

変厚矩形板の曲げの一簡易解析法

松田 浩*・崎山 毅*
森田 千尋**An Approximate Method for Analyzing the Mindlin
Rectangular Plate with Variable Thickness

by

Hiroshi Matsuda*, Takeshi Sakiyama*
and Chihiro Morita**

An approximate method for the numerical analysis of rectangular plates based on Mindlin's theory is presented. Any two opposite edges are assumed to be simply supported in the present analysis, and a variety of boundary conditions can be specified along either of the remaining two opposite edges.

In order to confirm the convergence and accuracy of numerical solutions, the square plates with various boundary conditions are calculated, and the results are compared with discrete solutions previously obtained by the authors and analytical solutions.

As the applications of the proposed method, variable thickness rectangular plates with two boundary conditions are calculated.

1. まえがき

変厚矩形板の基礎微分方程式は、任意の関数として与えられる板剛度および板厚を係数とする、いわゆる変数係数の連立偏微分方程式となるために、その解析解を一般的に求めることはほとんど不可能であると考えられる。そのため、変厚板の解法としていくつかの近似解法、数値解法が提案されている^{1)~5)}。

筆者らも、先に、任意の境界条件、荷重条件および変断面性に対する解析の容易さおよび方法の一般性という観点に立ち、基礎微分方程式の積分方程式への変換と積分方程式の近似解法の応用とにより、変厚矩形板の基礎微分方程式の離散解を求め、これに基づく変厚板の解法を提示した⁶⁾。

本論文は、境界条件を対辺単純支持他対辺任意とし、板厚変化も単純支持辺に沿って、一方向に変化する変

厚矩形板を対象とした解析法を提示したものである。

このように境界条件、板厚変化を限定すると、変厚板の基礎微分方程式を一方方向には級数展開して定式化しなおした上で、先に提示した解法と同様な手法で、数値解析を行うことができる。

一方向に級数展開する解法として、有限帯板法⁷⁾あるいは伝達マトリックス法⁸⁾などが提示され既に実用化されている。また、伝達マトリックス法と差分法あるいは有限要素法を組み合わせた差分伝達マトリックス法⁹⁾、有限要素伝達マトリックス法¹⁰⁾などの解法も提示されている。

これらの解法の中で、本法は伝達マトリックス法と最も類似性があるものと考えられるが、(1)基礎微分方程式を積分方程式に変換して、数値積分法を応用すること、(2)格間伝達マトリックスが基礎式を展開するこ

平成元年4月28日受理

*構造工学科 (Dept. of Structural Eng.)

**構造工学専攻 (Graduate Student, Structural Eng.)

とにより直接的に誘導されること、(3)従来の伝達マトリックス法は薄板を対象としていたが、本法の基礎式はせん断変形の影響を考慮した Mindlin 理論に基づくこと、(4)解析のフローがあたかも微分方程式を解析的に解くかのような解析手法であること、などの点において、従来の伝達マトリックス法とは相違点が見い出される。また、本解析法によれば、最終的に解くべき連立方程式の未知数が3個となり、パソコンなどの比較的小型の計算機でも短時間で計算可能である。

2. 変厚板の基礎微分方程式

Fig. 1 に示すように、 $y = 0$ および $y = b$ なる対辺上で単純支持され、他の対辺の支持条件が任意で、かつ、板厚が x 方向にのみ変化する変厚板を考える。 y 方向にのみ級数展開すると、Mindlin 理論に基づく変厚矩形板の曲げ挙動を支配する基礎微分方程式は、たわみ w 、たわみ角 θ_y 、 θ_x 、せん断力 Q_x 、曲げモーメント M_x 、ねじりモーメント M_{xy} の6個の諸量を独立変数とする次の6式で与えられる¹¹⁾。

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} = -\kappa Gh \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \right) - q \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} = \kappa Gh \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \theta_y \right) - D(1-\nu^2) \frac{\partial^2 \theta_y}{\partial y^2} - \nu \frac{\partial M_x}{\partial y} \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} = Q_x - \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \quad (1.3)$$

$$\frac{\partial \theta_y}{\partial x} = -\frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{2}{D(1-\nu)} M_{xy} \quad (1.4)$$

$$\frac{\partial \theta_x}{\partial x} = -\nu \frac{\partial \theta_y}{\partial y} + \frac{M_x}{D} \quad (1.5)$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = -\theta_x + \frac{Q_x}{\kappa Gh} \quad (1.6)$$

ここに、 $q = q(x)$ ：横荷重強度、 E ：弾性係数、 ν ：ポアソン比、 $G = E/2(1+\nu)$ ：せん断弾性係数、

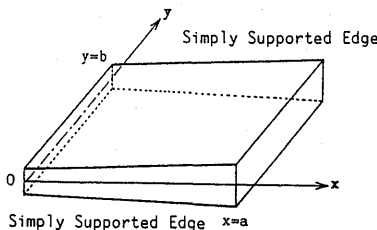


Fig. 1 Coordinate System of Variable Thickness Plate.

$h = h(x)$ ：板厚、 $D = D(x) = Eh^3/12(1-\nu^2)$ ：板剛度、 $\kappa = 5/6$ ：せん断修正係数、

式(1.1)～(1.6)に表されないせん断力 Q_y および曲げモーメント M_y は次式により表される。

$$Q_y = \kappa Gh \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \theta_y \right) \quad (2.1)$$

$$M_y = D(1-\nu^2) \frac{\partial \theta_y}{\partial y} + \nu M_x \quad (2.2)$$

いま、 $y = 0$ および $y = b$ が単純支持であることを考慮して、たわみ関数 $w(x, y)$ 、たわみ角関数 $\theta_y(x, y)$ 、 $\theta_x(x, y)$ 、せん断力関数 $Q_x(x, y)$ 、曲げモーメント関数 $M_x(x, y)$ 、ねじりモーメント関数 $M_{xy}(x, y)$ および荷重強度関数 $q(x, y)$ を次のように仮定する。

$$\begin{aligned} w(x, y) &= \sum_m w_m(x) \sin \alpha_m \\ \theta_x(x, y) &= \sum_m \theta_{xm}(x) \sin \alpha_m \\ \theta_y(x, y) &= -\sum_m \theta_{ym}(x) \cos \alpha_m \\ Q_x(x, y) &= \sum_m Q_{xm}(x) \sin \alpha_m \\ M_x(x, y) &= \sum_m M_{xm}(x) \sin \alpha_m \\ M_{xy}(x, y) &= -\sum_m M_{xym}(x) \cos \alpha_m \\ q(x, y) &= \sum_m q_m(x) \sin \alpha_m \\ q_m &: \text{Appendix I 参照} \quad \alpha_m = (2m-1)\pi y/b \end{aligned} \quad (3)$$

式(3)を式(1.1)～(1.6)および式(2.1)、(2.2)に代入し、3角級数関数の直交性を考慮して y 方向に積分すると、連立偏微分方程式(1.1)～(1.6)は次のような連立常微分方程式に変換される。以下では、繁雑さを避けるために、 $w_m(x)$ 、 $\theta_{xm}(x, y)$ 、……を w_m 、 θ_{xm} 、……と略記する。

$$\frac{dQ_{xm}}{dx} = -\kappa Gh \left[-(2m-1)^2 (\pi/b)^2 w_m + (2m-1)(\pi/b) \theta_{ym} \right] - q_m \quad (4.1)$$

$$\frac{dM_{xym}}{dx} = -\kappa Gh (2m-1)(\pi/b) w_m + [\kappa Gh + D(1-\nu^2)(2m-1)^2 (\pi/b)^2] \theta_{ym} + \nu (2m-1)(\pi/b) M_{xm} \quad (4.2)$$

$$\frac{dM_{xm}}{dx} = Q_{xm} - (2m-1)(\pi/b) M_{xym} \quad (4.3)$$

$$\frac{d\theta_{ym}}{dx} = (2m-1)(\pi/b) \theta_{xm} + \frac{2M_{xym}}{D(1-\nu)} \quad (4.4)$$

$$\frac{d\theta_{xm}}{dx} = -\nu(2m-1)(\pi/b)\theta_{ym} + \frac{M_{xm}}{D} \quad (4.5)$$

$$\frac{dw_m}{dx} = -\theta_{xm} + \frac{Q_{xm}}{\kappa Gh} \quad (4.6)$$

$$Q_{ym} = \kappa Gh \sum_m [(2m-1)(\pi/b)w_m - \theta_{ym}] \cos \alpha_m \quad (5.1)$$

$$M_{ym} = \kappa Gh \sum_m [D(1-\nu^2)(2m-1)(\pi/b)\theta_{ym} + M_{xm}] \sin \alpha_m \quad (5.2)$$

ここで、断面力 Q_x , M_x , M_{xy} あるいは Q_y , M_y , および変形 w , θ_y , θ_x に関して次の無次元量 $X_1 \sim X_8$

$$\begin{aligned} X_1 &= a^2 Q_{xm} / [D_0(1-\nu^2)], \\ X_2 &= a M_{xym} / [D_0(1-\nu^2)], \\ X_3 &= a M_{xm} / [D_0(1-\nu^2)], \\ X_4 &= \theta_{ym}, \\ X_5 &= \theta_{xm}, \\ X_6 &= w_m/a, \quad \eta = x/a, \\ X_7 &= a^2 Q_{ym} / [D_0(1-\nu^2)], \\ X_8 &= a M_{ym} / [D_0(1-\nu^2)] \end{aligned}$$

を導入すれば、式(4.1)~(4.6)および式(5.1), (5.2)は次のように書き換えられる。

$$\frac{dX_1}{d\eta} = C_{16}X_6 + C_{14}X_4 - \bar{q} \quad (6.1)$$

$$\frac{dX_2}{d\eta} = C_{26}X_6 + C_{24}X_4 + C_{23}X_3 \quad (6.2)$$

$$\frac{dX_3}{d\eta} = C_{31}X_1 + C_{32}X_2 \quad (6.3)$$

$$\frac{dX_4}{d\eta} = C_{45}X_5 + C_{42}X_2 \quad (6.4)$$

$$\frac{dX_5}{d\eta} = C_{54}X_4 + C_{53}X_3 \quad (6.5)$$

$$\frac{dX_6}{d\eta} = C_{65}X_5 + C_{61}X_1 \quad (6.6)$$

$$X_7 = (1/K) \sum_m [(2m-1)\mu\pi X_6 - X_4] \cos \alpha_m \quad (7.1)$$

$$X_8 = \sum_m [(1/I)(2m-1)\mu\pi X_4 + \nu X_3] \sin \alpha_m \quad (7.2)$$

ここに、 $C_{16} = K(2m-1)^2(\mu\pi)^2$,
 $C_{14} = -K(2m-1)\mu\pi$,

$$\begin{aligned} C_{26} &= -K(2m-1)\mu\pi, \\ C_{24} &= K + I(2m-1)^2(\mu\pi)^2, \\ C_{23} &= \nu(2m-1)\mu\pi, \\ C_{31} &= 1, \\ C_{32} &= -(2m-1)\mu\pi, \\ C_{45} &= (2m-1)\mu\pi, \\ C_{42} &= 2(1+\nu)I, \\ C_{54} &= -\nu(2m-1)\mu\pi, \\ C_{53} &= (1-\nu^2)I, \\ C_{65} &= -1, \\ C_{61} &= 1/K \end{aligned}$$

a , b : 矩形板の辺長, $\mu = b/a$, h_0 : 基準板厚,
 $\bar{q} = 4a^3/[D_0(1-\nu^2)(2m-1)\pi]q_0$, q_0 : 基準荷重強度,
 $K = \kappa Gha^2/D_0(1-\nu^2)$, $I(x) = [h_0/h(x)]^3$,
 $D_0 = Eh_0^3/[12(1-\nu^2)]$: 基準板剛度
式(6.1)~(6.6)を用いて、変厚矩形板の曲げ解析が行われる。

3. 基礎微分方程式の離散解

Fig. 2 に示すように、矩形板を x 方向に n 等分し、これらの等分割線要素の集合体とみなす。ここで、任意の等分割要素 i に関連する領域 $0 \leq \eta \leq \eta_i$ に注目し、これを領域 $[0, i]$ と表記することとする。

(1)はじめに、基礎微分方程式(6.1)~(6.6)の各式を変域 $[0, i]$ において積分し、積分方程式に変換する。(2)次に、等間隔の数値積分法の応用により、(1)で得られた積分方程式を離散表示すれば、無次元化された断面力および変形 ($p = 1 \sim 6$) の任意の分割線要素 i における値 X_{pi} に関する連立方程式が次のように得られる。

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -C_{14}\beta_{ii} & 0 & -C_{16}\beta_{ii} \\ 0 & 1 & -C_{23}\beta_{ii} & -C_{24}\beta_{ii} & 0 & -C_{26}\beta_{ii} \\ -C_{31}\beta_{ii} & -C_{32}\beta_{ii} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -C_{42}\beta_{ii} & 0 & 1 & -C_{45}\beta_{ii} & 0 \\ 0 & 0 & -C_{53}\beta_{ii} & -C_{54}\beta_{ii} & 1 & 0 \\ -C_{61}\beta_{ii} & 0 & 0 & 0 & -C_{65}\beta_{ii} & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} X_{1i} \\ X_{2i} \\ X_{3i} \\ X_{4i} \\ X_{5i} \\ X_{6i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ F_6 \end{bmatrix}$$

$$[\rho_{ip}]\{X_{pi}\} = \{F_i\}$$

F_i : Appendix II 参照

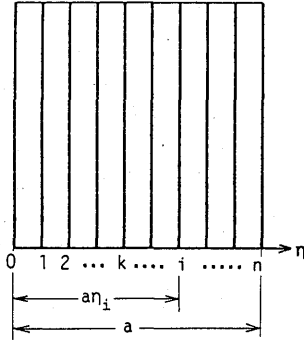


Fig. 2 Elements of Rectangular Plate.

この連立方程式を解くことにより任意の分割線要素 i における諸量 X_{pi} と $0 \sim i-1$ 番目の線要素の諸量 $X_{pk} (k = 0 \sim i-1)$ との関係式が求められ次式となる。

$$\begin{aligned} \{X_{pi}\} &= [\rho_{ip}]^{-1} \{F_i\} = [\gamma_{pi}] \{F_i\} \\ X_{pi} &= \sum_{t=1}^6 A_{pit} X_{t0} + \sum_{k=0}^{i-1} \sum_{l=1}^6 \beta_{ilk} B_{pit} X_{lk} \\ &\quad - \sum_{k=0}^i \gamma_{p4k} \beta_{ik} \bar{q}_k \end{aligned} \quad (8)$$

ここに、 $p = 1, 2, \dots, 6, i = 1, 2, \dots, n, \beta_{ik} = \alpha_{ik}/n$

$$A_{pt} = \gamma_{pt} \quad (t = 1 \sim 6)$$

$$B_{p1} = \gamma_{p3} C_{31} + \gamma_{p6} C_{61}$$

$$B_{p2} = \gamma_{p3} C_{32} + \gamma_{p4} C_{42}$$

$$B_{p3} = \gamma_{p2} C_{23} + \gamma_{p5} C_{53}$$

$$B_{p4} = \gamma_{p1} C_{14} + \gamma_{p2} C_{24} + \gamma_{p5} C_{54}$$

$$B_{p5} = \gamma_{p4} C_{45} + \gamma_{p6} C_{65}$$

$$B_{p6} = \gamma_{p1} C_{16} + \gamma_{p2} C_{26}$$

β_{ij} は数値積分法における重み係数である。本論文においては、等分割数値積分法として、Simpson の台形公式を用いることとする。このとき、 $\alpha_{ij} = 0.5 (f = 0, i)$ or $1.0 (f \neq 0, i)$ である。

ところで、領域 $[0, i]$ を最小領域 $[0, 1]$ から始めて、順次領域を拡大しつつ、各領域の i 番目の線要素の諸量 X_{pi} を式(8)より求め、これを次の領域の $i-1$ 番目の線要素の諸量として式(8)の右辺に逐次代入してゆけば、各領域の $1 \sim i-1$ 番目の線要素の諸量はすべて消去され、結局、任意線要素 i における諸量 X_{pi} は、この領域の境界線上 ($i = 0$) における諸量 X_{p0} によって表されることになり、次式のように整理される。

$$\begin{aligned} X_{pi} &= \sum_{d=0}^6 a_{pid} X_{d0} + q_{pi} \\ &= a_{pi1} (Q_{xm})_0 + a_{pi2} (M_{xym})_0 + a_{pi3} (M_{xm})_0 \\ &\quad + a_{pi4} (\theta_{ym})_0 + a_{pi5} (\theta_{xm})_0 + a_{pi6} (W_m)_0 \\ &\quad + q_{pi} \end{aligned} \quad (9)$$

ここに、

$$\begin{aligned} a_{pid} &= \sum_{t=1}^6 A_{pit} a_{t0d} + \sum_{k=1}^6 \sum_{l=0}^{i-1} \beta_{ilk} B_{pit} a_{lk d}, \\ a_{d0d} &= 1.0 \quad (d = 1 \sim 6) \\ q_{pi} &= \sum_{t=1}^6 A_{pit} q_{t0} + \sum_{k=1}^6 \sum_{l=0}^{i-1} \beta_{ilk} B_{pit} q_{lk} \\ &\quad - \sum_{k=0}^i \gamma_{p4k} \beta_{ik} \bar{q}_k \end{aligned}$$

式(9)は、変厚矩形板の離散表示された離散解である。離散解(9)に含まれる左端境界線要素における諸量 X_{d0} は、いわゆる積分定数であり、境界条件によって決定されるべきものである。また、 i 番目の線要素に対応する諸量 X_{pi} を積分定数 X_{d0} に関係づける要素 a_{pid}, q_{pi} は、式(8)と式(9)の恒等性より導き出され、伝達マトリックス法における伝達マトリックスに相当するものである。

4. 積分定数と境界条件

離散解(9)に含まれる積分定数 X_{d0} は、具体的には平板の $\eta = 0$ なる辺上の6個の断面力および変形 $Q_{xm}, M_{xm}, M_{xym}, W_m, \theta_{ym}, \theta_{xm}$ を表わすが、 $\eta = 0$ なる辺上の支持条件に応じて、これらのいずれか3個は既知となる。残りの積分定数の値は対辺の境界条件によって決定される。

Fig. 3に、6種の異なる支持条件をもつ平板の境界条件と積分定数を示す。また簡略化のため、以後、四辺単純支持板および対辺単純支持他対辺固定板などを各々SSSSおよびSCSCなどと表わす。

5. 数値解の収束性および精度

本法による矩形板の数値解の収束性および精度を検討するために、筆者らが前に提示した近似解法による解析結果⁶⁾および解析解との比較を行う。なお、本法およびRef. 6)において用いた基礎式はReissnerの平板曲げ理論に基づくものであるため、Kirchhoffの薄板曲げ理論に基づく解析解と比較する場合には、せん断変形の影響を十分に無視できる薄板を取り扱うこととし、板厚 h と辺長 a の比を $h/a = 0.01$ とする。

(1) 等厚板

はじめに、等厚板に関して、本解析法による数値解の収束性および精度を明らかにするために、Fig. 3に示すような境界条件をもつ正方形板に等分布荷重が満載される場合、および中央点に集中荷重を受ける四辺単純支持板について、断面力および変形の解析を行った。これらの結果をRef. 6)の結果および解析解とともにそれぞれTable 1~Table 7に示す。

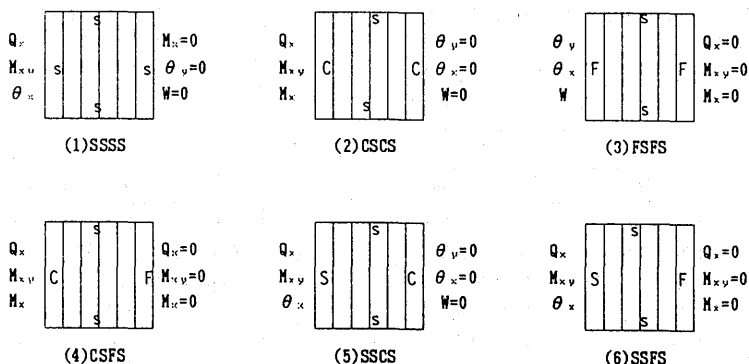


Fig. 3 Integral Constants and Boundary Conditions
(S : Simply Supported Edge, C : Clamped Edges, F : Free Edges).

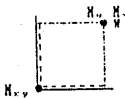
いずれの解析結果においても、本解析法に基づく断面力および変形の数値解は、分割数 $n = 8 \sim 12$, 項数 $m = 5$ 程度の比較的粗い分割数および少ない項数のものでも十分実用性のある解が得られている。

(2) 変厚板

次に、本解析法による変厚板の数値解の精度を明らかにするために、Fig. 4 に示すような一方向にの

み板厚が指数関数的に変化する変厚板に関して、断面力および変形の解析を行った。このような変厚板に関しては、Conway¹²⁾ によって、四辺単純支持の場合および対辺単純支持他対辺固定支持の場合について解が求められている。これらの結果を Fig. 4 の $y = a/2$ 断面上の曲げモーメントおよびたわみに関して Fig. 5 および Fig. 6 に示す。なお、本解析におけ

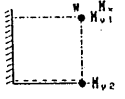
Table 1 Convergence of Numerical Solutions of SSSS Plate under Uniform Load ($\nu = 0.3$).



n	m	$w/qa^4/D$	M_x/qa^2	M_y/qa^2	M_{xy}/qa^2
4	1	0.00413	0.0531	0.0530	-0.0307
	2	0.00407	0.0520	0.0480	-0.0324
	3	0.00408	0.0520	0.0491	-0.0323
	4	0.00408	0.0520	0.0488	-0.0329
	5	0.00408	0.0520	0.0489	-0.0330
Ref. (6)	0.00412	0.0542	—	-0.0340	
8	1	0.00412	0.0501	0.0520	-0.0303
	2	0.00407	0.0486	0.0474	-0.0312
	3	0.00407	0.0489	0.0484	-0.0323
	4	0.00407	0.0488	0.0480	-0.0324
	5	0.00407	0.0488	0.0482	-0.0325
Ref. (6)	0.00408	0.0492	—	-0.0328	
12	1	0.00412	0.0496	0.0518	-0.0302
	2	0.00406	0.0481	0.0472	-0.0319
	3	0.00407	0.0484	0.0483	-0.0322
	4	0.00407	0.0483	0.0479	-0.0324
	5	0.00407	0.0483	0.0481	-0.0324
Ref. (6)	0.00407	0.0484	—	-0.0325	
N. A. S	0.00406	0.0479	0.0479	-0.0325	

N. A. S. : Navier's Analytical Solution

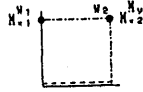
Table 2 Convergence of Numerical Solutions of CSCS Plate under Uniform Load ($\nu = 0.3$).



n	m	$w/qa^4/D$	M_x/qa^2	M_y/qa^2	M_{xy}/qa^2
4	1	0.00175	0.0284	0.0424	-0.0743
	2	0.00168	0.0231	0.0415	-0.0695
	3	0.00169	0.0243	0.0411	-0.0708
	4	0.00169	0.0239	0.0415	-0.0701
	5	0.00169	0.0241	0.0412	-0.0706
Ref. (6)	0.00184	0.0280	0.0484	-0.0737	
8	1	0.00192	0.0281	0.0364	-0.0734
	2	0.00187	0.0236	0.0348	-0.0691
	3	0.00187	0.0247	0.0352	-0.0702
	4	0.00187	0.0243	0.0350	-0.0698
	5	0.00187	0.0245	0.0351	-0.0700
Ref. (6)	0.00190	0.0251	0.0359	-0.0711	
12	1	0.00195	0.0281	0.0354	-0.0738
	2	0.00190	0.0236	0.0338	-0.0691
	3	0.00190	0.0247	0.0341	-0.0701
	4	0.00190	0.0243	0.0340	-0.0697
	5	0.00190	0.0245	0.0341	-0.0699
Ref. (6)	0.00191	0.0247	0.0343	-0.0704	
T. A. S	0.00192	0.0244	0.0332	-0.0697	

T. A. S. : Timoshenko's Analytical Solution

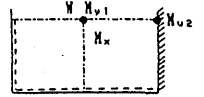
Table 3 Convergence of Numerical Solutions of FSFS Plate under Uniform Load ($\nu = 0.3$).



n	m	$w_1/qa^4/D$	$w_2/qa^4/D$	M_{x1}/qa^2	M_{x2}/qa^2	M_{y1}/qa^2
4	1	0.0153	0.01300	0.131	0.120	0.0340
	2	0.0153	0.01295	0.127	0.116	0.0319
	3	0.0153	0.01295	0.127	0.117	0.0324
	4	0.0153	0.01295	0.127	0.117	0.0322
	5	0.0153	0.01295	0.127	0.117	0.0323
8	1	0.0151	0.01309	0.134	0.125	0.0295
	2	0.0151	0.01304	0.129	0.121	0.0279
	3	0.0151	0.01304	0.130	0.122	0.0283
	4	0.0151	0.01304	0.130	0.121	0.0281
	5	0.0151	0.01304	0.130	0.121	0.0282
12	1	0.0151	0.01312	0.135	0.126	0.0287
	2	0.0150	0.01306	0.130	0.121	0.0272
	3	0.0151	0.01307	0.131	0.122	0.0276
	4	0.0151	0.01307	0.131	0.122	0.0275
	5	0.0151	0.01307	0.131	0.122	0.0275
T. A. S		0.0151	0.0131	0.131	0.1225	0.0271

T. A. S : Timoshenko's Analytical Solution

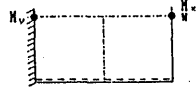
Table 5 Convergence of Numerical Solutions of SSCS Plate under Uniform Load ($\nu = 0.3$).



n	m	$w/qa^4/D$	M_{y1}/qa^2	M_{y2}/qa^2	M_{x1}/qa^2
4	1	0.00270	0.0467	-0.0892	0.0382
	2	0.00264	0.0457	-0.0844	0.0331
	3	0.00265	0.0455	-0.0855	0.0342
	4	0.00264	0.0457	-0.0851	0.0339
	5	0.00264	0.0456	-0.0853	0.0340
6	1	0.00278	0.0431	-0.0884	0.0379
	2	0.00273	0.0416	-0.0836	0.0333
	3	0.00273	0.0419	-0.0847	0.0343
	4	0.00273	0.0417	-0.0843	0.0339
	5	0.00273	0.0419	-0.0845	0.0341
10	1	0.00282	0.0414	-0.0880	0.0377
	2	0.00277	0.0399	-0.0833	0.0332
	3	0.00277	0.0402	-0.0843	0.0342
	4	0.00277	0.0400	-0.0838	0.0339
	5	0.00277	0.0401	-0.0840	0.0340
T. A. S		0.0028	0.039	-0.084	0.034

T. A. S : Timoshenko's Analytical Solution

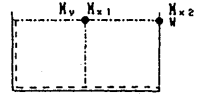
Table 4 Convergence of Numerical Solutions of CSFS Plate under Uniform Load ($\nu = 0.3$).



n	m	$w/qa^4/D$	M_{x1}/qa^2	M_{y1}/qa^2
4	1	0.0116	0.104	-0.122
	2	0.0116	0.099	-0.117
	3	0.0116	0.100	-0.119
	4	0.0116	0.100	-0.118
	5	0.0116	0.100	-0.118
6	1	0.0115	0.103	-0.122
	2	0.0114	0.098	-0.118
	3	0.0114	0.099	-0.119
	4	0.0114	0.098	-0.118
	5	0.0114	0.098	-0.118
10	1	0.0114	0.102	-0.122
	2	0.0113	0.097	-0.118
	3	0.0113	0.098	-0.119
	4	0.0113	0.097	-0.118
	5	0.0113	0.097	-0.118
T. A. S		0.0113	0.097	-0.119

T. A. S : Timoshenko's Analytical Solution

Table 6 Convergence of Numerical Solutions of SSFS Plate under Uniform Load ($\nu = 0.3$).



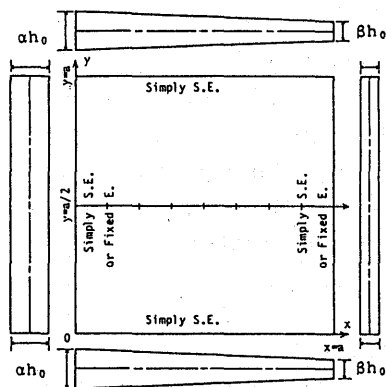
n	m	$w/qa^4/D$	M_{x1}/qa^2	M_{x2}/qa^2	M_{y1}/qa^2
4	1	0.0131	0.0845	0.118	0.0431
	2	0.0131	0.0798	0.113	0.0418
	3	0.0131	0.0808	0.114	0.0420
	4	0.0131	0.0805	0.114	0.0420
	5	0.0131	0.0806	0.114	0.0420
6	1	0.0130	0.0843	0.117	0.0413
	2	0.0130	0.0796	0.112	0.0398
	3	0.0130	0.0806	0.113	0.0401
	4	0.0130	0.0802	0.112	0.0401
	5	0.0130	0.0804	0.113	0.0401
10	1	0.0130	0.0841	0.116	0.0404
	2	0.0129	0.0794	0.111	0.0389
	3	0.0129	0.0804	0.112	0.0392
	4	0.0129	0.0801	0.112	0.0391
	5	0.0129	0.0802	0.112	0.0392
T. A. S		0.0129	0.080	0.112	0.039

T. A. S : Timoshenko's Analytical Solution

Table 7 Convergence of Numerical Solutions of SSSS Plate under Concentrated Load ($\nu = 0.3$).

n	m	$w/Pa^2/D$	M_{xy}/P	M_x/P	M_y/P
4	1	0.0092	-0.0659	0.084	0.083
	2	0.0097	-0.0595	0.089	0.107
	3	0.0097	-0.0595	0.089	0.115
	4	0.0098	-0.0603	0.089	0.118
	5	0.0098	-0.0596	0.089	0.120
Ref. (6)		0.0083	-0.0632	0.076	0.086
8	1	0.0103	-0.0645	0.067	0.082
	2	0.0108	-0.0614	0.064	0.098
	3	0.0109	-0.0614	0.061	0.101
	4	0.0109	-0.0612	0.060	0.101
	5	0.0109	-0.0615	0.059	0.101
Ref. (6)		0.0103	-0.0623	0.060	0.093
12	1	0.0105	-0.0642	0.064	0.082
	2	0.0111	-0.0611	0.062	0.097
	3	0.0112	-0.0611	0.061	0.099
	4	0.0112	-0.0611	0.061	0.099
	5	0.0113	-0.0611	0.061	0.099
Ref. (6)		0.0110	-0.0615	0.061	0.095
T. A. S		0.0116	—	0.059	0.099

T. A. S. : Timoshenko's Analytical Solution

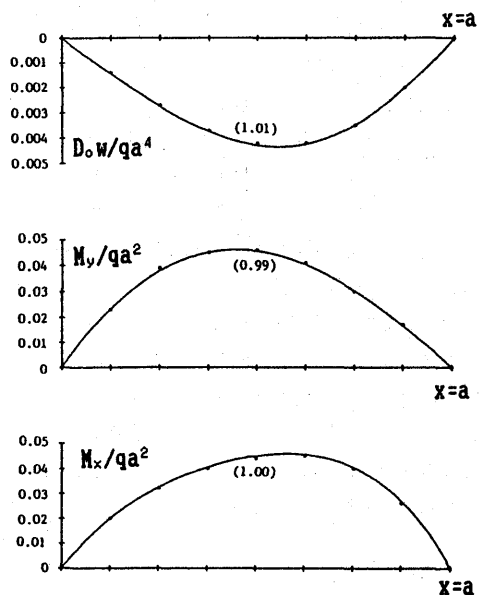


$$(h/ah_0)^3 = e^{cx/a}$$

$$\alpha = 1.2, \beta = 0.8, c = \ln(\beta/\alpha)^3$$

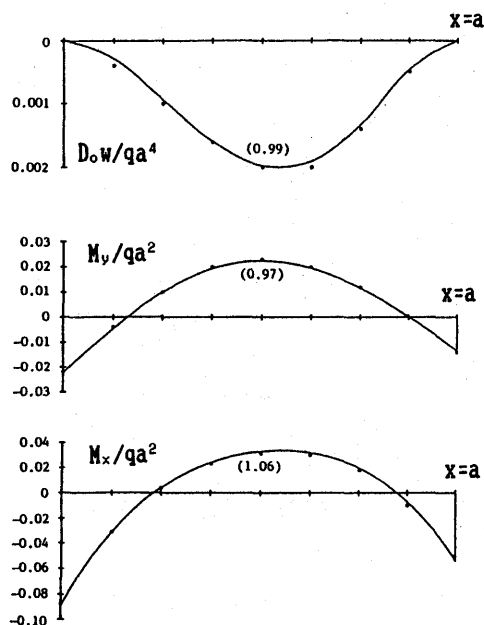
Fig. 4 Rectangular Plate with Varying Thickness.

る分割数 n は 8 であり、項数 m は 5 である。図中の () 内の数値は、本解析法による数値解の Conway の解析解に対する比である。



● Conway's Analytical Solution

Fig. 5 Deflection and Bending Moment of Plate with Varying Thickness (SSSS, $\nu = 0.3$).



● Conway's Analytical Solution

Fig. 6 Deflection and Bending Moment of Plate with Varying Thickness (CSCS, $\nu = 0.3$).

6. 結 語

Mindlin 理論に基づく基礎微分方程式を、一方向に級数展開することにより常微分方程式に変換し、その常微分方程式の積分方程式への変換と積分方程式の近似解法の応用とにより、変厚矩形板の基礎微分方程式の離散解を求め、これに基づく変厚矩形板の解法を提示した。本解法によると、1組の対辺が単純支持と限定されるが、本法による数値解は先に筆者らが提示した近似解法により得られる数値解に比べて、さらに良い精度をもつ解が得られること、また、最終的に解くべき未知数の数が3個でよく、パソコンなどの比較的小型の計算機で解析可能なことなどが確認された。

本法によれば、板厚、板剛度の変化が級数展開する方向には一定と限定されるが、他方向には不規則で関数表示できない場合でも、矩形板の等分割線におけるこれらの諸量の値が与えられれば、諸量が規則的な場合と同様に解析することができる。

Appendix I

$$q_m = (2/b) \int_0^b q(x, y) \sin(2m-1)(\pi/b)y dy$$

(1) 等分布荷重

$$q(x, y) = \text{const}$$

$$q_m = 4q / [(2m-1)\pi]$$

(2) 集中荷重

$$\begin{cases} q(x, y) = P & y = c \\ q(x, y) = 0 & y \neq c \end{cases}$$

$$q_m = (2/b)P(-1)^{m+1}$$

Appendix II

$$F_1 = X_{10} + \sum_{k=0}^{i-1} \beta_{ik} (C_{16} X_{6k} + C_{14} X_{4k}) - \sum_{k=0}^i \beta_{ik} \bar{q}_k$$

$$F_2 = X_{20} + \sum_{k=0}^{i-1} \beta_{ik} (C_{26} X_{6k} + C_{24} X_{4k} + C_{23} X_{3k})$$

$$F_3 = X_{30} + \sum_{k=0}^{i-1} \beta_{ik} (C_{31} X_{1k} + C_{32} X_{2k})$$

$$F_4 = X_{40} + \sum_{k=0}^{i-1} \beta_{ik} (C_{45} X_{5k} + C_{42} X_{2k})$$

$$F_5 = X_{50} + \sum_{k=0}^{i-1} \beta_{ik} (C_{54} X_{4k} + C_{53} X_{3k})$$

$$F_6 = X_{60} + \sum_{k=0}^{i-1} \beta_{ik} (C_{65} X_{5k} + C_{61} X_{1k})$$

参考文献

- 1) 梶田建夫・成岡昌夫：変断面長方形板の曲げ、および、振動に対する有限要素法の応用、土木学会論文報告集、第161号、pp. 13-20, 1969.
- 2) 倉田宗章・谷平 勉：変厚四辺形板の曲げ解析、土木学会論文報告集、第195号、pp. 37-46, 1971.
- 3) 中川建治：4 辺単純支持変厚板の曲げたわみに関する研究、土木学会論文報告集、第249号、1976.
- 4) Fan Jia-rang : Plates of Varying Thickness with Four Simply Supported Edges, Proc. ASCE, Vol. 108, EM1, pp. 167-173, 1982.
- 5) 久保慶三郎・吉田 裕：任意形状の平板曲げの数値解析法、土木学会論文報告集、第167号、pp. 9-22, 1969.
- 6) 崎山 毅・松田 浩：変厚矩形板の曲げの一解析法、土木学会論文報告集、第338号、pp. 21-28, 1983.
- 7) Y. K. Cheung : Finite strip method analysis of elastic slabs, Proc. ASCE, Vol. 94, No. EM6, pp. 1365-1378, 1968.
- 8) Von K. Kloppel und E. Schiedel : Beulwerte der dreiseitig gelenkig gelagerten, am freien Randersteifen Rechteckplatte mit beliebig verteilter Randspannung, DER STAHLBAU, pp. 372-378, 1968.
- 9) 右田泰弘・遠田良善：差分伝達マトリックス法による板の曲げ解析、東海大学紀要工学部、Vol. 25, No. 2. pp. 321-326, 1983,
- 10) M. Ohga, T. Shigematsu and T. Hara : Structural analysis by a combined finite element-transfer matrix method, Computers and Structures, Vol. 17, No. 3, pp. 321-326, 1983.
- 11) T. Kant and E. Hinton : Mindlin plate analysis by segmentation method : Journal of Engineering Mechanics, Proc. ASCE, Vol. 109, No. 2, pp. 537-556, 1983.
- 12) Petrino, P. and H. D. Conway : Deflection and Moment Data for Rectangular Plates of Variable Thickness, Jour. Appl. Mech., Vol. 39, pp. 814-815, 1972.