

有限帯板法による固定斜交板の曲げ解析

若 菜 啓 孝*

Bending Analysis of Clamped Skew Plates
by Finite Strip Method

by

Hirotaka WAKANA

Skew plates have been widely used such as floor slabs of skew bridges, swept wings of aircrafts, ship hulls, and other plate structures. Recently, the bending analyses of skew plates have been carried out by several authors, however there is a few problem in actual calculation.

This paper presents an analytical method for clamped skew plates with various aspect ratios and skew angles by finite strip method using of the displacement function that take account of effect of skew angle. In order to judge the justice of this method, the result of numerical analysis is compared with those previous investigations.

1. はじめに

薄板構造には、非矩形板によって構成されるものが多く見受けられ、その例として、高速の航空機の後退翼、斜橋における床スラブ、船体構造などがある。

これまでに、非矩形板の内、斜板については、曲げや座屈に関する研究が幾つか行なわれている。

Timoshenko¹⁾は、有限差分法を用いて、単純支持された斜交板の解析を行なっている。Iyengar³⁾は、斜交座標系に変換された板の支配方程式および境界条件を満足する係数と二重級数を用いることにより、固定斜板を解析している。さらに、Kennedy²⁾、Mukhopadhyay⁴⁾は、ガラーキン法を用いているが、妥当な解を得るのに、かなり項数を必要としている。この他に、任意形状の板構造の解析が可能である、有限要素法や半解析的な積分方程式法を利用したものに、Dawe⁵⁾、

Chakrabarty⁶⁾の研究がある。しかしながら、計算が複雑になったり、大行列の計算が必要となる。

本論文では、外力の取り扱いが比較的簡便で、境界条件の一般性を有し、さらに、少ない自由度でも比較的精度の良い解が得られる有限帯板法を用いて、斜板の曲げ解析を行った。

剛性行列および荷重ベクトルは、変位関数を斜交座標系に変換して求めた。同様な方法は、Mukhopadhyay⁷⁾、Brown⁸⁾等によりすでに行なわれているが、節線方向に関しての波数の取り方が不十分である。ここでは、形状関数の直交性を吟味し、矩形板解析における剛性行列に、非矩形のために生じる項を考慮して、斜板の解析を行った。

解析対象は、周辺固定の斜板を取り扱い、斜角や縦横比を種々変化させて解析を行い、従来の解析解と比

昭和59年10月1日受理

*構造工学科 (Department of Structural Engineering)

較して、解の精度を調べた。また、外力の取り扱いが簡便であることから、集中荷重を受ける斜板の解析を行ない、斜角や縦横化と撓みの関係を調べた。

2. 解析法

解析法として、有限帯板法を用いる。

Fig.1(a) に示すように直交座標系をとり、斜板を平行四辺形帯板要素に分割し、局所座標を (x, y) とする。変位関数を仮定するために、Fig.1(b) のような斜交座標を導入する。すると、直交座標系と斜交座標系の関係は、次のように表わせる。

$$\begin{aligned} \xi &= x - \cot\alpha \cdot y \\ \eta &= \operatorname{cosec}\alpha \cdot y \quad |J| = \sin\alpha \quad (1) \end{aligned}$$

ここで、 J : ヤコビアン

α : 斜角

1) 変位関数と節線変位係数

変位関数は、斜交座標系で表示する。

$$w = \sum_{m=1}^r f(\xi) \zeta_m(\eta) \quad \{\delta\}_m = \sum_{m=1}^r [B]_m \{\delta\}_m \quad (2)$$

$\zeta_m(\eta)$ は、 η 軸方向の変位関数で、境界が両端固定の場合は、次のように表わせる。

$$\begin{aligned} \zeta_m(\eta) &= \sin \frac{\mu_m \eta}{a} - \sinh \frac{\mu_m \eta}{a} \\ &\quad - a_m \left(\cos \frac{\mu_m \eta}{a} - \cosh \frac{\mu_m \eta}{a} \right) \end{aligned}$$

ここに、

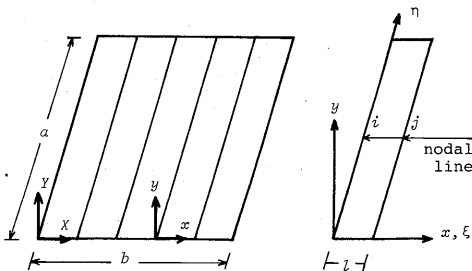
$$\mu_m = \frac{2m+1}{2} \pi,$$

$$a_m = \frac{\sin \mu_m - \sinh \mu_m}{\cos \mu_m - \cosh \mu_m} \quad (3)$$

$f(\xi)$ は、Hermite の多項式で、5 次式の場合は、

$$f_1(\xi) = 1 - 10\xi^3 + 15\xi^4 - 6\xi^5$$

$$f_2(\xi) = \xi(1 - 6\xi^2 + 8\xi^3 - 3\xi^4)$$



(a) Plate

(b) Typical strip

Fig.1 Plate and typical strip

$$f_3(\xi) = \xi^2(0.5 - 1.5\xi + 1.5\xi^2 - 0.5\xi^3)$$

$$f_4(\xi) = 10\xi^3 - 15\xi^4 + 6\xi^5$$

$$f_5(\xi) = \xi(-4\xi^2 + 7\xi^3 - 3\xi^4)$$

$$f_6(\xi) = \xi^2(0.5\xi - \xi^2 + 0.5\xi^3) \quad (4)$$

ここに $\xi = \frac{x}{l}$

また、 $\{\delta\}_m$ は、節線 i, j に関する節線変位係数である。(Fig.1(b))

$$\{\delta\}_m = \{w_i, \theta_i, \gamma_i, w_j, \theta_j, \gamma_j\}_m^T \quad (5)$$

ただし、 $\theta = \frac{\partial w}{\partial \xi}$, $\gamma = \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2}$

Hermite 3 次式の場合は、付録 A.1 参照

2) 剛性行列

板の曲げ変形によるひずみエネルギーは、次式で表わされる。

$$U = \int_A \frac{1}{2} \{\epsilon\}^T [D] \{\epsilon\} dA \quad (6)$$

(6)式において、 A は要素内領域で、 $[D]$ は平板の材料定数による弾性係数行列 (3×3)、 $\{\epsilon\}$ は直交座標系で表わされた一般化ひずみである。

$$\{\epsilon\} = \left\{ -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right\}^T \quad (7)$$

斜交座標系 (ξ, η) に変換し、前述の変位関数を用いる。

$$\{\epsilon\} = [C] \{\bar{\epsilon}\} = [C] \sum_{m=1}^r [L]_m \{\delta\}_m \quad (8)$$

ここで、 $[C]$ は座標変換マトリックスで、(1)の関係式より、

$$[C] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{\tan^2 \alpha} & \frac{1}{\sin^2 \alpha} & \frac{1}{\sin \alpha \tan \alpha} \\ \frac{2}{\tan \alpha} & 0 & \frac{1}{\sin \alpha} \end{bmatrix}$$

$$\{\bar{\epsilon}\} = \left\{ -\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} \quad 2 \frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \eta} \right\}^T$$

$[L]_m$ は、 $[B]_m$ を適当階微分して得られる行列である。したがって、(6)(8)より

$$U = \{\delta\}^T \int_{A_0} \frac{1}{2} [L]_m^T [C]^T [D] [C] [L]_m \{\delta\} dA_0 \quad (10)$$

ただし、 A_0 : 斜交座標系に関する要素内領域と表わされる。

また、要素表面に外力 P が働く場合の外力ポテンシャルは、次式となる。

$$W_p = - \int_A P \cdot w dA = - \int_A \{\delta\}^T [B]_m^T \{P\} dA \quad (11)$$

前述と同様、(11)式は次のように書き改められる。

$$W_p = - \int_{A_0} \{\delta\}^T [B]_m^T \{P\} \cdot J \cdot dA_0 \quad (12)$$

以上の(10)、(12)式を用い、ポテンシャルエネルギーの変分原理より、要素剛性行列[S]_{mn}と荷重ベクトル{F}_mが次式で与えられる。

$$[S]_{mn} \{\delta\}_m = \{F\}_m \quad (13)$$

ここに、

$$[S]_{mn} = \int_{A_0} [L]_m^T [C]^T [D] [C] [L]_n \cdot J dA_0 \quad (14)$$

$$\{F\}_m = \int_{A_0} [B]_m^T \{P\} \cdot J \cdot dA_0 \quad (15)$$

また、(14)式は、次のように分けて考えることができる。

$$[S]_{mn} = [S_1]_{mn} + [S_2]_{mn} \quad (16)$$

ただし、[S₁]_{mn}：矩形の帯板要素の場合に用いられる剛性行列⁹⁾

[S₂]_{mn}：要素が非矩形の場合に付加される剛性行列
(付録A.2(a)(b)参照)

Multiplier: $\frac{qa^4}{D} \times 10^{-3}$
β: $\frac{a}{b}$ α: Skew Angle

α	75°	60°	45°	30°
Author1*	1.1350	0.7512	0.3358	0.0860
Author2**	1.1304	0.7502	0.3383	0.0904
Iyengar ³⁾	1.1230	0.7687	0.3761	0.1073
Mukhopadhyay ⁴⁾	1.1230	0.7692	0.3769	0.1073
Kennedy ²⁾	1.1206	0.7382	0.3175	0.0750

* Third order (4 strips, 8 waves)
** Fifth order (4 strips, 6 waves)

Table.1 Maximum deflection of rhombic plates subjected to uniformly distributed loading

Multiplier: $-qa^2 \times 10^{-2}$
β=1.0, poisson Ratio = 1.0/3.0

α	Iyengar ³⁾	Mukhopadhyay ⁴⁾	Author2
75	4.7488(0.40)	4.850(0.40)	4.6343(0.40)
60	4.0024(0.31)	4.056(0.30)	3.7588(0.33)
45	2.9883(0.20)	2.866(0.18)	2.6217(0.23)
30		1.806(0.15)	1.6678(0.17)

() Position from the obtuse Corner

Table.2 Maximum edge moment and position from the obtuse corner

(14)、(15)式の領域積分は解析的に可能である。

3) 応力 (曲げ及び捩りモーメント)

式(13)より、{δ}_mが計算されると、応力は次式で計算される。

$$\begin{aligned} \{\sigma\} &= [D] \{\epsilon\} \\ &= [D] [C] \sum_{m=1}^r [L]_m \{\delta\}_m \end{aligned} \quad (17)$$

ただし、{σ} = {M_x, M_y, M_{xy}}

3. 数値解析

解析対象として、等分布荷重、集中荷重を受ける全周固定の斜板を取り扱った。

1) 等分布荷重を受ける斜板

全周固定、等分布荷重の条件下で、斜板の曲げ解析を行ない、他の解析解との比較を行なった。

Table.1 は、菱形平板の中央点での撓みを示したものである。変位関数は、Hermite の3次及び5次の多項式を用い、精度の比較を行なった。両者の解ともに、Kennedy²⁾ の値とIyengar³⁾ 等の値の間にあり、良好な結果が得られる。これより、変位に関しては、変位関数の次数は関係しないことがわかる。しかしながら、モーメントに関しては、矩形平板の解析等から、曲率の連続性を考慮した、5次多項式を用いた方が良好な結果が得られる。したがって、以下には、5次多項式の場合の結果を示す。

Table2 は、固定辺上の最大モーメントと狭角部か

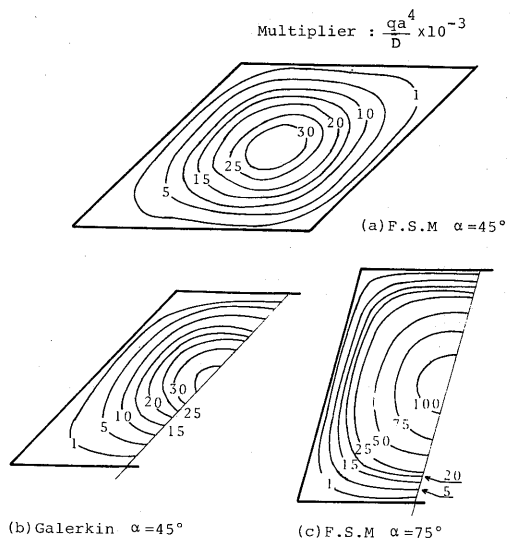


Fig.2 The contour curves of deflection

の位置を示したものである。本解析値は、他解と比較して5%から10%程低い値を示し、斜角が小さい程、差が大きい。しかしながら、最大モーメントの発生する位置に関しては、良好な結果が得られる。

変位及びモーメントの分布をFig.2, Fig.3に示す。Fig.2(a)及び(c)は、本解析による撓み等高線図で、(b)はガラーキソ法(付録A.3)を用いた場合の解である。(a)、(b)を比較した場合、類似した等高線図が得られ、撓みは中央部より階円状に拡がり、中央点に関

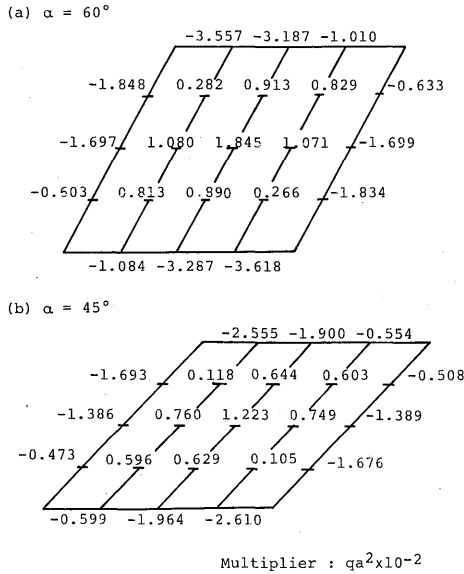


Fig.3 Variation of bending moment

$\beta : \frac{a}{b}$ Multiplier : $\frac{qa^4}{D} \times 10^{-3}$

β	α	Authors	Iyengar ²⁾	Kennedy ²⁾
1.25	75	0.6637	0.6609	0.6594
	60	0.4358	0.4489	0.4350
	45	0.1929	0.2162	0.1881
	30	0.0492	0.0598	0.0448
1.50	75	0.3839	0.3825	0.3819
	60	0.2497	0.2561	0.2531
	45	0.1096	0.1199	0.1106
	30	0.0276	0.0316	0.0266
2.00	75	0.1394	0.1386	0.1381
	60	0.0897	0.0906	0.0919
	45	0.0393	0.0407	0.0410
	30	0.0098	0.0102	0.0101

Table.3 Maximum deflection of skew plates subjected to uniformly distributed loading

して点対称となる。また、狭角部においては、支持辺が接近しているため、撓みが小さくなる、(c)については、斜角が90°に近い場合、正方形板の場合とあまり変わらない変形を示している。

Fig.3に斜角が60°と45°の場合のモーメント分布図を示す。斜角が小さい場合、振りモーメントの影響で、狭角部と広角部におけるモーメントの差が大きくなる。

縦横比を変化させ、他解との比較を行った結果をTable.3に示す。数値は、中央点における撓みである。縦横比が大きくなる程、良好な結果を得る。Fig.4は、固定辺上の最大モーメントと縦横比及び斜角の関係を示したものである。縦横比を大きくしていく場合や斜角が小さくしていった場合、横造としては、板よりも梁に近い状態となり、解は収束する。

2) 集中荷重を受ける斜板

集中荷重を受ける斜板についての解析例は数少ない。有限帯板法においては、荷重条件を比較的簡単に処理ができ、荷重項の変更のみを考ればよい。したがって、まず、全周固定、中央に集中荷重の条件下で、矩形平板の解析を行い、解の精度を確める。Table.4は、帯

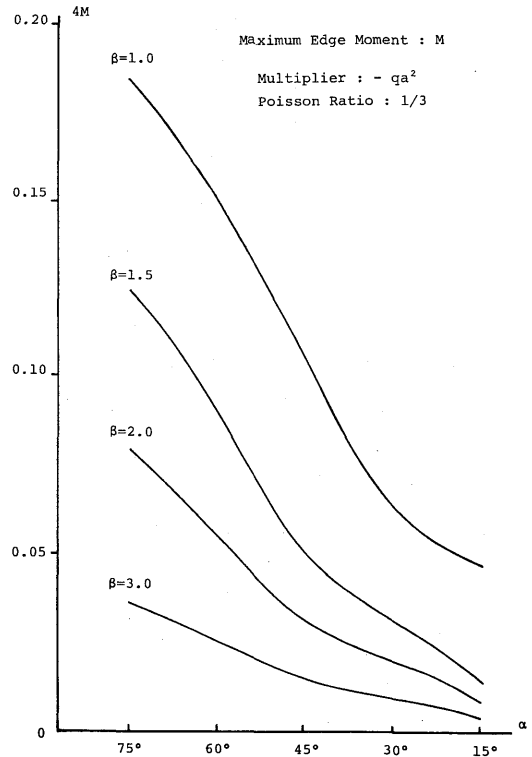


Fig.4 Relationships between maximum edge moment and skew angle

$$\beta: \frac{a}{b}$$

waves	$\beta=1.0$		$\beta=0.5$	
	Deflection	Moment	Deflection	Moment
3	0.00554	-0.11929	0.00719	-0.16251
4	0.00558	-0.12070	0.00735	-0.16304
5	0.00554	-0.11928	0.00719	-0.16251
6	0.00554	-0.11929	0.00719	-0.16251
Exact ¹	0.00560	-0.1257	0.00722	-0.1674

Table.4 Deflection at center and bending moment at middle of longer sides (Concentrated Load)

板数を4として、波数と解の関係を示したものである。モーメントの値は、やや小さめであるが、撓みに関しては、良好な結果が得られる。これより、集中荷重を受ける平板の解析が、帯板法で十分可能であることがわかる。

等分布荷重の場合と同様な剛性行列を用いて、斜板の解析を行なう。Fig.5は、中央点に集中荷重を受ける全周固定斜板の荷重点における撓みを示したものである。縦横比及び斜角と撓みの関係は、等分布荷重の場合と類似した傾向が得られる。

3. まとめ

変位関数を斜交座標系に変換し、有限帯板法で全周固定された斜板の解析を行ない、従来の解析解と比較して、解の精度を調べた。矩形要素に対する剛性行列に、非矩形要素によって生じる項を考慮することで、種々の斜角や縦横比において、十分実用性のある解が得られ、特に縦横比が大きい場合は精度が良いことがわかった。また、有限帯板法は外力の取り扱いが、比較的簡便であることから、集中荷重を受ける矩形板の解析を行ない、解の精度を調べ、解析対象を斜板に拡張した。この場合の比較解はないが、斜角及び縦横比と撓みの関係が把握できた。

今後、境界条件を種々変化させ、斜板の曲げ解析における本解析法の有用性を確める必要がある。

終りにあたり、日頃より多くの御指導をいただいでる本学福地信義助教授に対し、深く感謝致します。

参考文献

- 1) Timoshenko S. and Woinowsky-Krieger S. : Theory of Plates and Shells, 2nd edition, McGraw-Hill,(1959)
- 2) Kennedy J. B. : On the Bending of Clamped

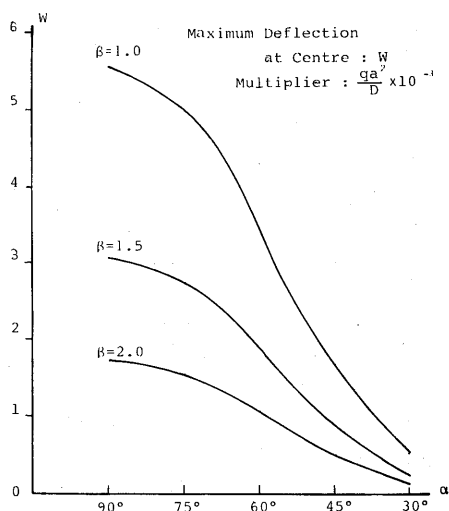


Fig.5 Relationships between maximum deflection and skew angle

Skew Plates Under Uniform Pressure, J1 R. Aeronaut. Soc., vol. 69, p352, May, 1965

- 3) Iyengar K.T.S. and Srinivansan R.S. : Clamped Skew Plates Under Uniformly Distributed Load, J1 R. Aeronaut.Soc.,vol.71,p139,Feb., 1967
- 4) Mukhopadhyay M. : A Galerkin Solution for Clamped Skew Plates in Bending, Aeronautical Journal, p396, Sep. 1978
- 5) Dawe D.J. : Parallelogrammic Elements in the Solution of Rhombic Cantilever Plate Problems, J. Strain Analysis, vol.1, No.3, 1966
- 6) Maiti M. and Chakrabarty : Integral Equation Solutions for Simply Supported Polygonal Plates, Int. J. Eng. Sci., vol.12, p793, Nov., 1973
- 7) Mukhopadhyay M. : Finite Strip Method of Analysis of Clamped Skew Plate in Bending, Proc. Ins. Civil Engineers, vol.61, p189, 1976
- 8) Brown T.G. and Ghali A. : Semi-Analytic Solution of Skew Plates in Bending, Proc. Int. Civil engineers, vol.57, p165, 1974
- 9) Cheung Y.K. : Finite Strip Method In Structural Analysis, Pergamon International Library, 1976

付 録

A.1 Hermite 3 次多項式及び節線変位係数

$$f_1(\xi) = 1 - 3\xi^2 + 2\xi^3$$

$$f_2(\xi) = \xi(1 - 2\xi + \xi^2)$$

$$f_3(\xi) = 3\xi^2 - 2\xi^3$$

$$f_4(\xi) = \xi(\xi^2 - \bar{\xi})$$

$$\{\delta\}_m = \{w_i, \theta_i, w_j, \theta_j\}$$

A.2 剛性行列(S_2)

a) Hermite 3 次多項式の場合 (4×4)

$$[S]_{mn} = \begin{pmatrix} K1 & K2 & K3 & -K2 \\ & K4 & K2 & K5 \\ -Sym & & -K1 & K2 \\ & & & -K4 \end{pmatrix}$$

ここで,

$$K1 = \frac{E}{a^2} (Y_3 + Y_4)$$

$$K2 = \frac{2C}{ab} (Y_1 - Y_2) - \frac{Eb}{5a^2} (Y_3 - Y_4)$$

$$K3 = \frac{E}{a^2} (-Y_3 + Y_4)$$

$$K4 = \frac{C}{a} (Y_1 + Y_2)$$

$$K5 = \frac{C}{a} (-Y_1 + Y_2) + \frac{Eb^2}{30a^2} (Y_3 - Y_4)$$

b) Hermite 5 次多項式の場合 (6×6)

$$[S_2]_{mn} = \begin{pmatrix} K1 & K2 & K3 & K4 & -K2 & K3 \\ & K5 & K6 & K2 & K7 & K8 \\ & & 0 & K3 & -K8 & K9 \\ & & & -K1 & K2 & -K3 \\ -Sym & & & & -K5 & -K6 \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

ここで,

$$K1 = \frac{E}{a^2} (Y_3 + Y_4)$$

$$K2 = \frac{18C}{7b} (Y_1 - Y_2) - \frac{11bE}{42a^2} (Y_3 - Y_4)$$

$$K3 = \frac{2C}{7b^2} (Y_1 - Y_2) - \frac{b^2E}{42a^2} (Y_3 - Y_4)$$

$$K4 = \frac{E}{a^2} (-Y_3 + Y_4)$$

$$K5 = C(Y_1 + Y_2)$$

$$K6 = \frac{9Cb}{70} (Y_1 - Y_2) - \frac{b^2E}{504a^2} (Y_3 - Y_4)$$

$$K7 = -\frac{11C}{7} (Y_1 - Y_2) + \frac{13Eb^2}{210a^2} (Y_3 - Y_4)$$

$$K8 = \frac{11Cb}{70} (Y_1 - Y_2) - \frac{13Eb^2}{2570a^2} (Y_3 - Y_4)$$

$$K9 = \frac{Cb}{70} (Y_1 - Y_2) - \frac{Eb^4}{2570a^2} (Y_3 - Y_4)$$

ただし,

$$C = \frac{D_x}{\sin \alpha \tan \alpha} + \frac{D_y}{\sin \alpha \tan^3 \alpha} + \frac{2D_{xy}}{\tan \alpha \sin \alpha}$$

$$E = \frac{D_y}{\sin^2 \alpha \tan \alpha}, \quad Y_1 = \int_0^1 Y_m Y_n d\eta$$

$$Y_2 = \int_0^1 Y_m Y_n d\eta, \quad Y_3 = \int_0^1 Y_m Y_n d\eta$$

$$Y_4 = \int_0^1 Y_m Y_n d\eta$$

A.3 ガラーキン法における変位関数

$$w = \sum_{m=0}^r \sum_{n=0}^r A_{mn} \xi^m \eta^n (\xi^2 - a^2) (\eta^2 - b^2)^2$$