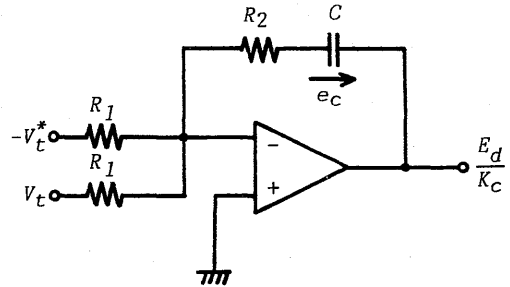
Fig. 1 Constant V/f control system

Fig. 2 PI controller

$$E_d = K_c \{ e_c + K_p (V_t^* - V_t) \} \quad (7)$$

ここで、 K_p 、 T_i はそれぞれ比例ゲイン、積分時定数であり次式で表わされる。

$$K_p = R_2 / R_1, \quad T_i = C R_2 \quad (8)$$

(6)式を期間 $T^k (= t_{k+1}^- - t_k^+)$ で差分近似すると次式を得る。

$$e_c^{k+1} = e_c^k + \frac{K_p}{T_i} T^k (V_t^{**k} - V_t^k) \quad (9)$$

(7)式を離散化する方法は幾通りも考えられるが、ここでは期間 T^k で検出された量によりその間の入力 E_d^k が定まるものとして、次式で近似する。

$$E_d^k = K_c e_c^{k+1} + K_c K_p (V_t^{**k} - V_t^k) \quad (10)$$

図より V_t^{**k} は

$$V_t^{**k} = K_{vf} \omega_r^{**k} \quad (11)$$

なる関係がある。

一方、インバータ周波数に関しては開ループであるので、

$$f^k = \omega_r^{**k} / 2\pi \quad (12)$$

が成り立つ。 f^k と T^k には次の関係がある。

$$T^k = 1 / (6f^k) \quad (13)$$

3. 2 定常解析

定常状態では電動機の端子電圧 V_t が指令値 V_t^* に等しくなる。開ループ運転時の定常解析では電源電圧 E_d 、インバータ周波数 f 、回転角速度 ω_r を定めることにより、 V_t を含めた諸量が一意的に求まった。ここでは、 V_t^* 、 f 、 ω_r を与えて諸量を決定する必要がある。そこで V_t が V_t^* と等しくなるような E_d を Newton 法を用いて計算し、それにより定常解を算出した。

3. 3 線形サンプル値モデル

次に V/f 一定制御の場合の線形サンプル値モデルを導出する。開ループ運転時のサンプル値系の状態方程式において制御推移行列 θ を次式のように分割する。

$$\theta \Delta u^k = [\theta_1 \quad \theta_2 \quad \theta_3] \begin{bmatrix} \Delta E_d^k \\ \Delta f^k \\ \Delta T_L^k \end{bmatrix} \quad (14)$$

(9), (10) 式の定常解に対する微小変動分を考えると次式を得る。

$$\Delta e_c^{k+1} = \Delta e_c^k + \frac{K_p}{T_I} T (\Delta V_t^{*k} - \Delta V_t^k) \quad (15)$$

$$\Delta E_d^k = K_c \Delta e_c^{k+1} + K_c K_p (\Delta V_t^{*k} - \Delta V_t^k) \quad (16)$$

但し、 T は T^k の定常値である。

ここで帰還量として用いる ΔV_t^k は(2)式より次のように書ける。

$$\Delta V_t^k = C_v \Delta x^k + d_1 \Delta E_d^k + d_2 \Delta f^k + d_3 \Delta T_L^k \quad (17)$$

よってフィードバック制御系まで含めた系全体の線形サンプル値モデルは、(1), (15)~(17)式、及び(11), (12)式の微小変動分を考えた式より次式のように書ける。

$$\Delta x_f^{k+1} = \Phi_v \Delta x_f^k + \theta_{v1} \Delta \omega_r^{*k} + \theta_{v2} \Delta T_L^k \quad (18)$$

但し、

$$\Delta x_f^k = [(\Delta x^k)^T, \Delta e_c^k]^T \quad (19)$$

$$\Phi_v = \begin{bmatrix} \phi - \frac{K}{1+Kd_1} \theta_1 C_v & \frac{K_c}{1+Kd_1} \theta_1 \\ -\frac{TK_p}{T_I(1+Kd_1)} C_v & 1 - \frac{TK_c K_p d_1}{T_I(1+Kd_1)} \end{bmatrix} \quad (20)$$

$$\theta_{v1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2\pi} \theta_2 - \frac{K}{1+Kd_1} \left(\frac{d_2}{2\pi} - K_{vf} \right) \theta_1 \\ -\frac{TK_p}{T_I(1+Kd_1)} \left(\frac{d_2}{2\pi} - K_{vf} \right) \end{bmatrix} \quad (21)$$

$$\theta_{v2} = \begin{bmatrix} \theta_3 - \frac{Kd_3}{1+Kd_1} \theta_1 \\ -\frac{TK_p}{T_I(1+Kd_1)} d_3 \end{bmatrix} \quad (22)$$

$$K = K_c K_p \left(1 + \frac{T}{T_I} \right) \quad (23)$$

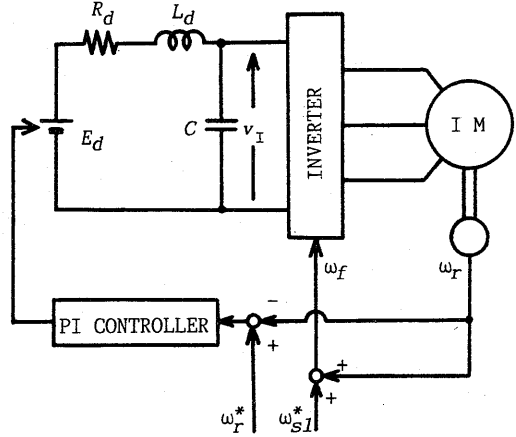


Fig. 3 Constant slip frequency control system

4. すべり周波数一定制御時の解析

4. 1 系の記述

すべり周波数一定制御の例として Fig. 3 に示すシステムについての解析を行う。

回転角速度指令 ω_r^* 及びすべり角速度指令 ω_{SI}^* を与えることにより電源電圧 E_d 、インバータ角速度 ω_f を制御する。ここでは回転角速度 ω_r と指令値 ω_r^* との差を PI 制御器の入力とし、その出力により直流電源電圧 E_d を制御するような速度制御ループを考える。

PI 制御器の構成は V/f 一定制御の場合と同様であり、PI 制御器への入力 $-\omega_r^*$ 及び ω_r に変わるだけである。よって PI 制御器に関する式としては(9), (10) 式と同様の考え方に基き次式を得る。

$$e_c^{k+1} = e_c^k + \frac{K_p}{T_I} T^k (\omega_r^{*k} - \omega_r^k) \quad (24)$$

$$E_d^k = K_c e_c^{k+1} + K_c K_p (\omega_r^{*k} - \omega_r^k) \quad (25)$$

一方インバータ周波数 f^k については

$$f^k = \frac{1}{2\pi} (\omega_r^k + \omega_{SI}^{*k}) \quad (26)$$

なる関係が成り立つ。

4. 2 定常解析

閉ループ運転時には ω_r^* 、 ω_{SI}^* 、 T_L に対して定常解が定まるが、ここでは簡単のために T_L のかわりに E_d を与えて開ループ運転時の解析結果をそのまま使用した。

4. 3 線形サンプル値モデル

次に系全体の線形サンプル値モデルを導出する。(24)~(26)式の微小変動を考えると

$$\Delta e_c^{k+1} = \Delta e_c^k + \frac{K_P}{T_I} T(\Delta \omega_r^{*k} - \Delta \omega_r^k) \quad (27)$$

$$\Delta E_d^k = K_c \Delta e_c^{k+1} + K_c K_P (\Delta \omega_r^{*k} - \Delta \omega_r^k) \quad (28)$$

$$\Delta f^k = \frac{1}{2\pi} (\Delta \omega_r^k + \Delta \omega_{sl}^{*k}) \quad (29)$$

となる。

(1), (14), (27)~(29)式より次式に示す系全体の線形サンプル値モデルを得る。

$$\Delta \mathbf{x}_f^{k+1} = \Phi_s \Delta \mathbf{x}_f^k + \theta_{s1} \Delta \omega_r^{*k} + \theta_{s2} \Delta \omega_{sl}^{*k} + \theta_{s3} \Delta T_L^k \quad (30)$$

ここで、

$$\Phi_s = \begin{bmatrix} \phi - K\theta_1 C_s + \frac{1}{2\pi} \theta_2 C_s & K_c \theta_1 \\ -\frac{TK_P}{T_I} C_s & 1 \end{bmatrix} \quad (31)$$

$$\theta_{s1} = \begin{bmatrix} K\theta_1 \\ \frac{TK_P}{T_I} \end{bmatrix} \quad (32)$$

$$\theta_{s2} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2\pi} \theta_2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (33)$$

$$\theta_{s3} = \begin{bmatrix} \theta_3 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (34)$$

$$C_s = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1] \quad (35)$$

5. 解析結果

数値計算に用いた電動機及び回路の定数を Table 2 に示す。

5. 1 V/f 一定制御時の解析結果

安定性は先に導出した状態推移行列 Φ_s の固有値を求め、それが単位円内に存在するかどうかで判定できる。Fig. 4 は $K_c=1.0$, $K_P=5.0$, $T_I=0.5(s)$, $s=0.01$ において、インバータ周波数 f をパラメータとした場合の根軌跡を示す。(a)図は前章で述べた厳密解析の結果

Table 2 Machine constants and circuit parameters

Motor : rating 2.2kW, 200V, 60Hz, P=4 J=0.0975kg·m ² (inertia including that of dc load generator)	
Motor constants	Circuit parameters
$r_s=0.859 \Omega$	$L_a=0.02 H$
$r'_r=0.459 \Omega$	$R_a=0.1 \Omega$
$L_s=L'_r=0.0904 H$	$C=0.02 F$
$M'=0.0873 H$	

果であり、(b)図は従来提案されていた基本波成分のみを考慮した解析による結果である。両者にあまり差はなく、高調波成分が系の安定性に及ぼす影響は小さいことがわかる。また、開ループ運転時に低周波領域で見られた不安定性³⁾が解消されている。Fig. 5 は Fig. 4 に対して K_P を 0.5 とした場合の結果である。 K_P が小さくなり、振動周波数が低くなることから、一般的に、インバータ周波数が f のとき複素根 z に対する振動周波数 f_z は次式で求められる。

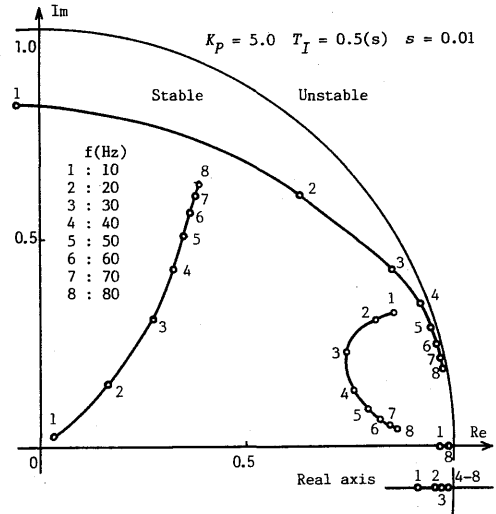


Fig. 4(a) Root locus diagram for parameter inverter frequency (Detailed analysis)

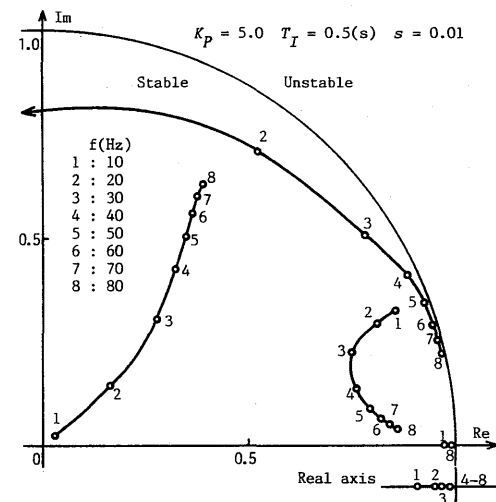


Fig. 4(b) Root locus diagram for parameter inverter frequency (Fundamental component analysis)

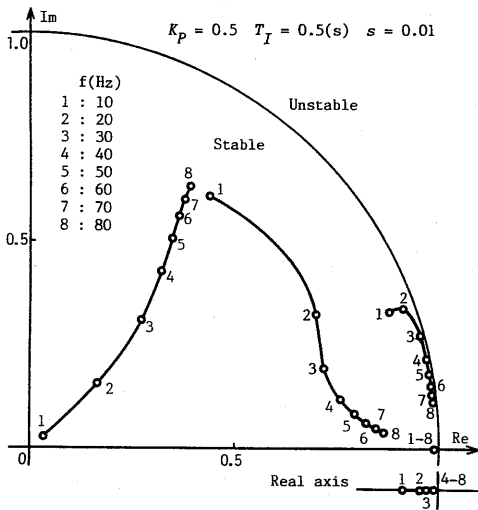


Fig. 5(a) Root locus diagram for parameter inverter frequency (Detailed analysis)

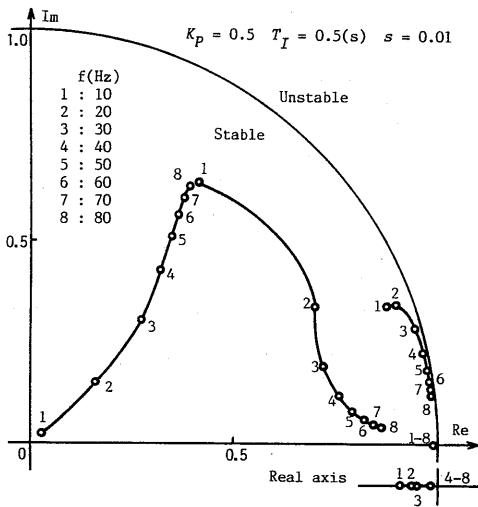


Fig. 5(b) Root locus diagram for parameter inverter frequency (Fundamental component analysis)

$$f_z = \frac{3f}{\pi} \tan^{-1} \frac{\text{Im}[z]}{\text{Re}[z]} \quad (36)$$

次に系の過渡応答の計算例を示す。Fig. 6 は $f=60$ (Hz), $K_c=1.0$, $K_p=5.0$, $T_I=0.5$ (s), $s=0.01$ の平衡点が, $t=0.1$ (s)で負荷トルク T_L の 0 から 0.5 (N·m) へのステップ変化により乱された場合の応答を(18)式より計算したものである。(36)式を用いて, Fig. 4(a)の単

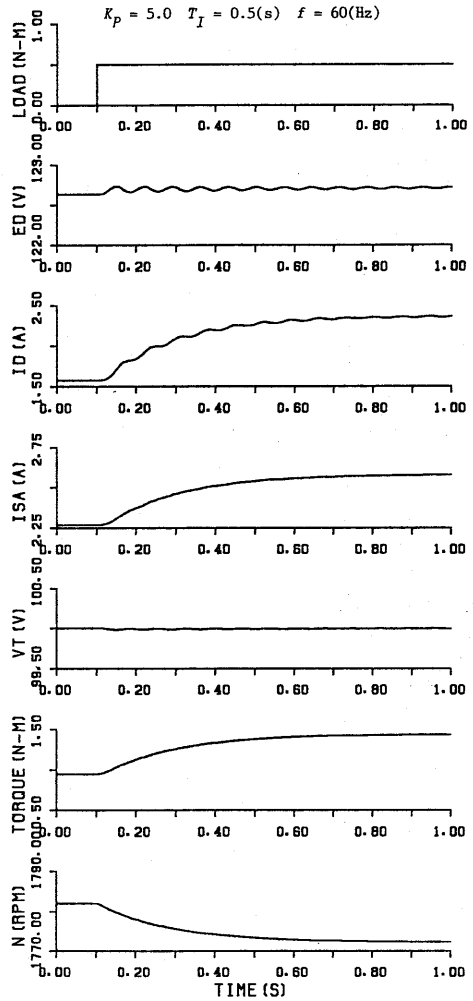


Fig. 6 Transient response after step change of load torque from zero to 0.5 (N·m)

位円近くの根から f_z を求めると,

$$f_z = \frac{3 \times 60}{\pi} \tan^{-1} \frac{0.2438}{0.9645} \doteq 14.2 \text{ (Hz)} \quad (37)$$

となり, 応答の振動周波数と一致する。このシステムには速度制御ループが無く, 負荷トルクの増加に相当した分だけすべりが大きくなり, 回転数は新しい平衡点へ移る。Fig. 7 は $f=20$ (Hz) の場合に同様の応答を計算した結果である。Fig. 4(a) よりわかるように, $f=20$ (Hz) の場合には $f=60$ (Hz) の場合に比較して単位円近くの複素根の絶対値が小さく, そのため過渡応答に振動が現れていない。

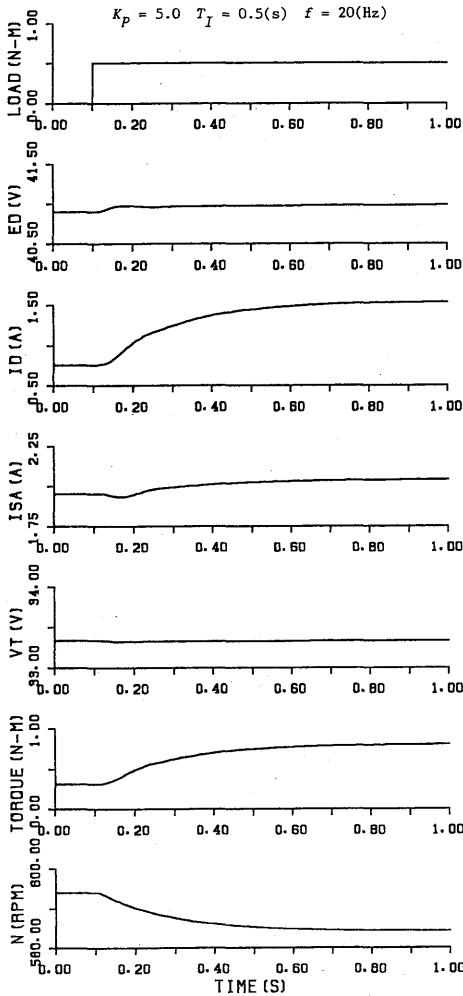


Fig. 7 Transient response after step change of load torque from zero to 0.5(N-m)

5. 2 すべり周波数一定制御時の解析結果

V/f一定制御時の場合と同様に、状態推移行列 Φ_s の固有値を計算し安定性を調べることにする。Fig. 8(a), (b)は $K_c=1.0, K_p=10.0, T_I=0.5(s), s=0.01$ の場合に回転角速度指令 ω_r^* をパラメータとしたときの根軌跡を描いたものであり、それぞれ厳密解析と基本波解析の結果である。両者の結果に多少の違いはあるが、それぞれの根はよく対応している。この場合回転角速度指令 ω_r^* が低い範囲で系は不安定となる。安定限界となる ω_r^* の値が基本波解析に比較して厳密解析の方が幾分大きく、高調波成分の影響により不安定な範囲がわずかながら広がっている。Fig. 9はFig. 8に対し K_p を1.0とした場合の結果である。この場合不安定

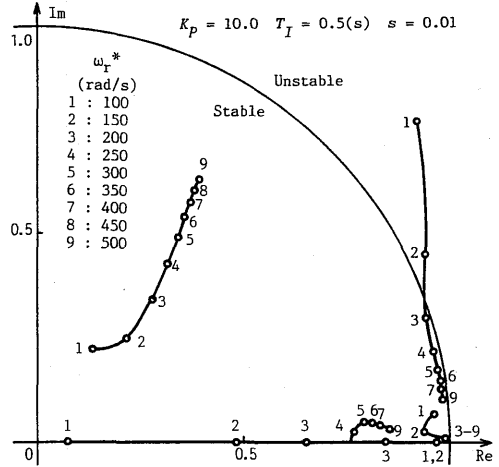


Fig. 8(a) Root locus diagram for parameter ω_r^* (Detailed analysis)

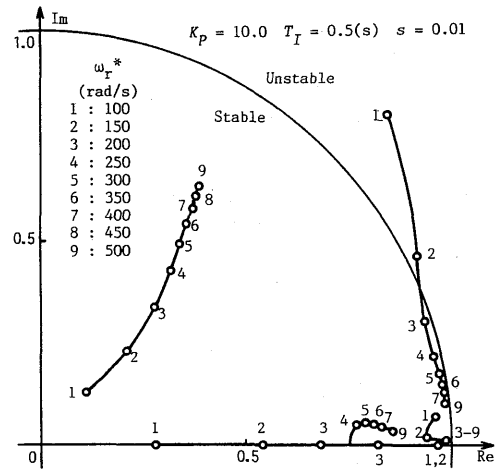


Fig. 8(b) Root locus diagram for parameter ω_r^* (Fundamental component analysis)

領域は存在しない。

次に負荷トルクのステップ変化に対する応答の計算例を示す。Fig. 10は $\omega_r^*=350(\text{rad/s}), K_p=10.0, T_I=0.5(s)$ の場合に $t=0.1(s)$ で負荷トルク T_L が0から0.5(N-m)に変化したときの応答を(30式)を用いて計算した結果である。またFig. 11は ω_r^* が200(rad/s)の場合の応答である。両者を比較すると、 $\omega_r^*=200(\text{rad/s})$ の方が系が振動的となっていることがわかる。さらに ω_r^* が小さくなると、Fig. 8(a)からわかるように系は不安定となる。Fig. 12はFig. 11に対して $K_p=1.0$ とした場合の応答である。この場合には速度ゲインが小さく電動機の色度はゆっくり回復している。これは、Fig. 9(a)に示す偏角の非常に小さい複素共役根に起因している。

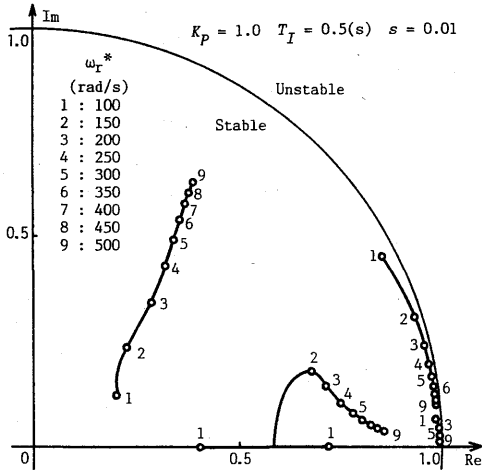


Fig. 9(a) Root locus diagram for parameter ω_r^* (Detailed analysis)

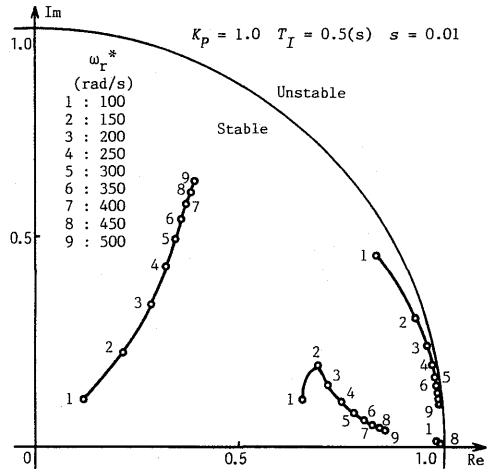


Fig. 9(b) Root locus diagram for parameter ω_r^* (Fundamental component analysis)

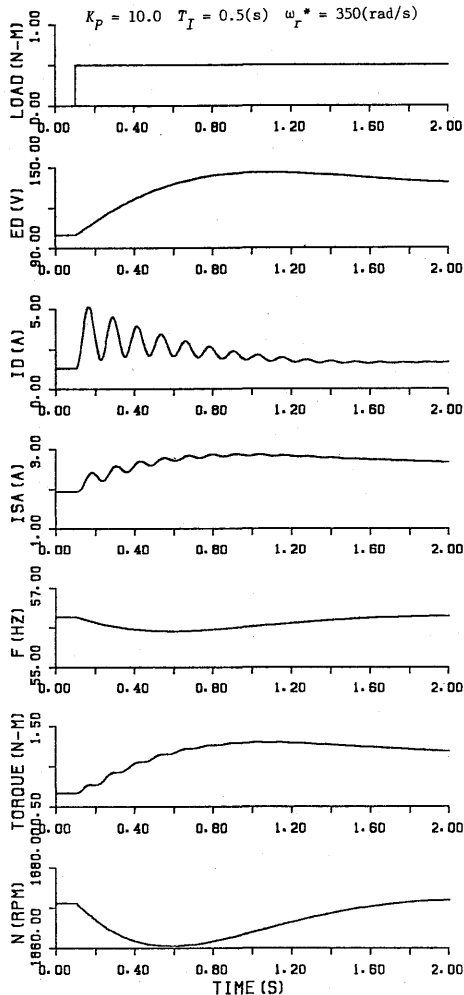


Fig. 10 Transient response after step change of load torque from zero to 0.5(N-m)

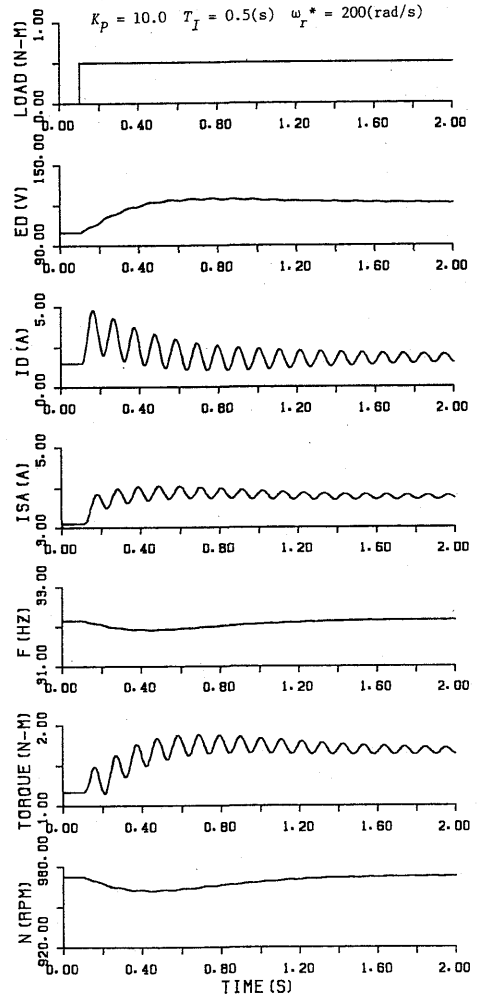


Fig. 11 Transient response after step change of load torque from zero to 0.5(N-m)

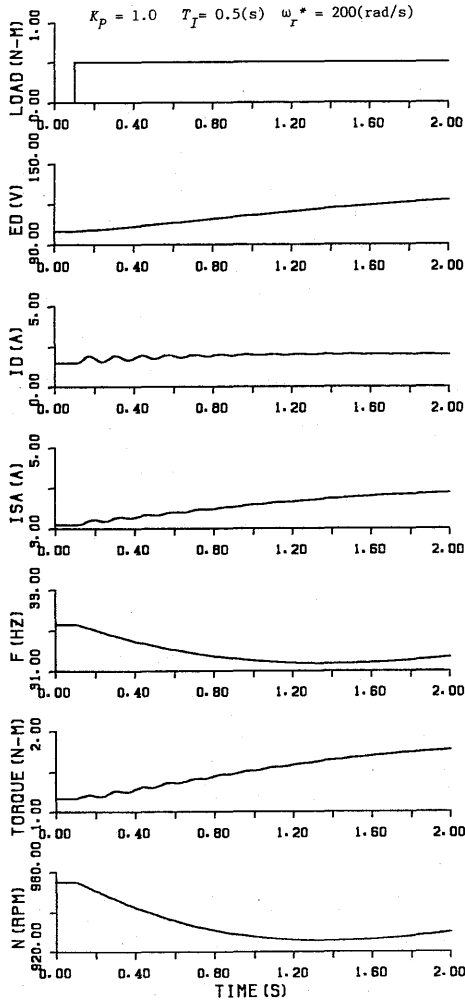


Fig. 12 Transient response after step change of load torque from zero to 0.5(N-m)

6. むすび

以上、電圧形インバータ駆動誘導電動機系において、 V/f 一定制御時やすべり周波数一定制御時のような閉ループ運転時の厳密な線形サンプル値モデルの導出法を提案した。

インバータ出力電圧の基本波成分のみを考慮した解析と提案した線形サンプル値モデルの解析結果は、安定性に関しては大差は見られず高調波成分が安定性に及ぼす影響は小さいと考えられる。従って、基本波成分のみを考慮した解析は、厳密解析と比較して解析が容易であるため、安定性を考える場合には有用であるといえる。しかし、電流やトルクの脈動分は基本波成分のみを考慮した解析では求めることはできない。従って定常時のトルクや電流の脈動の把握と同時に、過渡特性をも明確にする一連のシステム解析・設計法としてこの線形サンプル値モデルを利用すれば便利である。

参考文献

- 1) T.A.Lipo & P.C.Krause: "Stability analysis of a rectifier-induction motor drive" IEEE. Trans. Power Apparatus Sys. PAS-88, 55(1969)
- 2) F.Fallside & A.T.Worthey: "Steady-state oscillation and stabilization of variable-frequency inverter-fed induction-motor drives" Proc. IEE. Vol. 116, 991(1969)
- 3) 山田, 辻, 泉, 森崎, 小山: 「電圧形インバータ駆動誘導電動機系の線形サンプル値モデル」長大工研究報告 Vol. 14, No.22 (昭59-1)