

矩形板の幾何学的非線形解析

崎 山 毅*・松 田 浩*
森 田 千 尋**

Nonlinear Geometric Analysis of Rectangular Plate

by

Takeshi SAKIYAMA*, Hiroshi MATSUDA*
and Chihiro MORITA**

In this paper, a discrete method for analyzing the problem of nonlinear geometric of rectangular plate is proposed. The solutions for partial differential equation of rectangular plate are obtained in discrete forms by applying numerical integration.

As the application of the proposed method, nonlinear geometric of rectangular plate with four types of boundary conditions are calculated.

1. 序 言

平板が横荷重を受けて大きくたわむ、いわゆる大たわみ問題に対しては、有限変形理論によらなければならない。Th. von Kármán が、圧縮荷重を受ける矩形板の座屈後の挙動について有名な論文を発表して以来、平板の大たわみ問題については、数多くの優れた論文が発表され、平板の幾何学的非線形問題に関する研究が著しく進展を遂げた。

しかしながら、これまでの研究では解析しやすい荷重条件と境界条件を持つ等厚板が取り扱われており、任意の荷重条件および境界条件を持つ変厚板に関する研究は、ほとんど見受けられないようである。

本文は、先に筆者らが提示した変厚矩形板の曲げ問題に対する離散化手法を、任意の境界条件および荷重条件を持つ変厚矩形板の幾何学的非線形問題の解析へ拡張したものである。また、数値解析例として四辺固定板、対辺単純支持他対辺固定板、および四辺単純支持板の解析結果を示す。なお、微小たわみ問題の場合は面外曲げのみの境界条件を考慮すればよかつたが、

大たわみ問題を解析する場合は、面外曲げ変形と面内変形に対する条件が必要となるため、面内変形の拘束条件を区別した解析結果も併せて示す。

2. 基礎微分方程式と離散的近似解

矩形板のせん断力を Q_y , Q_x , ねじりモーメントを M_{xy} , 曲げモーメントを M_y , M_x , たわみ角を θ_y , θ_x , たわみを w とすれば、板の横荷重のほかに板の中央面に作用する面内力 N_{xy} , N_y , N_x を受けた場合の、せん断変形の影響を考慮した矩形板の曲げに関する基礎微分方程式は式(1. a)~(1. h)のようになる。

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + q = 0 \quad (1. a)$$

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - Q_x = 0 \quad (1. b)$$

$$\frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} - Q_y = 0 \quad (1. c)$$

平成元年4月28日受理

*構造工学科 (Dept. of Structural Eng.)

**構造工学専攻 (Graduate Student, Structural Eng.)

$$\frac{\partial \theta_x}{\partial x} + \nu \frac{\partial \theta_y}{\partial y} = \frac{M_x}{D} \quad (1. d)$$

$$\frac{\partial \theta_y}{\partial y} + \nu \frac{\partial \theta_x}{\partial x} = \frac{M_y}{D} \quad (1. e)$$

$$\frac{\partial \theta_y}{\partial x} + \frac{\partial \theta_x}{\partial y} = \frac{2M_{xy}}{D(1-\nu)} \quad (1. f)$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} + \theta_x = \frac{Q_x}{\kappa Gh} \quad (1. g)$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} + \theta_y = \frac{Q_y}{\kappa Gh} \quad (1. h)$$

また、板の中央面上の x , y 方向の面内変位成分を u , v とすれば、面内力 N_{xy} , N_y , N_x との間には次のような関係がある。

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = 0 \quad (2. a)$$

$$\frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} = 0 \quad (2. b)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \nu \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right. \\ \left. + \nu \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right\} = \frac{N_x}{F} \quad (2. c)$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} + \nu \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right. \\ \left. + \nu \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right\} = \frac{N_y}{F} \quad (2. d)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{2N_{xy}}{F(1-\nu)} \quad (2. e)$$

ここに、 $q = q(x, y)$: 横荷重強度, E : 弾性係数,
 $G = E/2(1+\nu)$: せん断弾性係数,
 ν : ポアソン比, $h = h(x, y)$: 板厚,
 $\kappa = 5/6$: せん断修正係数,
 $D = D(x, y) = Eh^3/[12(1-\nu^2)]$: 板の曲げ剛度,
 $F = F(x, y) = Eh/(1-\nu^2)$: 板の伸び剛度,
 次の無次元量,

$$X_1 = a^2 Q_y / [D_0(1-\nu^2)], \\ X_2 = a^2 Q_x / [D_0(1-\nu^2)], \\ X_3 = a M_{xy} / [D_0(1-\nu^2)], \\ X_4 = a M_y / [D_0(1-\nu^2)], \\ X_5 = a M_x / [D_0(1-\nu^2)], X_6 = \theta_y, \\ X_7 = \theta_x, X_8 = w/a,$$

$\eta = x/a$, $\zeta = y/a$, a, b : 矩形板の縦横の辺長,

$\mu = b/a$, h_0 : 基準板厚, q_0 : 基準荷重強度,
 $D_0 = Eh_0^3/[12(1-\nu^2)]$: 基準板曲げ剛度

を用いて式(1. a)~(1. h)を無次元化後、微分方程式の積分方程式への変換と積分方程式の近似解法の応用とにより、任意の離散点 (i, j) における離散解 $X_{pij}(p = 1\sim 8)$ は次のように整理される。

$$X_{pij} = \sum_{t=1}^8 \left\{ \sum_{k=0}^i \beta_{ik} A_{pt} [X_{tk0} - X_{tkj}(1-\delta_{ki})] \right. \\ \left. + \sum_{\ell=0}^j \beta_{j\ell} B_{pt} [X_{t0\ell} - X_{t\ell i}(1-\delta_{\ell j})] \right. \\ \left. + \sum_{k=0}^i \sum_{\ell=0}^j \beta_{ik} \beta_{j\ell} C_{ptk\ell} X_{tk\ell}(1-\delta_{ki}\delta_{\ell j}) \right. \\ \left. - \sum_{k=0}^i \sum_{\ell=0}^j \beta_{ik} \beta_{j\ell} A_{p1} \bar{q}_{k\ell} \right\} \quad (3. a)$$

同様にして次の無次元量,

$$X_9 = v/a, X_{10} = u/a, \\ X_{11} = a^2 N_{xy} / [D_0(1-\nu^2)], \\ X_{12} = a^2 N_y / [D_0(1-\nu^2)], \\ X_{13} = a^2 N_x / [D_0(1-\nu^2)],$$

を式(2. a)~(2. e)に導入すると、任意の離散点 (i, j) における離散解 $X_{pij}(p = 9\sim 13)$ は次のように整理される。

$$X_{pij} = \sum_{t=9}^{13} \left\{ \sum_{k=0}^i \beta_{ik} A_{pt} [X_{tk0} - X_{tkj}(1-\delta_{ki})] \right. \\ \left. + \sum_{\ell=0}^j \beta_{j\ell} B_{pt} [X_{t0\ell} - X_{t\ell i}(1-\delta_{\ell j})] \right. \\ \left. + \sum_{k=0}^i \sum_{\ell=0}^j \beta_{ik} \beta_{j\ell} C_{ptk\ell} X_{tk\ell}(1-\delta_{ki}\delta_{\ell j}) \right. \\ \left. - \sum_{k=0}^i \sum_{\ell=0}^j \beta_{ik} \beta_{j\ell} \bar{N}_{pk\ell} \right\} \quad (3. b)$$

ここに、 $i = 1, 2, \dots, m$, $j = 1, 2, \dots, n$

$$\beta_{ik} = \alpha_{ik}/m, \quad \beta_{j\ell} = \alpha_{j\ell}/n$$

$$\alpha_{ik} = \begin{cases} 0.5 & (k=0, i) \\ 1 & (k \neq 0, i) \end{cases}$$

$$\alpha_{j\ell} = \begin{cases} 0.5 & (\ell=0, j) \\ 1 & (\ell \neq 0, j) \end{cases}$$

δ_{ij} : Kronecker's delta

$A_{pt}, B_{pt}, C_{ptk\ell}, \bar{q}_{k\ell}, \bar{N}_{pk\ell}$: Appendix I

ところで、領域 $[i, j]$ を最小領域 $[1, 1]$ から始めて、順次領域を拡大しつつ、各領域の主要点の諸量 X_{pij} を式(3. a), (3. b)より求め、これを次の領域の内部従属点の諸量 $X_{pk\ell}$ として式(3. a), (3. b)の右辺に逐次代入していけば、各領域の内部従属点の諸量はすべて消去され、結局、任意の領域 $[i, j]$ の主要点 (i, j) における諸量 X_{pij} は、この領域の境界従属点 $(k, 0)$, $(0, \ell)$ における諸量 $X_{r\ell 0}(r = 1, 3, 4, 6, 7, 8)$, $X_{s0\ell}(s = 2, 3, 5, 6, 7, 8)$, および $X_{t\ell 0}(t = 9, 10, 11, 12)$, $X_{u0\ell}(u = 9, 10, 11, 13)$ のみによって表わされることになり、

次式のように整理される。

$$X_{pij} = \sum_{d=1}^6 \left(\sum_{k=0}^i a_{1pijkd} X_{rk0} + \sum_{l=0}^j b_{1pijld} X_{s0l} \right) + q_{1pij} \quad (4. a)$$

$$X_{pij} = \sum_{d=1}^4 \left(\sum_{k=0}^i a_{2pijkd} X_{tk0} + \sum_{l=0}^j b_{2pijld} X_{u0l} \right) + q_{2pij} \quad (4. b)$$

$a_{1pijkd}, b_{1pijld}, q_{1pij},$
 $a_{2pijkd}, b_{2pijld}, q_{2pij} : \text{Appendix II}$

この式(4. a), (4. b)中に含まれる境界従属点の6個ずつの諸量 X_{rk0}, X_{s0l} , および4個ずつの諸量 X_{tk0}, X_{u0l} は、いわゆる積分定数であり、境界条件によって決定されるべきものである。また、任意の領域 $[i, j]$ の主要点における諸量 X_{pij} を、この領域の境界従属点における諸量 X_{rk0}, X_{s0l} に関係づける係数 $a_{1pijkd}, b_{1pijld}, q_{1pij}$, および X_{tk0}, X_{u0l} に関係づける係数 $a_{2pijkd}, b_{2pijld}, q_{2pij}$ は、伝達マトリックス法における格間伝達マトリックスに相当するものである。

3. 積分定数と境界条件

基礎微分方程式(1. a)~(1. h)および(2. a)

~(2. e)の近似解(4. a), (4. b)に含まれる積分定数 X_{rk0}, X_{s0l} , および X_{tk0}, X_{u0l} は、具体的には、それぞれ平板の $y = 0, x = 0$ なる辺上における断面力および変形を表わす。各等分割点において合計10個ずつの積分定数が存在するが、平板の境界辺の支持条件に応じて、これらの中のいずれか5個の積分定数は、はじめから既知である。残りの5個の未知なる積分定数は、 $x = a, y = b$ の各辺の境界条件によって決定される。

Fig. 1(1)~(4)に、各々、四辺固定板、対辺単純支持他対辺固定板(ピン支持)、四辺単純支持板(ピン支持およびローラー支持)の左右および上下の2軸対称性を持つ平板の1/4部分を対象とした積分定数と境界条件を示している。各図において、隅角点における積分定数および境界条件は、 で囲まれている。なお、隅角点における積分定数および境界条件は、その隅角点において2境界辺上での諸量間関係を考慮して定められる。

4. 数値計算法

平板のたわみ量が板厚に近い大きになると面内力がたわみの影響を受けて変化し、またそれらの面内力はたわみに影響を与えるため、たわみと面内力とは連立させて求めなければならない。従って、これらのこ

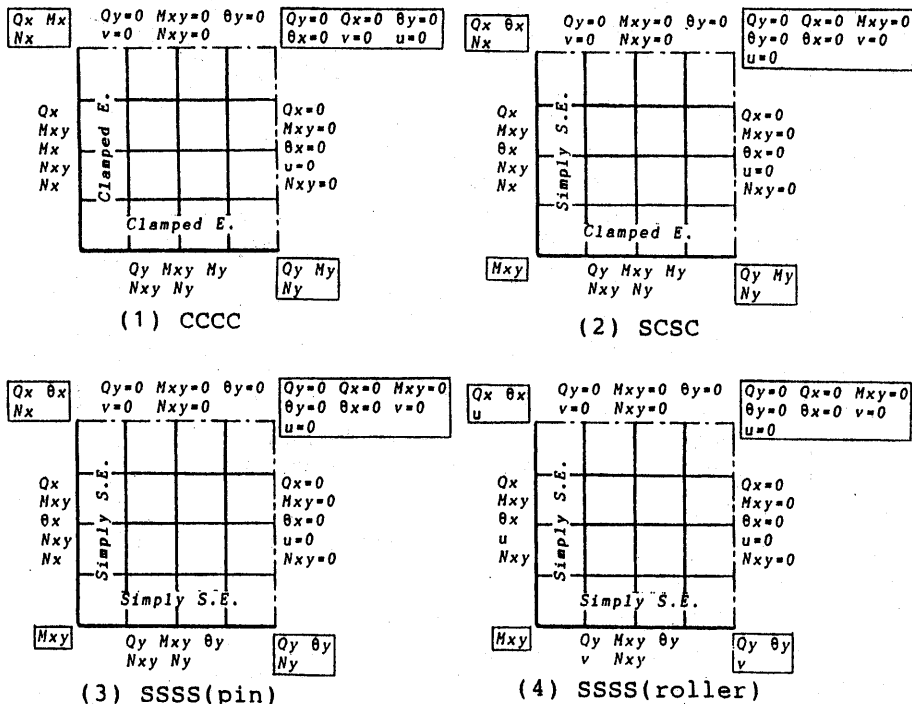


Fig. 1 Integral Constants and Boundary Conditions.

とを考慮して、次の計算手順により矩形板の幾何学的非線形解析を行った。

- (a) まず、面内力 N_{xy} , N_y , N_x を零として式(1. a)~(1. h)を解く。
- (b) (a)で解かれた断面力により $\partial w/\partial x$, $\partial w/\partial y$ の値を式(1. g), (1. h)より求め、式(2. a)~(2. e)を解く。
- (c) (b)で解かれた面内力を用いて、式(1. a)~(1. h)を解く。

以上の繰り返し計算を、たわみ w が収束するまで行う。なお収束条件は $S-1$ 回目の中央点のたわみを $w_{c, s-1}$ とすると、

$$\frac{|w_{c, s-1} - w_{c, s}|}{w_{c, s}} < 10^{-3}$$

としている。

5. 解析結果

数値解析は、1辺 $a = 100\text{cm}$ 、板厚 $h = 0.2\text{cm}$ 、弾性係数 $E = 2 \times 10^6 \text{kg/cm}^2$ 、ポアソン比 $\nu = 0.3$ の正方形

板に、等分布荷重が満載される場合の幾何学的非線形解析を行った。

(1) 四辺固定 (CCCC) 正方形板

Fig. 2 に分割数を増加させた場合の中央点のたわみに関する荷重~変位曲線を示す。▲印は分割数 $m = 4$ の場合、●印は分割数 $m = 6$ の場合の解析結果である。また、破線は川井ら²⁾により有限要素法を用いて得られた結果、一点鎖線はWay³⁾によりエネルギー法を用いて得られた結果、および、二点鎖線は大賀ら⁴⁾により Finite Element-Transfer Matrix method を用いて得られた結果を示しており、分割数を増加するとともにこれらの解析結果に近づくのがわかる。

Fig. 3 に分割数 $m = 6$ の場合の中央点の圧縮応力、引張応力および膜応力に関する荷重~応力曲線を示す。破線は川井ら²⁾により有限要素法を用いて得られた結果であり、ほぼ一致した曲線が得られている。

(2) 対辺単純支持他対辺固定 (SCSC) 正方形板

Fig. 4 に分割数 $m = 6$ の場合の中央点のたわみに関する荷重~変位曲線を示す。図中の破線は Berger⁵⁾により得られた結果であり、四辺固定板の場合と同程

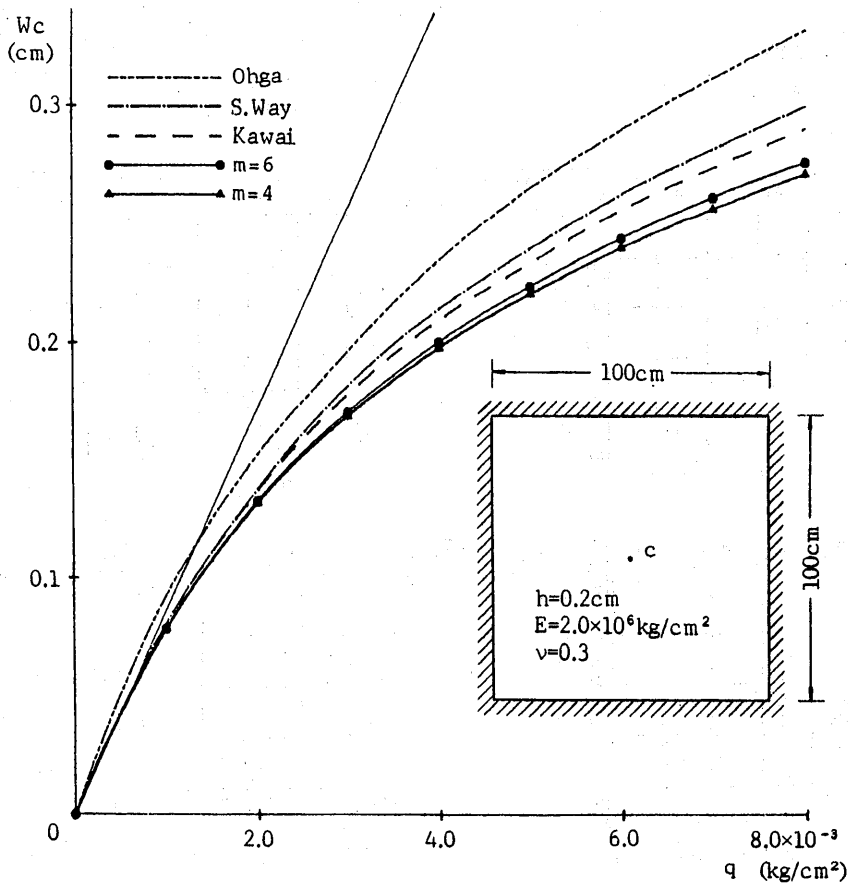


Fig. 2 Load-Deflection Curves for Clamped Square Plate.

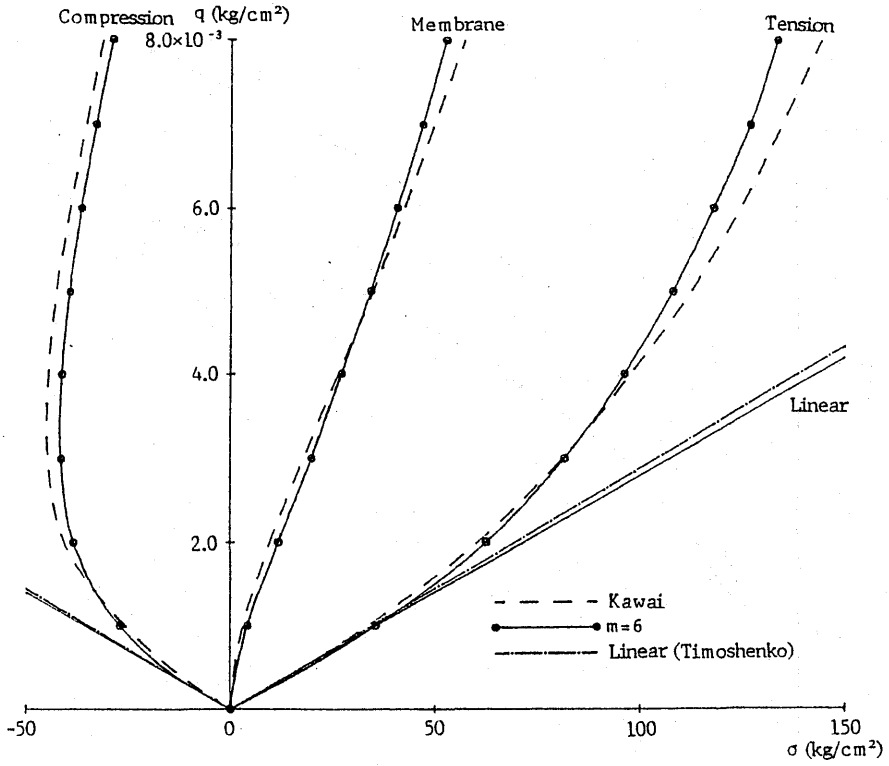


Fig. 3 Load-Stress Curves for Clamped Square Plate.

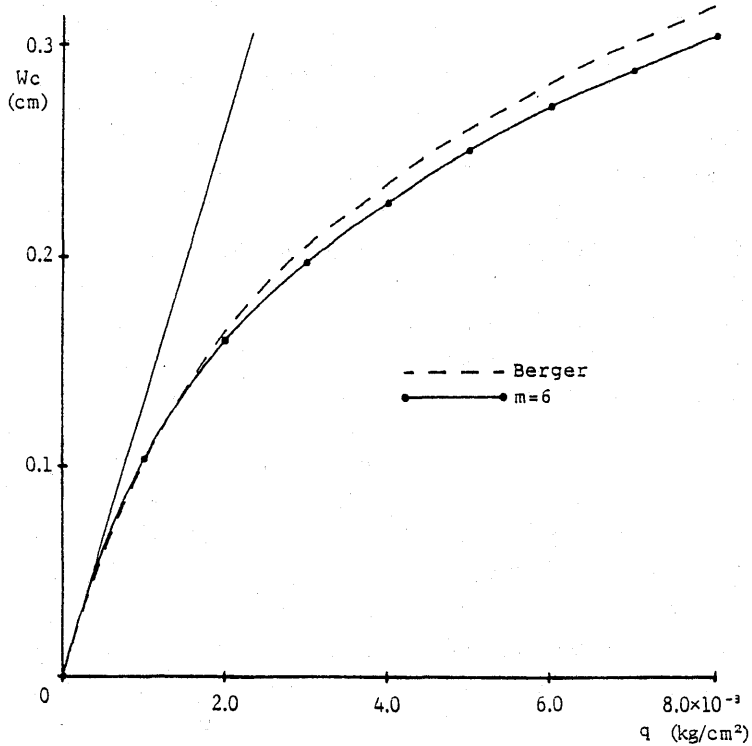


Fig. 4 Load-Deflection Curves for Square Plate with Two Opposite Edges Simply Supported and the Other Two Edges Clamped.

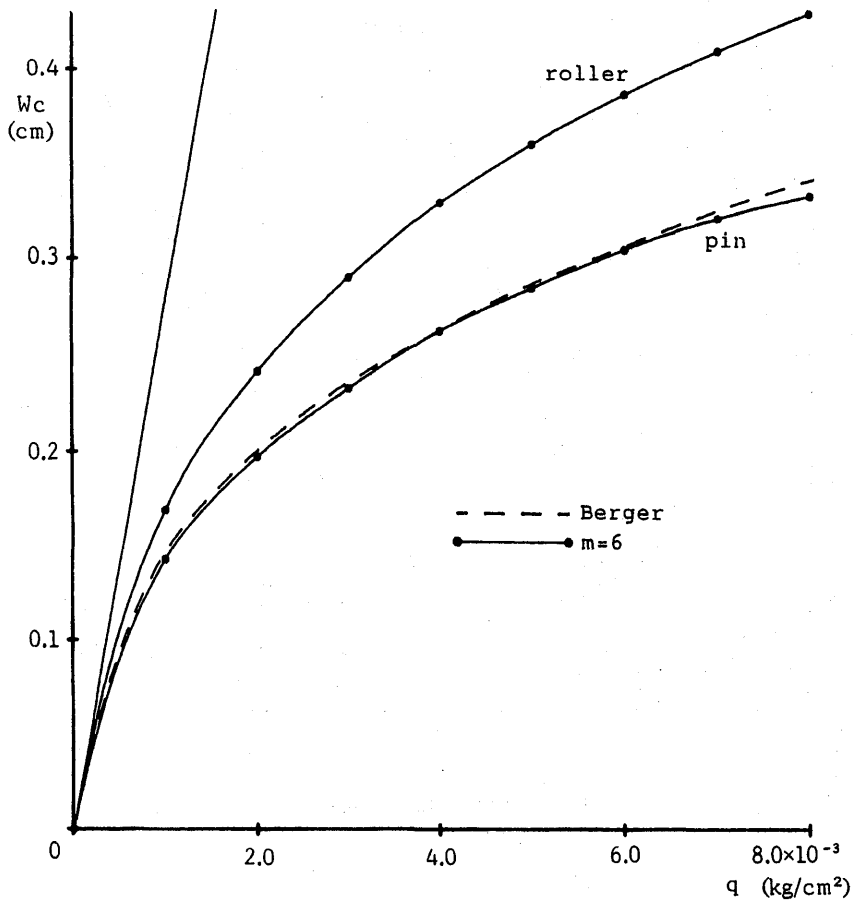


Fig. 5 Load-Deflection Curves for Simply Supported Square Plate.

度のずれの解析結果が得られている。

(3) 四辺単純支持 (SSSS) 正方形板

Fig. 5 に分割数 $m = 6$ の場合の中央点のたわみに関する荷重～変位曲線を示す。四辺単純支持の場合は、面内変形に対する境界条件がピン支持とローラー支持の 2 種類あり、それぞれの場合についての解析結果を示してある。図中の破線は Berger⁵⁾ によりピン支持の場合について得られた結果であり、ほぼ一致した解析結果が得られている。

6. 結 語

本論文は、先に提示した変厚矩形板の曲げ解法の、大たわみ問題への応用性を検証し、種々の境界条件を有する矩形板の幾何学的非線形解析を行い、その挙動特性を明らかにしたものである。数値解析の結果から、本解析法による数値解は、他解法による数値解にほぼ一致し、また、比較的粗い分割数による解析においても実用上十分な精度を持つ解が得られることなどが確認され、本解析法の妥当性が検証された。今後、材料

非線形性も含めた複合非線形問題への本解析法の適用も行う予定である。

[Appendix I]

$$\begin{aligned}
 A_{p1} &= \gamma_{p1} & A_{p2} &= 0 & A_{p3} &= \gamma_{p2} & A_{p4} &= \gamma_{p3} \\
 A_{p5} &= 0 & A_{p6} &= \gamma_{p1}\lambda_y + \nu\gamma_{p4} + \gamma_{p5} \\
 A_{p7} &= \gamma_{p1}\lambda_{xy} + \gamma_{p6} & A_{p8} &= 0 \\
 A_{p9} &= \nu\gamma_{p11} + \gamma_{p12} & A_{p10} &= \gamma_{p13} \\
 A_{p11} &= \gamma_{p9} & A_{p12} &= \gamma_{p10} & A_{p13} &= 0 \\
 B_{p1} &= 0 & B_{p2} &= \mu\gamma_{p1} & B_{p3} &= \mu\gamma_{p3} & B_{p4} &= 0 \\
 B_{p5} &= \mu\gamma_{p2} & B_{p6} &= \mu(\gamma_{p1}\lambda_{xy} + \gamma_{p6}) \\
 B_{p7} &= \mu(\gamma_{p1}\lambda_x + \gamma_{p4} + \nu\gamma_{p5}) & B_{p8} &= \gamma_{p7} \\
 B_{p9} &= \mu\gamma_{p13} & B_{p10} &= \mu(\gamma_{p11} + \nu\gamma_{p12}) \\
 B_{p11} &= \mu\gamma_{p10} & B_{p12} &= 0 & B_{p13} &= \mu\gamma_{p9} \\
 C_{p1kl} &= \mu(\gamma_{p3} + K_{kl}\gamma_{p8}) & C_{p2kl} &= \mu\gamma_{p2} + K_{kl}\gamma_{p7} \\
 C_{p3kl} &= J_{kl}\gamma_{p6} & C_{p4kl} &= I_{kl}\gamma_{p5} & C_{p5kl} &= I_{kl}\gamma_{p4} \\
 C_{p6kl} &= -\mu\gamma_{p8} & C_{p7kl} &= -\gamma_{p7} & C_{p8kl} &= 0 \\
 C_{p9kl} &= 0 & C_{p10kl} &= 0 & C_{p11kl} &= 2\mu L_{kl}\gamma_{p13}/(1-\nu) \\
 C_{p12kl} &= \mu L_{kl}\gamma_{p12} & C_{p13kl} &= \mu L_{kl}\gamma_{p11}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \rho_{11} &= \beta_{ii} & \rho_{12} &= \mu\beta_{jj} & \rho_{16} &= \mu\lambda_{xy}\beta_{jj} + \lambda_y\beta_{ii} \\
 \rho_{17} &= \lambda_{xy}\beta_{ii} + \mu\lambda_x\beta_{jj} & \rho_{22} &= -\mu\beta_{ij} & \rho_{23} &= \beta_{ii} \\
 \rho_{25} &= \mu\beta_{jj} & \rho_{31} &= -\mu\beta_{ij} & \rho_{33} &= \mu\beta_{jj} & \rho_{34} &= \beta_{ii} \\
 \rho_{45} &= -I_{ij}\beta_{ij} & \rho_{46} &= \nu\beta_{ii} & \rho_{47} &= \mu\beta_{jj} & \rho_{54} &= -I_{ij}\beta_{ij} \\
 \rho_{56} &= \beta_{ii} & \rho_{57} &= \nu\mu\beta_{jj} & \rho_{63} &= -J_{ij}\beta_{ij} & \rho_{66} &= \mu\beta_{ii} \\
 \rho_{67} &= \beta_{jj} & \rho_{72} &= -K_{ij}\beta_{ij} & \rho_{77} &= \beta_{ij} & \rho_{78} &= \beta_{jj} \\
 \rho_{81} &= -\mu K_{ij}\beta_{ij} & \rho_{86} &= \mu\beta_{ij} & \rho_{88} &= \beta_{ii} & \rho_{911} &= \beta_{ii} \\
 \rho_{913} &= \mu\beta_{jj} & \rho_{1011} &= \mu\beta_{jj} & \rho_{1012} &= \beta_{ii} & \rho_{119} &= \nu\beta_{ii} \\
 \rho_{1110} &= \mu\beta_{jj} & \rho_{1113} &= -\mu L_{ij}\beta_{ij} & \rho_{129} &= \beta_{ii} \\
 \rho_{1210} &= \nu\mu\beta_{jj} & \rho_{1212} &= -\mu L_{ij}\beta_{ij} & \rho_{139} &= \mu\beta_{jj} \\
 \rho_{1310} &= \beta_{ii} & \rho_{1311} &= -2\mu L_{ij}\beta_{ij}/(1-\nu) \\
 \beta_{ij} &= \beta_{ii} \cdot \beta_{jj} \\
 [\gamma_{pt}] &= [\rho_{tp}]^{-1} \\
 (p &= 1\sim 8, t = 1\sim 8 \text{ or } p = 9\sim 13, t = 9\sim 13)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \bar{q}_{kt} &= \mu k_1 q_{kt}/q_0, & k_1 &= q_0 a^3/[D_0(1-\nu^2)] \\
 \bar{N}_{pht} &= \mu\{Wx_{kt}(\nu\gamma_{p3} + \gamma_{p4}) + Wy_{kt}(\gamma_{p3} + \nu\gamma_{p4})\}/2 \\
 &\quad + \mu Wx_{kt}Wy_{kt}\gamma_{p5} \\
 Wx &= \partial w/\partial x, & Wy &= \partial w/\partial y
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I_{ij} &= \mu(1-\nu^2)(h_0/h_{ij})^3, & J_{ij} &= 2\mu(1+\nu)(h_0/h_{ij})^3 \\
 K_{ij} &= Eh_0^3/(12\kappa Ga^2 h_{ij}), & L_{ij} &= (1-\nu^2)h_0^3/(12a^2 h_{ij}) \\
 \lambda_{xy} &= -N_{xy}a^2/[D_0(1-\nu^2)], & \lambda_y &= -N_y a^2/[D_0(1-\nu^2)] \\
 \lambda_x &= -N_x a^2/[D_0(1-\nu^2)]
 \end{aligned}$$

[Appendix II]

$$\begin{aligned}
 a_{1pijkd} &= \sum_{t=1}^8 \left\{ \sum_{f=0}^i \beta_{if} A_{pt} [a_{1tfokd} - a_{1tjkd}(1-\delta_{fi})] \right. \\
 &\quad + \sum_{g=0}^j \beta_{jg} B_{pt} [a_{1t0gkd} - a_{1ti0gkd}(1-\delta_{gj})] \\
 &\quad \left. + \sum_{f=0}^i \sum_{g=0}^j \beta_{if}\beta_{jg} C_{ptfg} a_{1tfgkd}(1-\delta_{fi}\delta_{gj}) \right\} \\
 b_{1pijkd} &= \sum_{t=1}^8 \left\{ \sum_{f=0}^i \beta_{if} A_{pt} [b_{1tfokd} - b_{1tjkd}(1-\delta_{fi})] \right. \\
 &\quad + \sum_{g=0}^j \beta_{jg} B_{pt} [b_{1t0gkd} - b_{1ti0gkd}(1-\delta_{gj})] \\
 &\quad \left. + \sum_{f=0}^i \sum_{g=0}^j \beta_{if}\beta_{jg} C_{ptfg} b_{1tfgkd}(1-\delta_{fi}\delta_{gj}) \right\} \\
 q_{1pik} &= \sum_{t=1}^8 \left\{ \sum_{f=0}^i \beta_{if} A_{pt} [q_{1tfo} - q_{1tj}(1-\delta_{fi})] \right. \\
 &\quad + \sum_{g=0}^j \beta_{jg} B_{pt} [q_{1t0g} - q_{1ti}(1-\delta_{gj})] \\
 &\quad + \sum_{f=0}^i \sum_{g=0}^j \beta_{if}\beta_{jg} C_{ptfg} q_{1tfg}(1-\delta_{fi}\delta_{gj}) \\
 &\quad \left. - \sum_{f=0}^i \sum_{g=0}^j \beta_{if}\beta_{jg} A_{p1} \bar{q}_{fg} \right\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 a_{2pijkd} &= \sum_{t=9}^{13} \left\{ \sum_{f=0}^i \beta_{if} A_{pt} [a_{2tfokd} - a_{2tjkd}(1-\delta_{fi})] \right. \\
 &\quad + \sum_{g=0}^j \beta_{jg} B_{pt} [a_{2t0gkd} - a_{2ti0gkd}(1-\delta_{gj})] \\
 &\quad \left. + \sum_{f=0}^i \sum_{g=0}^j \beta_{if}\beta_{jg} C_{ptfg} a_{2tfgkd}(1-\delta_{fi}\delta_{gj}) \right\} \\
 b_{2pijkd} &= \sum_{t=9}^{13} \left\{ \sum_{f=0}^i \beta_{if} A_{pt} [b_{2tfokd} - b_{2tjkd}(1-\delta_{fi})] \right. \\
 &\quad + \sum_{g=0}^j \beta_{jg} B_{pt} [b_{2t0gkd} - b_{2ti0gkd}(1-\delta_{gj})] \\
 &\quad + \sum_{f=0}^i \sum_{g=0}^j \beta_{if}\beta_{jg} C_{ptfg} b_{2tfgkd}(1-\delta_{fi}\delta_{gj}) \\
 q_{2pik} &= \sum_{t=9}^{13} \left\{ \sum_{f=0}^i \beta_{if} A_{pt} [q_{2tfo} - q_{2tj}(1-\delta_{fi})] \right. \\
 &\quad + \sum_{g=0}^j \beta_{jg} B_{pt} [q_{2t0g} - q_{2ti}(1-\delta_{gj})] \\
 &\quad + \sum_{f=0}^i \sum_{g=0}^j \beta_{if}\beta_{jg} C_{ptfg} q_{2tfg}(1-\delta_{fi}\delta_{gj}) \\
 &\quad \left. - \sum_{f=0}^i \sum_{g=0}^j \beta_{if}\beta_{jg} \bar{N}_{pfg} \right\}
 \end{aligned}$$

参考文献

- 1) 崎山 毅・松田 浩：変厚矩形板の曲げの一解析法，土木学会論文報告集，第338号，pp. 21-28，1983.
- 2) T. Kawai and N. Yoshimura: Analysis of Large Deflection of Plates by the Finite Element Method, Int. Jour. for Numerical Methods in Engng. Vol. 1, 123-133 (1969).
- 3) S. Way: A Laterally Loaded Clamped Square Plate with Large Deformation, Proc. 5th Int. Congr. appl. Mech., Cambridge, Mass. (1938).
- 4) M. Ohga, T. Shigematsu and T. Hara: A Combined Finite Element-Transfer Matrix Method, JSCF, Vol. 110, EM9, pp. 1335-1349.
- 5) H. M. Berger: A New Approach to the Analysis of large Deflections of Plates, Trans. ASME, Jour. Appl. Mech., 22 (1955), 465-472.
- 6) S. P. Timoshenko and S. Woinowsky-Krieger: Theory of Plates and Shells, 2nd ed., (1959), McGraw-Hill.
- 7) 成岡・丹羽・山田・白石共著：構造力学 第三巻 板の力学，丸善。