

任意回転座標系における同期電動機のモデル

辻 峰 男* ・ 山 田 英 二*
 泉 勝 弘* ・ 小 山 純*

A Model of Synchronous Motor in Arbitrary Reference Frame

by

Mineo TSUJI*, Eiji YAMADA*, Katsuhiro IZUMI*
 and Jun OYAMA*

In order to analyze steady-state and transient performances of a synchronous motor, the mathematical models have been developed by Park and Clarke. Park transformed the stator variables to the rotor reference frame which eliminates the time-varying inductances in the voltage equations. Clarke used the stator reference frame. On the other hand, a flux oriented reference frame is needed to study the vector control of the synchronous motor. In this paper, a model of a three-phase salient-pole synchronous motor with damper windings is proposed by using an arbitrary reference frame. The above mentioned models are easily derived from the proposed model.

1. まえがき

同期電動機のアドバンスト制御を行う場合、定常特性は勿論過渡特性まで含めて議論できるモデルを必要とする。このモデルとしては、回転子上に $d-q$ 軸をとり、突極性を考慮したいいわゆる Park の式が良く知られている¹⁾²⁾。また、固定子上に $\alpha-\beta$ 軸をとり、静止座標系として捉えた Clarke のモデル³⁾も、サイリスタモータとして運転された場合の動特性解析⁴⁾などに用いられている。更に、最近注目されているベクトル制御においては、鎖交磁束に同期した座標系が用いられ、制御則の検討が行われている⁵⁾。この様に、パワーエレクトロニクスの進展と共に使用されるモデルも変化するが、これらを体系的に論じた文献は見当らないようである。

そこで本稿では、任意の回転角 $\theta(t)$ で回転する座標

系から眺めた同期電動機の一般的なモデルを導出し、 θ を一定とすることにより Clarke のモデル、 θ を回転子の回転角と等しいと置くことにより Park の式が得られることを示す。なお、電動機は突極構造でダンパ巻線を有するものとし、非突極機や永久磁石機のモデルは特殊な場合として容易に導出できることも指摘する。

2. 三相巻線の電圧方程式

本稿では、Fig. 1 に示すような2極のダンパ巻線付き突極形同期電動機を考える。電流の極性に関しては、例えば、 $i_a > 0$ のとき、巻線 a 、 $-a$ に図の極性に電流が流れるものとする。

2. 1 鎖交磁束

図に示す6つの巻線は磁氣的に結合しており、これ

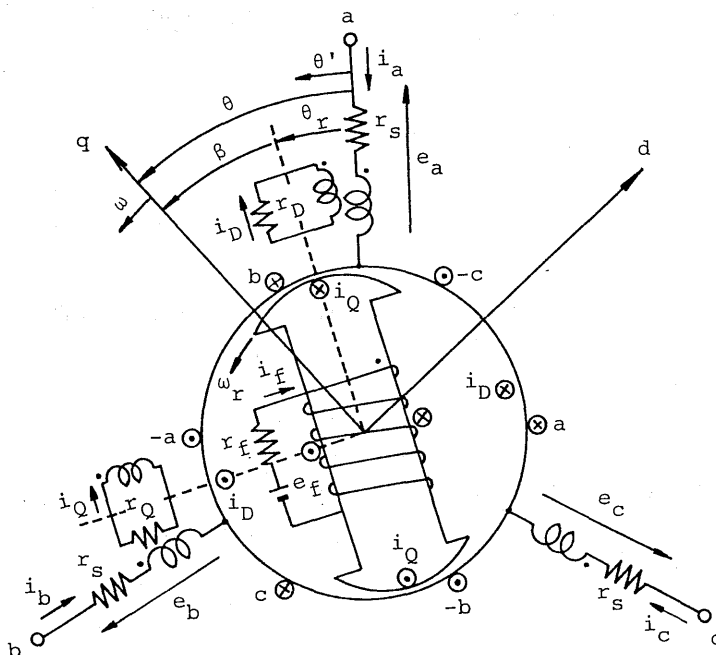


Fig. 1 Pictorial representation of a synchronous machine.

らの大きさは回転子位置の関数である⁶⁾⁷⁾. 固定子巻線 (a, b, c), 界磁巻線 (f), ダンパ巻線 (D, Q) の鎖交磁束をそれぞれ $\psi_a, \psi_b, \psi_c, \psi_f, \psi_D, \psi_Q$ とすると, これらは以下の式で与えられる.

$$\psi_{abc} = L_{ss} i_{abc} + L_{sr} i_{fDQ} \quad (1)$$

$$\psi_{fDQ} = L_{sr}^T i_{abc} + L_{rr} i_{fDQ} \quad (2)$$

但し,

$$\psi_{abc} = [\psi_a, \psi_b, \psi_c]^T$$

$$\psi_{fDQ} = [\psi_f, \psi_D, \psi_Q]^T$$

$$i_{abc} = [i_a, i_b, i_c]^T$$

$$i_{fDQ} = [i_f, i_D, i_Q]^T$$

$$L_{ss} = \begin{bmatrix} L_{aa} & L_{ab} & L_{ac} \\ L_{ab} & L_{bb} & L_{bc} \\ L_{ac} & L_{bc} & L_{cc} \end{bmatrix}$$

$$L_{sr} = \begin{bmatrix} L_{af} & L_{aD} & L_{aQ} \\ L_{bf} & L_{bD} & L_{bQ} \\ L_{cf} & L_{cD} & L_{cQ} \end{bmatrix}$$

$$L_{rr} = \begin{bmatrix} L_{ff} & L_{fD} & L_{fQ} \\ L_{fD} & L_{DD} & L_{DQ} \\ L_{fQ} & L_{DQ} & L_{QQ} \end{bmatrix}$$

(1) 固定子自己インダクタンス

固定子 a 相巻線に電流 i_a を流したとき, a 相巻線の鎖交磁束 ψ_{aa} を求めることにより, 自己インダクタンス L_{aa} が求まる. Fig. 2 に示すように, Fig. 1 の同期機を直線上に展開して考える. a 相巻線に電流を流した場合, 大きさ $N_s i_a / w$, 幅 w のシート電流が流れるものとする. ここで, N_s は固定子巻線の巻数である. この電流分布 $j(\theta')$ をフーリエ級数展開して基本波成分のみを考え, 更に w が十分に小さいと仮定すれば次式を得る.

$$j(\theta') = (2N_s i_a / \pi) \sin \theta' \quad (3)$$

ギャップ長は回転子位置の複雑な関数となるが, Fig. 2 に示すように次式で近似する.

$$g(\theta') = g_0 - g_2 \cos 2(\theta' - \theta_r) \quad (4)$$

鉄心中の透磁率を無限大とすれば, 鉄心中では磁界の強さ H は 0 となる. ギャップ中の磁界は垂直方向成分のみと仮定し, Fig. 2 の積分路に関しアンペアの周回積分の法則を適用すると次式を得る.

$$\begin{aligned} H(a)g(a) - H(a+\pi)g(a+\pi) \\ = \int_a^{a+\pi} j(\theta') d\theta' \end{aligned}$$

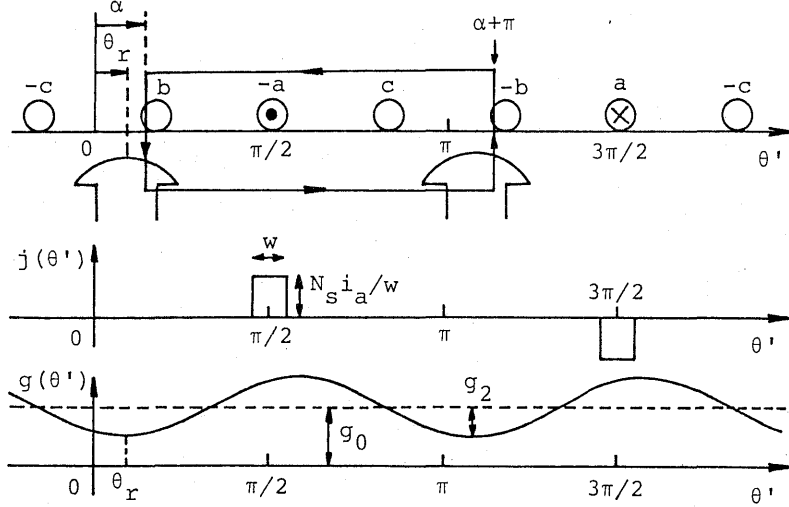


Fig. 2 A developed view of the air gap and the surface-current distribution.

$H(\alpha)$, $g(\alpha)$ の対称性より, 次式を得る.

$$H(\alpha) = \frac{2N_s i_a}{\pi g(\alpha)} \cos \alpha \quad (5)$$

ギャップ中の磁束密度分布 $B(\theta')$ は, 突極性に関し基本波成分のみを考えることにすれば,

$$B(\theta') = \frac{2\mu_0 N_s i_a}{\pi g_0} \times \left\{ \cos \theta' + \frac{g_2}{2g_0} \cos(\theta' - 2\theta_r) \right\} \quad (6)$$

となる. 但し, μ_0 は空気中の透磁率である.

a 相巻線の鎖交磁束 ϕ_{aa} は, 回転子の直径を D , 鉄心の奥行き有効長を ℓ とすると,

$$\phi_{aa} = N_s \int_{-\pi/2}^{\pi/2} B(\theta') \frac{D\ell}{2} d\theta' + \ell_s i_a \quad (7)$$

で与えられる. 但し, ℓ_s : 漏れインダクタンス. 上式のように, 漏れ磁束は各巻線とも独立に存在するものと仮定する. (6)式を(7)式に代入して, 次式を得る.

$$\phi_{aa} = \frac{4\tau\ell\mu_0 N_s^2 i_a}{\pi^2 g_0} \times \left(1 + \frac{g_2}{2g_0} \cos 2\theta_r \right) + \ell_s i_a \quad (8)$$

但し, τ : ポールピッチ ($= \pi D/2$).

$\theta_r = 0$ における直軸インダクタンスを L_{dd} , $\theta_r = \pi/2$ における横軸インダクタンスを L_{qq} とすれば,

(8)式より, L_{dd} , L_{qq} が求まる.

$$L_{dd} = \frac{4\tau\ell\mu_0 N_s^2}{\pi^2 g_a} + \ell_s \equiv L_{ddm} + \ell_s \quad (9)$$

$$L_{qq} = \frac{4\tau\ell\mu_0 N_s^2}{\pi^2 g_q} + \ell_s \equiv L_{qqm} + \ell_s \quad (10)$$

但し,

$$\frac{1}{g_d} = \frac{1}{g_0} \left(1 + \frac{g_2}{2g_0} \right), \quad \frac{1}{g_q} = \frac{1}{g_0} \left(1 - \frac{g_2}{2g_0} \right) \quad (11)$$

以上により, L_{aa} は次式で与えられる.

$$L_{aa} = L_a + L_m \cos 2\theta_r \quad (12)$$

但し, $L_a \equiv (L_{dd} + L_{qq})/2$

$$L_m \equiv (L_{dd} - L_{qq})/2$$

同様に, b , c 相巻線の L_{bb} , L_{cc} を得る.

$$L_{bb} = L_a + L_m \cos 2(\theta_r - 2\pi/3) \quad (13)$$

$$L_{cc} = L_a + L_m \cos 2(\theta_r + 2\pi/3) \quad (14)$$

(2) 固定子相互インダクタンス

a 相巻線だけに電流 i_a を流したとき, b 相巻線の鎖交磁束 ϕ_{ba} は次式より求まる.

$$\phi_{ba} = N_s \int_{-\pi/2+\pi/3}^{\pi/2+\pi/3} B(\theta') \frac{D}{2} \ell d\theta' \quad (15)$$

上式を計算し, L_{ab} が次のように求まる.

$$L_{ab} = -M_s - L_m \cos 2(\theta_r + \pi/6) \quad (16)$$

但し, $M_s = (L_a - \ell_s)/2$

同様に, L_{ac} , L_{bc} が以下の様に求まる.

$$L_{ac} = -M_s - L_m \cos 2(\theta_r + 5\pi/6) \quad (17)$$

$$L_{bc} = -M_s - L_m \cos 2(\theta_r - \pi/2) \quad (18)$$

(3) 回転子自己インダクタンス

界磁巻線, ダンパ巻線は回転子と共に回転するから磁気回路の変化はなく, 自己インダクタンスは角度 θ_r に無関係である.

$$L_{ff} = L_{adm} \left(\frac{N_f}{N_s} \right)^2 + \ell_f \equiv L_f \quad (19)$$

$$L_{DD} = L_{adm} \left(\frac{N_D}{N_s} \right)^2 + \ell_D \equiv L_D \quad (20)$$

$$L_{QQ} = L_{qqm} \left(\frac{N_Q}{N_s} \right)^2 + \ell_Q \equiv L_Q \quad (21)$$

但し, N_f, N_D, N_Q : 巻数, ℓ_f, ℓ_D, ℓ_Q : 漏れインダクタンス.

(4) 回転子相互インダクタンス

界磁巻線と D 軸のダンパ巻線間の相互インダクタンスは θ_r に無関係に一定で, 直交する巻線間の相互インダクタンスは 0 である.

$$L_{fD} = L_{adm} \frac{N_f N_D}{N_s^2} \equiv M_R \quad (22)$$

$$L_{fQ} = L_{DQ} = 0 \quad (23)$$

(5) 固定子と回転子間の相互インダクタンス

まず, 固定子巻線と界磁巻線間の相互インダクタンスを求める. a 相電流 i_a による界磁巻線の鎖交磁束 ψ_{fa} は次式で与えられる.

$$\psi_{fa} = N_f \int_{-\frac{\pi}{2} + \theta_r}^{\frac{\pi}{2} + \theta_r} B(\theta') \frac{D}{2} \ell d\theta' \quad (24)$$

上式を計算すると, L_{af} が次の様に求まる.

$$L_{af} = M_f \cos \theta_r \quad (25)$$

但し, $M_f \equiv L_{adm} N_f / N_s$

同様に, b, c 相に関しては次式を得る.

$$L_{bf} = M_f \cos(\theta_r - 2\pi/3) \quad (26)$$

$$L_{cf} = M_f \cos(\theta_r + 2\pi/3) \quad (27)$$

次に, 固定子巻線と D, Q ダンパ巻線間の相互インダクタンスに関して, 同様に考えて以下の式を得る.

$$L_{aD} = M_D \cos \theta_r \quad (28)$$

$$L_{bD} = M_D \cos(\theta_r - 2\pi/3) \quad (29)$$

$$L_{cD} = M_D \cos(\theta_r + 2\pi/3) \quad (30)$$

但し, $M_D \equiv L_{adm} N_D / N_s$

$$L_{aQ} = -M_Q \sin \theta_r \quad (31)$$

$$L_{bQ} = -M_Q \sin(\theta_r - 2\pi/3) \quad (32)$$

$$L_{cQ} = -M_Q \sin(\theta_r + 2\pi/3) \quad (33)$$

但し, $M_Q \equiv L_{qqm} N_Q / N_s$

2. 2 電圧方程式

各巻線の電圧方程式は, 以下の様になる.

$$e_{abc} = R_s i_{abc} + p\psi_{abc} \quad (34)$$

$$e_{fDQ} = R_r i_{fDQ} + p\psi_{fDQ} \quad (35)$$

但し, p : 微分演算子 ($= d/dt$)

$$e_{abc} = [e_a, e_b, e_c]^T$$

$$e_{fDQ} = [e_f, e_D, e_Q]^T$$

$$R_s = \begin{bmatrix} r_s & 0 & 0 \\ 0 & r_s & 0 \\ 0 & 0 & r_s \end{bmatrix}, \quad R_r = \begin{bmatrix} r_f & 0 & 0 \\ 0 & r_D & 0 \\ 0 & 0 & r_Q \end{bmatrix}$$

(1), (2) 式で, インダクタンス行列も時間の関数であるから, 次の式が成立する.

$$p\psi_{abc} = (pL_{ss})i_{abc} + L_{ss}(p i_{abc}) + (pL_{sr})i_{fDQ} + L_{sr}(p i_{fDQ}) \quad (36)$$

$$p\psi_{fDQ} = (pL_{sr}^T)i_{abc} + L_{sr}^T(p i_{abc}) + L_{rr}(p i_{fDQ}) \quad (37)$$

3. 任意回転座標系におけるモデル

3. 1 電圧方程式

Fig. 1 に示すように, 任意の角速度 $\omega(t)$ で回転し, 互いに直交する $d-q$ 軸をとる. このとき, 固定子 a 相巻線軸と q 軸のなす角 θ は次式で表わせる.

$$\theta = \int_0^t \omega(t) dt + \theta_0 \quad (38)$$

いま, 各巻線軸と $d-q$ 軸のなす角の余弦を成分とした次式の変数変換を考える.

$$f_{dq0} = C f_{abc} \quad (39)$$

但し,

$$f_{dq0} = [f_d, f_q, f_0]^T$$

$$f_{abc} = [f_a, f_b, f_c]^T$$

$$C = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} \sin \theta & \sin(\theta - 2\pi/3) & \sin(\theta + 2\pi/3) \\ \cos \theta & \cos(\theta - 2\pi/3) & \cos(\theta + 2\pi/3) \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

また, f は i (電流), e (電圧), ψ (鎖交磁束) を代表している. C は直交行列であり, 逆行列と転置行列

は等しい。従って、次式が成立する。

$$\mathbf{f}_{abc} = \mathbf{C}^T \mathbf{f}_{dq0} \quad (40)$$

(34)式の左より、 \mathbf{C} を掛け、(40)式を考慮すると、次式が得られる。

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_{dq0} &= \mathbf{C}\mathbf{R}_s\mathbf{C}^T\mathbf{i}_{dq0} + \mathbf{C}(\mathbf{p}\mathbf{L}_{ss})\mathbf{C}^T\mathbf{i}_{dq0} \\ &\quad + \mathbf{C}\mathbf{L}_{ss}(\mathbf{p}\mathbf{C}^T)\mathbf{i}_{dq0} + \mathbf{C}\mathbf{L}_{ss}\mathbf{C}^T(\mathbf{p}\mathbf{i}_{dq0}) \\ &\quad + \mathbf{C}(\mathbf{p}\mathbf{L}_{sr})\mathbf{i}_{fdq} + \mathbf{C}\mathbf{L}_{sr}(\mathbf{p}\mathbf{i}_{fdq}) \end{aligned} \quad (41)$$

一方、 \mathbf{e}_{fdq} は(40)式を考慮して、

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_{fdq} &= (\mathbf{p}\mathbf{L}_{sr}^T)\mathbf{C}^T\mathbf{i}_{dq0} + \mathbf{L}_{sr}^T(\mathbf{p}\mathbf{C}^T)\mathbf{i}_{dq0} \\ &\quad + \mathbf{L}_{sr}^T\mathbf{C}^T(\mathbf{p}\mathbf{i}_{dq0}) + \mathbf{R}_r\mathbf{i}_{fdq} \\ &\quad + \mathbf{L}_{rr}(\mathbf{p}\mathbf{i}_{fdq}) \end{aligned} \quad (42)$$

となる。(41)、(42)式を計算すると、任意回転座標系における同期電動機の電圧方程式が、以下の様に求められる。

$$\begin{aligned} e_d &= \{r_s - B(2\omega_r - \omega) \sin 2\beta \\ &\quad + (A - B \cos 2\beta)p\}i_d - \omega A i_q \\ &\quad - B\{(2\omega_r - \omega) \cos 2\beta - (\sin 2\beta)p\}i_q \\ &\quad - kM_f p_1 i_f - kM_D p_1 i_D - kM_Q p_2 i_Q \end{aligned} \quad (43)$$

$$\begin{aligned} e_q &= \omega A i_d - B\{(2\omega_r - \omega) \cos 2\beta \\ &\quad - (\sin 2\beta)p\}i_d \\ &\quad + \{r_s + B(2\omega_r - \omega) \sin 2\beta \\ &\quad + (A + B \cos 2\beta)p\}i_q \\ &\quad + kM_f p_2 i_f + kM_D p_2 i_D \\ &\quad - kM_Q p_1 i_Q \end{aligned} \quad (44)$$

$$\begin{aligned} e_f &= kM_f p_3 i_d - kM_f p_4 i_q \\ &\quad + (r_f + L_f p)i_f + M_r p i_D \end{aligned} \quad (45)$$

$$\begin{aligned} e_D &= kM_D p_3 i_d - kM_D p_4 i_q \\ &\quad + M_r p i_f + (r_D + L_D p)i_D \end{aligned} \quad (46)$$

$$\begin{aligned} e_Q &= kM_Q p_4 i_d + kM_Q p_3 i_q \\ &\quad + (r_Q + L_Q p)i_Q \end{aligned} \quad (47)$$

$$e_0 = (r_s + \ell_s p)i_0 \quad (48)$$

但し、 $k = \sqrt{3/2}$ 、 $A = L_a + M_s$ 、 $B = 3L_m/2$

$$p_1 = \omega_r \cos \beta - (\sin \beta)p$$

$$p_2 = \omega_r \sin \beta + (\cos \beta)p$$

$$p_3 = (\omega - \omega_r) \cos \beta + (\sin \beta)p$$

$$p_4 = (\omega - \omega_r) \sin \beta - (\cos \beta)p$$

ダンパ巻線は短絡されているので、(46)、(47)式の e_D 、 e_Q は0である。また、中性点接地などの場合を除

き、三相電流の和が0であれば、 $i_0 = 0$ となり、(48)式は考えなくてもよい。

次に、鎖交磁束 ϕ_{dq0} について考える。(1)、(39)式より、次式が成立する。

$$\begin{aligned} \phi_{dq0} &= \mathbf{C}\psi_{abc} \\ &= \mathbf{C}\mathbf{L}_{ss}\mathbf{C}^T\mathbf{i}_{dq0} + \mathbf{C}\mathbf{L}_{sr}\mathbf{i}_{fdq} \end{aligned} \quad (49)$$

上式を計算すると、

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \phi_d \\ \phi_q \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A - B \cos 2\beta & B \sin 2\beta \\ B \sin 2\beta & A + B \cos 2\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \end{bmatrix} \\ &\quad + k \begin{bmatrix} M_f \sin \beta & M_D \sin \beta - M_Q \cos \beta \\ M_f \cos \beta & M_D \cos \beta & M_Q \sin \beta \end{bmatrix} \\ &\quad \times \begin{bmatrix} i_f \\ i_D \\ i_Q \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (50)$$

を得る。また、(1)、(34)、(49)式より

$$\begin{aligned} \mathbf{p}\phi_{dq0} &= (\mathbf{p}\mathbf{C})\psi_{abc} + \mathbf{C}(\mathbf{p}\psi_{abc}) \\ &= (\mathbf{p}\mathbf{C})(\mathbf{L}_{ss}\mathbf{C}^T\mathbf{i}_{dq0} + \mathbf{L}_{sr}\mathbf{i}_{fdq}) \\ &\quad + \mathbf{e}_{dq0} - \mathbf{R}_s\mathbf{i}_{dq0} \end{aligned} \quad (51)$$

であるから、次式が成立する。

$$e_d = r_s i_d + \mathbf{p}\phi_d - \omega\phi_q \quad (52)$$

$$e_q = r_s i_q + \mathbf{p}\phi_q + \omega\phi_d \quad (53)$$

以上により電圧方程式が得られたが、定数決定の際に便利のように、回転子側の諸量を固定子側へ換算しておく。固定子側に換算した値にはダッシュをつけ、以下の様に定義する。

$$e_f' = k \frac{N_s}{N_f} e_f, \quad e_D' = k \frac{N_s}{N_D} e_D,$$

$$e_Q' = k \frac{N_s}{N_Q} e_Q$$

$$i_f' = \frac{N_f}{kN_s} i_f, \quad i_D' = \frac{N_D}{kN_s} i_D,$$

$$i_Q' = \frac{N_Q}{kN_s} i_Q$$

$$r_f' = \left(\frac{kN_s}{N_f}\right)^2 r_f, \quad r_D' = \left(\frac{kN_s}{N_D}\right)^2 r_D,$$

$$r_Q' = \left(\frac{kN_s}{N_Q}\right)^2 r_Q$$

$$\ell_f' = \left(\frac{kN_s}{N_f}\right)^2 \ell_f, \quad \ell_D' = \left(\frac{kN_s}{N_D}\right)^2 \ell_D,$$

$$\ell_Q' = \left(\frac{kN_s}{N_Q}\right)^2 \ell_Q$$

$$L_f' = \left(\frac{kN_s}{N_f}\right)^2 L_f = L_{md} + \ell_f',$$

$$\begin{aligned}
L_{md} &\equiv \frac{3}{2}L_{adm} \\
L_{D'} &= \left(\frac{kN_s}{N_D}\right)^2 L_D = L_{md} + \ell_{D'} \\
L_{Q'} &= \left(\frac{kN_s}{N_Q}\right)^2 L_Q = L_{mq} + \ell_{Q'} \\
L_{mq} &\equiv \frac{3}{2}L_{qqm} \quad (54)
\end{aligned}$$

(43)～(47)式を書き換えると以下の式が得られる。

$$\begin{aligned}
e_d &= \{r_s - B(2\omega_r - \omega) \sin 2\beta \\
&\quad + (A - B \cos 2\beta)p\}i_d - \omega A i_q \\
&\quad - B\{(2\omega_r - \omega) \cos 2\beta - (\sin 2\beta)p\}i_q \\
&\quad - L_{ma}p_1(i_f' + i_D') - L_{mq}p_2i_q' \quad (55)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
e_q &= \omega A i_d - B\{(2\omega_r - \omega) \cos 2\beta \\
&\quad - (\sin 2\beta)p\}i_d \\
&\quad + \{r_s + B(2\omega_r - \omega) \sin 2\beta \\
&\quad + (A + B \cos 2\beta)p\}i_q \\
&\quad + L_{ma}p_2(i_f' + i_D') - L_{mq}p_1i_q' \quad (56)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
e_{f'} &= L_{ma}p_3i_d - L_{ma}p_4i_q \\
&\quad + (r_f' + L_f'p)i_f' + L_{md}i_D' \quad (57)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
e_{D'} &= L_{ma}p_3i_d - L_{ma}p_4i_q \\
&\quad + L_{ma}p_i f' + (r_{D'} + L_{D'}p)i_{D'} \quad (58)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
e_{Q'} &= L_{mq}p_4i_d + L_{mq}p_5i_q \\
&\quad + (r_{Q'} + L_{Q'}p)i_{Q'} \quad (59)
\end{aligned}$$

また、(50)式は次式となる。

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \phi_d \\ \phi_q \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A - B \cos 2\beta & B \sin 2\beta \\ B \sin 2\beta & A + B \cos 2\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \end{bmatrix} \\
&\quad + \begin{bmatrix} L_{md} \sin \beta & L_{md} \sin \beta - L_{mq} \cos \beta \\ L_{md} \cos \beta & L_{md} \cos \beta - L_{mq} \sin \beta \end{bmatrix} \\
&\quad \times \begin{bmatrix} i_f' \\ i_D' \\ i_{Q'} \end{bmatrix} \quad (60)
\end{aligned}$$

3. 2 発生トルク

磁界のエネルギー W_m は、次式で与えられる。

$$W_m = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} i_{abc} \\ i_{fDQ} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} L_{ss} & L_{sr} \\ L_{sr}^T & L_{rr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{abc} \\ i_{fDQ} \end{bmatrix} \quad (61)$$

一般に、発生トルク τ_e は、 W_m の独立変数として電流と回転角を選ぶと、次式より求まる。

$$\tau_e = \frac{P}{2} \frac{\partial W_m}{\partial \theta_r}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{P}{4} \left(i_{dq0}^T C \frac{\partial L_{ss}}{\partial \theta_r} C^T i_{dq0} + i_{fDQ}^T \frac{\partial L_{sr}}{\partial \theta_r} C^T i_{dq0} \right. \\
&\quad \left. + i_{dq0}^T C \frac{\partial L_{sr}}{\partial \theta_r} i_{fDQ} \right) \quad (62)
\end{aligned}$$

但し、 P ：極数。

上式を計算すると、

$$\begin{aligned}
\tau_e &= (P/2) \{ B\{(i_q^2 - i_d^2) \sin 2\beta - 2i_d i_q \cos 2\beta\} \\
&\quad + k(M_{fif} + M_{DID})(i_q \sin \beta - i_d \cos \beta) \\
&\quad - kM_{QIQ}(i_d \sin \beta + i_q \cos \beta) \} \quad (63)
\end{aligned}$$

となる。(50)式の ϕ_d 、 ϕ_q を用いると、

$$\tau_e = (P/2)(\phi_d i_q - \phi_q i_d) \quad (64)$$

である。また、固定子側に換算した量を用いると、

$$\begin{aligned}
\tau_e &= (P/2) \{ B\{(i_q^2 - i_d^2) \sin 2\beta - 2i_d i_q \cos 2\beta\} \\
&\quad + L_{md}(i_f' + i_D')(i_q \sin \beta - i_d \cos \beta) \\
&\quad - L_{mq}i_{Q'}(i_d \sin \beta + i_q \cos \beta) \} \quad (65)
\end{aligned}$$

となる。

4. Park の式との関連

Park の式は、回転子上に $d-q$ 軸をとることにより得られる。従って、 $\beta = \pi/2$ 、 $\omega = \omega_r$ とすれば良く、(55)～(59)式は以下のように書ける。

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} e_d \\ e_q \\ e_{f'} \\ e_{D'} \\ e_{Q'} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} r_s + L_a p & -\omega_r L_q & L_{ma} p \\ \omega_r L_d & r_s + L_q p & \omega_r L_{ma} \\ L_{ma} p & 0 & r_f' + L_f' p \\ L_{ma} p & 0 & L_{ma} p \\ 0 & L_{mq} p & 0 \end{bmatrix} * \\
&\quad \begin{bmatrix} L_{ma} p & -\omega_r L_{mq} \\ \omega_r L_{ma} & L_{mq} p \\ L_{ma} p & 0 \\ r_{D'} + L_{D'} p & 0 \\ 0 & r_{Q'} + L_{Q'} p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \\ i_f' \\ i_{D'} \\ i_{Q'} \end{bmatrix} \quad (66)
\end{aligned}$$

但し、

$$L_d \equiv A + B = L_{md} + \ell_s \quad (67)$$

$$L_q \equiv A - B = L_{mq} + \ell_s \quad (68)$$

また、鎖交磁束に関しては、(60)式より

$$\phi_d = L_d i_d + L_{md}(i_f' + i_{D'}) \quad (69)$$

$$\phi_q = L_q i_q + L_{mq} i_{Q'} \quad (70)$$

を得る。上式を、(66)式に代入すると、(52)、(53)式が成立していることが確認できる。(66)式を等価回路

で表わすと, Fig. 3 が得られる.

発生トルクは, (65)式より,

$$\tau_e = (P/2)\{(L_d - L_q)i_d i_q + L_{md}(i_f' + i_D')i_q - L_{mq}i_Q' i_d\} \quad (71)$$

であり, 当然ながら, (64)式の関係も成立している.

次に, 定常解析について述べる. 定常時には, 電源の周波数に同期して回転するので,

$$\begin{bmatrix} e_a \\ e_b \\ e_c \end{bmatrix} = \sqrt{2} E \begin{bmatrix} \cos \omega_s t \\ \cos(\omega_s t - 2\pi/3) \\ \cos(\omega_s t + 2\pi/3) \end{bmatrix} \quad (72)$$

とすると, $\omega_s = \omega_r$ である. (39)式の座標変換で,

$$\theta = \omega_s t - \delta \quad (73)$$

とおいて, e_d, e_q を求めると次式を得る.

$$\begin{bmatrix} e_d \\ e_q \end{bmatrix} = \sqrt{3} E \begin{bmatrix} -\sin \delta \\ \cos \delta \end{bmatrix} \quad (74)$$

e_d, e_q は直流量であるから, (66)式で $p = 0$ とおくことにより定常解が求まる. $e_d' = e_q' = 0$ であるから, ダンパ電流 i_D', i_Q' は 0 となる. 従って, e_d, e_q は次式で与えられる.

$$e_d = r_s i_d - x_q i_q \quad (75)$$

$$e_q = r_s i_q + x_d i_d + \sqrt{3} E_0 \quad (76)$$

但し, $x_d = \omega_s L_d, x_q = \omega_s L_q, \sqrt{3} E_0 = \omega_s L_m a i_f'$

r_s を無視して, (71)式よりトルクを計算すると,

$$\tau_e = \frac{3P}{2\omega_s} \left\{ \frac{EE_0}{x_d} \sin \delta + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x_q} - \frac{1}{x_d} \right) E^2 \sin 2\delta \right\} \quad (77)$$

が得られる. フェーザ表示は, (40)式より,

$$e_a = \sqrt{2/3}(e_d \sin \theta + e_q \cos \theta) \quad (78)$$

であるから, (75), (76)式を代入し, 次式となる.

$$\begin{aligned} \dot{E}_a &= r_s(\dot{I}_d + \dot{I}_q) + jx_d \dot{I}_d \\ &\quad + jx_q \dot{I}_q + \dot{E}_0 \end{aligned} \quad (79)$$

但し,

$$\begin{aligned} \dot{I}_d &= \frac{i_d}{\sqrt{3}} e^{-j\theta}, & \dot{I}_q &= j \frac{i_q}{\sqrt{3}} e^{-j\theta}, \\ \dot{E}_0 &= jE_0 e^{-j\theta} \end{aligned}$$

(79)式より, Fig. 4 が得られる. (78)式と同様, i_a のフェーザ表示 \dot{I}_a を考えると,

$$\dot{I}_a = \dot{I}_d + \dot{I}_q \quad (80)$$

が成立する. 以上の結果から, (72)式に対して定義した(73)式の δ は負荷角と考えてよいことがわかる. \dot{E}_0 が逆起電力であることに注意すると, Fig. 4 のフェーザ図は, $t = 0$ における空間的ベクトルとも対応している.

Park の式 (肩文字 r) より任意回転座標系のモデル (肩文字 a) を導出するには,

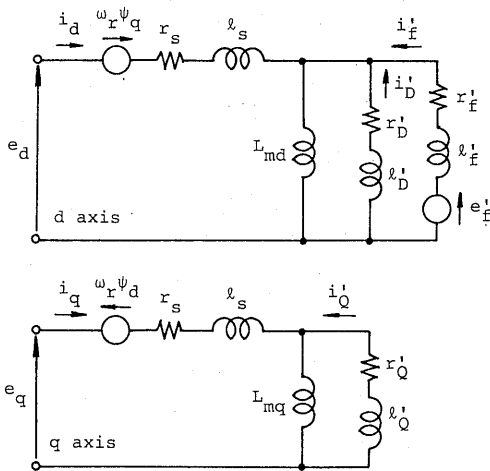


Fig. 3 Equivalent circuits of a synchronous motor with reference frame fixed in rotor.

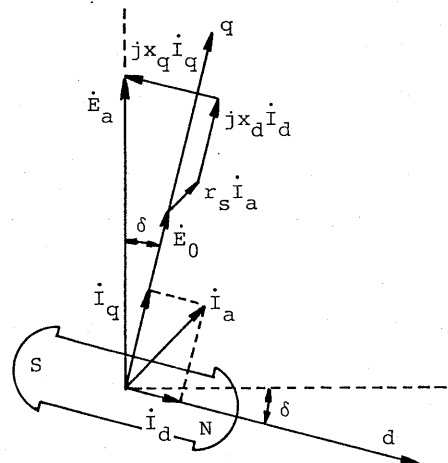


Fig. 4 Phasor diagram of a synchronous motor.

$$\begin{bmatrix} f_d^a \\ f_q^a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin \beta & -\cos \beta \\ \cos \beta & \sin \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_d^r \\ f_q^r \end{bmatrix} \quad (81)$$

を用いて変数変換すればよい。

5. Clarke のモデルとの関連

静止座標系における Clarke のモデルは、(39)式で、 $\theta = \theta_0$ (一定) とおくことにより得られる。この場合 $\omega = 0$ であるから、(55)~(59)式は以下ようになる。

$$\begin{aligned} e_d &= \{r_s + 2\omega_r B \sin 2\beta' \\ &\quad + (A - B \cos 2\beta') p\} i_d \\ &\quad - B\{2\omega_r \cos 2\beta' + (\sin 2\beta') p\} i_q \\ &\quad - L_{mq} p_1 (i_f' + i_D') - L_{mq} p_2 i_q' \end{aligned} \quad (82)$$

$$\begin{aligned} e_q &= -B\{2\omega_r \cos 2\beta' + (\sin 2\beta') p\} i_d \\ &\quad + \{r_s - 2B\omega_r \sin 2\beta' \\ &\quad + (A + B \cos 2\beta') p\} i_q \\ &\quad + L_{mq} p_2 (i_f' + i_D') - L_{mq} p_1 i_q' \end{aligned} \quad (83)$$

$$\begin{aligned} e_f' &= -L_{mq} p_1 i_d + L_{mq} p_2 i_q \\ &\quad + (r_f' + L_f' p) i_f' + L_{mq} p_1 i_D' \end{aligned} \quad (84)$$

$$\begin{aligned} e_{D'} &= -L_{mq} p_1 i_d + L_{mq} p_2 i_q \\ &\quad + L_{mq} p_1 i_f' + (r_{D'} + L_{D'} p) i_{D'} \end{aligned} \quad (85)$$

$$\begin{aligned} e_{q'} &= -L_{mq} p_2 i_d - L_{mq} p_1 i_q \\ &\quad + (r_{q'} + L_{q'} p) i_{q'} \end{aligned} \quad (86)$$

但し、 $\beta' = -\beta = \theta_r - \theta_0$

6. 非突極機及び永久磁石機のモデル

非突極機の場合には、エアギャップが一様で、(4)式で、 $g_2 = 0$ とすればよい。この結果、

$$\begin{aligned} L_{dam} &= L_{qam}, \quad L_{dda} = L_{qq}, \quad L_{mda} = L_{mq} \equiv M \\ L_d &= L_q \equiv L_s, \quad x_d = x_q \equiv x_s, \quad L_m = 0, \\ A &= L_s, \quad B = 0 \end{aligned}$$

などが成立する。また、ダンパ巻線についても、一樣に配置されていると考えると、

$$\begin{aligned} r_D &= r_q = r_r, \quad r_{D'} = r_{q'} \equiv r_r', \\ N_D &= N_q \end{aligned}$$

$$L_D = L_q \equiv L_r, \quad L_{D'} = L_{q'} \equiv L_r'$$

が成立する。このとき、任意回転座標系のモデルは、(55)~(59)式より、以下のように書ける。

$$\begin{bmatrix} e_d \\ e_q \\ e_f' \\ e_{D'} \\ e_{q'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_s + L_s p & -\omega L_s & -Mp_1 \\ \omega L_s & r_s + L_s p & Mp_2 \\ Mp_3 & -Mp_4 & r_f' + L_f' p \\ Mp_3 & -Mp_4 & Mp \\ Mp_4 & Mp_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \\ i_f' \\ i_{D'} \\ i_{q'} \end{bmatrix} \quad (87)$$

ダンパ巻線を d, q 軸上に移すために、

$$\begin{bmatrix} e_d'' \\ e_q'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin \beta & -\cos \beta \\ \cos \beta & \sin \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_d \\ e_q \end{bmatrix} \quad (88)$$

$$\begin{bmatrix} i_d'' \\ i_q'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin \beta & -\cos \beta \\ \cos \beta & \sin \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \end{bmatrix} \quad (89)$$

を用いて変数変換すると次式が得られる。

$$\begin{bmatrix} e_d \\ e_q \\ e_f' \\ e_{D'} \\ e_{q'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_s + L_s p & -\omega L_s & -Mp_1 \\ \omega L_s & r_s + L_s p & Mp_2 \\ Mp_3 & -Mp_4 & r_f' + L_f' p \\ Mp & -(\omega - \omega_r) M & M(\sin \beta) p \\ (\omega - \omega_r) M & Mp & M(\cos \beta) p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \\ i_f' \\ i_{D'} \\ i_{q'} \end{bmatrix} \quad (90)$$

界磁回路を除いた式は、任意回転座標系における誘導電動機の式と一致する⁸⁾。トルクは、(65)式より、

$$\begin{aligned} \tau_e &= (P/2) M \{ i_f' (i_q \sin \beta - i_d \cos \beta) \\ &\quad + i_q i_{D'}'' - i_d i_{q'}'' \} \end{aligned} \quad (91)$$

となる。ダンパ電流によるトルクは誘導機のトルクと同じ式で与えられていることがわかる。

特に、Park の座標系では、 $\omega = \omega_r$, $p_1 = -p$, $p_2 = \omega_r$, $p_3 = p$, $p_4 = 0$ とおいて、

$$\begin{bmatrix} e_d \\ e_q \\ e_f' \\ e_{D'} \\ e_{q'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_s + L_s p & -\omega_r L_s & Mp \\ \omega_r L_s & r_s + L_s p & \omega_r M \\ Mp & 0 & r_f' + L_f' p \\ Mp & 0 & Mp \\ 0 & Mp & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \\ i_f' \\ i_{D'} \\ i_{q'} \end{bmatrix} \quad *$$

$$* \begin{matrix} Mp & -\omega_r M \\ \omega_r M & Mp \\ Mp & 0 \\ r_r' + L_r' p & 0 \\ 0 & r_r' + L_r' p \end{matrix} \begin{matrix} i_a \\ i_q \\ i_f' \\ i_d' \\ i_q' \end{matrix} \quad (92)$$

となる。この場合、 $\beta = \pi/2$ であるから、 $e_d' = e_d''$ 、 $e_q' = e_q''$ 、 $i_d' = i_d''$ 、 $i_q' = i_q''$ である。トルクは、(91) 式より、

$$\tau_e = (P/2)M(i_f' i_q + i_q i_d' - i_d i_q') \quad (93)$$

で与えられる。

永久磁石機の場合には、界磁電流 i_f' を一定と考え、 $p i_f' = 0$ とおき、さらに界磁回路の電圧方程式を除くことでモデル化できる。

7. あとがき

任意回転座標系を用いたダンパ巻線付き突極形同期電動機のモデルを提案した。このモデルは一般的で、現在用いられている種々の同期電動機のモデルを包含するものである。なお、非突極機の場合には、誘導電動機のモデルに界磁回路の式が追加されたモデルとなり、特に界磁電流一定の条件を設けると空間ベクトル

としての定式化も容易である。

参考文献

- 1) C. Concordia: Synchronous Machines, John Wiley (1951).
- 2) P. C. Krause: Analysis of Electric Machinery, MacGraw-Hill (1986).
- 3) 猪狩: 電気機械理論, コロナ社 (昭52).
- 4) F. Harashima, H. Naitoh and T. Haneyoshi: Dynamic Performance of Self-Controlled Synchronous Motors Fed by Current-Source Inverters, IEEE Trans. Industr. Applic., **IA-15**, pp. 36-47 (1979).
- 5) 大沢・木下・中野: 同期電動機の高性能可変速制御, 電学論D, 107巻2号, pp. 175-182 (昭62).
- 6) J. Meisel: Principles of Electromechanical Energy Conversion, MacGraw-Hill (1966).
- 7) P. M. Anderson & A. A. Fouad: Power System Control and Stability, Iowa State University Press (1980).
- 8) 辻・山田・小山・泉: 三相誘導機の2軸理論の応用, 長崎大学工学部研究報告, 第14巻, 第22号, pp. 51-58 (昭59).