

長方形板の振動および座屈挙動に及ぼす 温度変化の影響

高橋 和 雄*・藤野 昭 二**

Infuences of Temperature Changes on Vibration and Buckling of Rectangular Plates

by

Kazuo TAKAHASHI and Syouji FUJINO

The fundamental equation of nonlinear flexural vibration for a rectangular elastic plate, subjected to the change in temperature is solved by employing a Galerkin method for space variables and the harmonic balance method for time variable, and the influences of temperature change and large amplitude on the frequency of free vibration are established. Some numerical escamples are given for a plate with hinged edges and clamped edges, and it is shown that the effects mentined above are considerably large.

1. まえがき

長方形板が急な温度変化を受けると熱応力が発生し、温度差による曲げ変形や熱座屈によって曲げ変形が生じ、振動特性に変化を及ぼす。しかし、微小変形を考慮した線形理論では、熱による平板の変形に伴う振動特性を論ずることは不十分である。この方面の研究として砂川は、温度変化を受ける長方形平板の有限変形を考慮した運動方程式に Galerkin 法を適用して、1 自由度系としての非線形運動方程式を導き出し、これに摂動法を用いて解析している¹⁾。本研究では多自由度系モデル解析の第1段階として、周辺が単純支持および固定の長方形板を1自由度系モデルで近似し、調和バランス法を用いた解析を行う。数値解析において、本法の精度をシミュレーションや既往の解と比較するとともに、固有振動特性および座屈特性に及ぼす温度変化の影響を評価する。

2. 運動方程式

Fig. 1 に示すような急激な温度変化を受けると、平

板に熱曲げと熱による面内応力が生じ、長方形平板の運動方程式は、次のようになる¹⁾。

$$D\nabla^4 w = d \left(\frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 \chi}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) - \frac{Ed^2 \alpha}{(1-\nu)} \nabla^2 \bar{\theta} - \rho d \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (1)$$

また、適合条件式は次式となる。

$$\nabla^4 \chi = E \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] - E \alpha \nabla^2 \bar{\theta} \quad (2)$$

ここに、 d :板厚、 x, y :直交座標系、 t :時間、 w :中立面の z 方向の変位、 $D = Ed^3/12(1-\nu^2)$:平板の曲げ剛性、 E :板材料の縦弾性係数、 α :板材料の線膨張係数、 ρ :板材料の密度、 $\bar{\theta}$:平均温度、 $\bar{\theta}$:温度モーメント、 ν :ポアソン比、 χ :Airyの応力関数、

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad \nabla^4 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}$$

長方形板の境界条件は、曲げに対して周辺単純支持あるいは固定とし、面内変位 u, v は固定とする²⁾。すなわち、面内変位に対して

平成7年4月28日受理

*社会開発工学科 (Department of Civil Engineering)

**延岡市役所 (Nobeoka City Office)

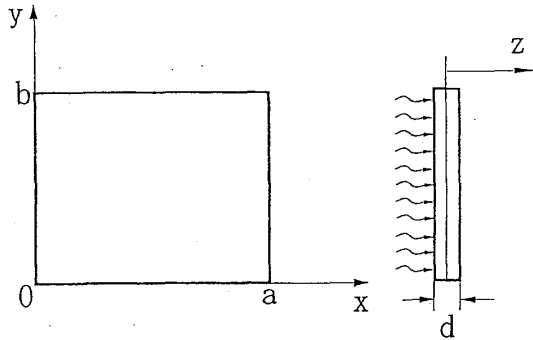


Fig. 1 Geometry of plate.

$x=0, a$ の時

$$u = \int_0^a \left[\frac{1}{E} \left(\frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} - \nu \frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2} \right) + \alpha \bar{\theta} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] dx = 0 \quad (3)$$

$y=0, b$ の時

$$\nu = \int_0^b \left[\frac{1}{E} \left(\frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} - \nu \frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2} \right) + \alpha \bar{\theta} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] dy = 0 \quad (4)$$

単純支持の場合

$x=0, a$ の時

$$w=0$$

$$M_x = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) - \frac{Ed^2 \alpha}{(1-\nu)} \bar{\theta} = 0 \quad (5)$$

$y=0, b$ の時

$$w=0$$

$$M_y = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) - \frac{Ed^2 \alpha}{(1-\nu)} \bar{\theta} = 0 \quad (6)$$

固定の場合

$x=0, a$ の時

$$w = \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad (7)$$

$y=0, b$ の時

$$w = \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \quad (8)$$

3. 解法

(1) 常微分方程式の誘導

式(1)の単純支持, 固定の場合の解をそれぞれ1自由度系で次のように仮定する。

$$w(x, y; \theta, t) = z(\theta, t) w_s(x, y) \quad (9)$$

ここに, $x(\theta, t)$: 平板中央の変位

単純支持:

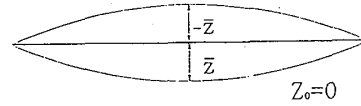
$$w_s(x, y) = \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} \quad (10)$$

固定:

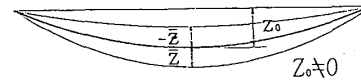
$$w_c(x, y) = \frac{1}{4} \left(1 - \cos \frac{2\pi x}{a} \right) \left(1 - \cos \frac{2\pi y}{b} \right) \quad (11)$$

Fig.2ように $z(\theta, t)$ は温度変化による平板中央の無次元変位 $\bar{z}(t)$ と温度変化のみによる平板中央の無次元変位 $z_0(\theta)$ に分けられる。

$$z(\theta, t)/d = z_0(\theta) + \bar{z}(t)_{\theta=0} \quad (12)$$



Prebuckling state



Postbuckling state

Fig. 2 Amplitude of plate.

応力関数は, 次式のように仮定することができる¹⁾。

$$\chi = \frac{1}{2} C_1 x^2 + \frac{1}{2} C_2 y^2 + \chi_p \quad (13)$$

ここに, C_1, C_2 : 積分定数, χ_p : 特解

板面内の温度分布は中央に関して対称形を仮定して, 次式で与える¹⁾。

$$\bar{\theta} = \sum_i \sum_j \bar{\theta}_{ij} \cos \frac{i\pi x}{a} \cos \frac{j\pi y}{b} \quad (14)$$

($i, j = 0, 2, 4, \dots$ even)

$$\bar{\theta} = \sum_p \sum_q \bar{\theta}_{pq} \sin \frac{p\pi x}{a} \sin \frac{q\pi y}{b} \quad (15)$$

($p, q = 1, 3, 5, \dots$ odd)

式(2)より応力関数を求めると次式ようになる。

$$\begin{aligned} \chi_{ps} = & \frac{Ez^2}{32} \left[\left(\frac{a}{b} \right)^2 \cos \frac{2\pi x}{a} + \left(\frac{b}{a} \right)^2 \cos \frac{2\pi y}{b} \right] \\ & + E\alpha \left\{ \sum_{i=2}^{\infty} \frac{\bar{\theta}_{i0}}{\left(\frac{i\pi}{a} \right)^2} \cos \frac{i\pi x}{a} + \sum_{j=2}^{\infty} \frac{\bar{\theta}_{0j}}{\left(\frac{j\pi}{b} \right)^2} \cos \frac{j\pi y}{b} \right. \\ & \left. + \sum_{i=2}^{\infty} \sum_{j=2}^{\infty} \frac{\bar{\theta}_{ij}}{\left[\left(\frac{i\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{j\pi}{b} \right)^2 \right]} \cos \frac{i\pi x}{a} \cos \frac{j\pi y}{b} \right\} \\ & + \frac{1}{2} C_{1s} x^2 + \frac{1}{2} C_{2s} y^2 \quad (16) \end{aligned}$$

$$\chi_{pc} = \frac{Ez^2}{32} \left\{ \left(\frac{a}{b} \right)^2 \cos \frac{2\pi x}{a} + \left(\frac{b}{a} \right)^2 \cos \frac{2\pi y}{b} \right.$$

$$\left. - \frac{1}{16} \left[\left(\frac{a}{b} \right)^2 \cos \frac{4\pi x}{a} + \left(\frac{b}{a} \right)^2 \cos \frac{4\pi y}{b} \right] \right\}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{2 \left(\frac{a}{b}\right)^2}{\left(1 + \left(\frac{a}{b}\right)^2\right)^2} \cos \frac{2\pi x}{a} \cos \frac{2\pi y}{b} + \frac{\left(\frac{a}{b}\right)}{\left(1 + 4\left(\frac{a}{b}\right)^2\right)^2} \cos \frac{2\pi x}{a} \cos \frac{4\pi y}{b} \\
& + \frac{\left(\frac{a}{b}\right)^2}{\left(4 + \left(\frac{a}{b}\right)^2\right)^2} \cos \frac{4\pi x}{a} \cos \frac{2\pi y}{b} \\
& + E\alpha \left\{ \sum_{i=2}^{\infty} \frac{\bar{\theta}_{i0}}{\left(\frac{i\pi}{a}\right)^2} \cos \frac{i\pi x}{a} + \sum_{j=2}^{\infty} \frac{\bar{\theta}_{0j}}{\left(\frac{j\pi}{b}\right)^2} \cos \frac{j\pi y}{b} + \right. \\
& \left. + \sum_{i=2}^{\infty} \sum_{j=2}^{\infty} \frac{\bar{\theta}_{ij}}{\left[\left(\frac{i\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{j\pi}{b}\right)^2\right]} \cos \frac{i\pi x}{a} \cos \frac{j\pi y}{b} \right\} \\
& + \frac{1}{2} C_{1c} x^2 + \frac{1}{2} C_{2c} y^2 \quad (17)
\end{aligned}$$

単純支持:

$$C_{1s} = -\frac{E\alpha\bar{\theta}_{00}}{(1-\nu)} + \frac{\pi^2 E z^2}{8(1-\nu^2)} \left(\frac{\nu}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right) \quad (18)$$

$$C_{2s} = -\frac{E\alpha\bar{\theta}_{00}}{(1-\nu)} + \frac{\pi^2 E z^2}{8(1-\nu^2)} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{\nu}{b^2}\right) \quad (19)$$

固定:

$$C_{1c} = -\frac{E\alpha\bar{\theta}_{00}}{(1-\nu)} + \frac{3\pi^2 E z^2}{32(1-\nu^2)} \left(\frac{\nu}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right) \quad (20)$$

$$C_{2c} = -\frac{E\alpha\bar{\theta}_{00}}{(1-\nu)} + \frac{3\pi^2 E z^2}{32(1-\nu^2)} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{\nu}{b^2}\right) \quad (21)$$

式(1)の近似解を求めるために式(20), (21)を式(1)に代入して, Galerkin法を適用し, x, y 座標, 時間 t に関して無次元化を行うと次の非線形常微分方程式が得られる。

$$\begin{aligned}
& \frac{d^2 \bar{z}(\tau)}{d\tau^2} + (F_1 + 3F_3 z_0(\theta)^2) \bar{z}(\tau) + 3F_3 z_0(\theta) \bar{z}(\tau)^2 \\
& + F_3 \bar{z}(\tau)^3 = 0 \quad (22)
\end{aligned}$$

ここに, τ : 無次元時間

単純支持:

$$\begin{aligned}
F_{1s} &= \pi^4 \left(1 + \frac{1}{\lambda^2}\right)^2 \\
& - 12(1+\nu)\pi^2 \left(\frac{b}{a}\right)^2 \alpha \left[\left(1 + \frac{1}{\lambda^2}\right) \bar{\theta}_{00} - \frac{(1-\nu)}{2} \left(\frac{\bar{\theta}_{02}}{\lambda^2} + \bar{\theta}_{20}\right) \right] \quad (23)
\end{aligned}$$

$$F_{3s} = 3\pi^4 \left[\frac{(3-\nu^2)}{4} \left(1 + \frac{1}{\lambda^4}\right) + \frac{\nu}{\lambda^2} \right] \quad (24)$$

固定:

$$\begin{aligned}
F_{1c} &= \frac{16\pi^4}{9} \left(3 + \frac{2}{\lambda^2} + \frac{3}{\lambda^4}\right) - \frac{8}{3} (1+\nu) \pi^2 \left(\frac{b}{a}\right)^2 \alpha \left\{ 6 \left(1 + \frac{1}{\lambda^2}\right) \bar{\theta}_{00} \right. \\
& \left. + 2(1-\nu) \left\{ \left[\frac{1}{\lambda^2} (4\bar{\theta}_{02} - \bar{\theta}_{04}) + (4\bar{\theta}_{20} - \bar{\theta}_{40})\right] + \frac{4\bar{\theta}_{22}}{(1+\lambda^2)} \right\} \right\}
\end{aligned}$$

$$- 2 \left[\frac{\bar{\theta}_{24}}{(1+4\lambda^2)} + \frac{\bar{\theta}_{42}}{(4+\lambda^2)} \right] \} \quad (25)$$

$$\begin{aligned}
F_{3s} &= 3\pi^4 \left\{ \frac{(35-17\nu^2)}{36} \left(1 + \frac{1}{\lambda^4}\right) + \frac{\nu}{\lambda^2} \right. \\
& \left. + \frac{2(1-\nu^2)}{9} \left[\frac{4}{(1+\lambda^2)^2} + \frac{1}{(1+4\lambda^2)^2} + \frac{1}{(4+\lambda^2)^2} \right] \right\} \quad (26)
\end{aligned}$$

$z_0(\theta)$ は静的解であり, 次式の解として得られる。

$$F_1 z_0(\theta) + F_3 z_0(\theta)^3 = g \quad (27)$$

(2) 調和バランス法による解析

式(22)は非線形自由振動方程式なので解を次式のように仮定する。

$$\bar{z}(\tau) = a_0 + a_1 \cos \omega \tau \quad (28)$$

ここに, ω : 非線形振動数, a_0, a_1 : 係数

式(28)を式(22)に代入して調和バランス法を適用すれば, 未定定数を求める連立非線形代数方程式が得られる。

$$\begin{aligned}
& a_0(F_1 + 3F_3 z_0^2) + 3F_3 z_0 \left(a_0^2 + \frac{a_1^2}{2}\right) \\
& + F_3 \left(a_0^3 + \frac{3}{2} a_0 a_1^2\right) = 0 \quad (29)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& a_1(F_1 + 3F_3 z_0^2) + 6F_3 z_0 a_0 a_1 \\
& + F_3 \left(\frac{3}{4} a_1^3 + 3a_0^2 a_1\right) - a_1 \omega^2 = 0 \quad (30)
\end{aligned}$$

ここで, 式(29), (30)をNewton-Raphson法を用いて, 初期値のもとに解けば解が得られる。

(3) Runge-Kutta-Gill法による時間応答解析

式(22)において, $\bar{z} = T_1, \dot{\bar{z}} = T_2$ とおくと, 次式に示す2個の1解常微分方程式に変換することができる。

$$\dot{T}_1 = T_2 \quad (31)$$

$$\dot{T}_2 + (F_1 + 3F_3 z_0^2) T_1 + 3F_3 z_0 T_1^2 + F_3 T_1^3 = 0 \quad (32)$$

上式をRunge-Kutta-Gill法により数値積分して時間応答解析を行う。解析をするにあたって, 初期条件としては, 初変位 T_1 に振幅を与え, 初速度 T_2 は0とした。また, 時間刻みは計算誤差が発散しないように0.005を採用した。

4. 解析結果

長方形平板は次式で与えられる温度変化を受けるものとする

$$\theta = \bar{\theta} = \Theta \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}, \quad \bar{\theta} = 0 \quad (32)$$

ここに、 θ : 無歪み無応力状態よりの温度上昇

(1) 線形振動

長方形平板は、臨界温度 $(b/d)^2 \alpha \Theta_{cr}$ において熱座屈を起こすので、座屈を起こす前後に分けて考える。Fig. 3は、微小振動の単純支持の長方形板の振動数と温度変化の関係を縦横比をパラメータに示したものである。ここで、 λ は縦横比 (a/b) 、 $(b/d)^2 \alpha \Theta_{cr}$ は臨界温度である。縦軸 $\omega / \omega_{\theta=0}$ は振動数 ω を縦横比 $\lambda = 1.0$ 、温度 $\theta = 0$ の場合の振動数で無次元化した無次元振動数、横軸 $(b/d)^2 \alpha \Theta$ は無次元温度パラメータを示す。温度パラメータが増加すると振動数は減少し、振動数が0となった場合の温度が臨界温度となる。また、縦横比が大きくなると固有振動数および座屈温度が小さくなる。

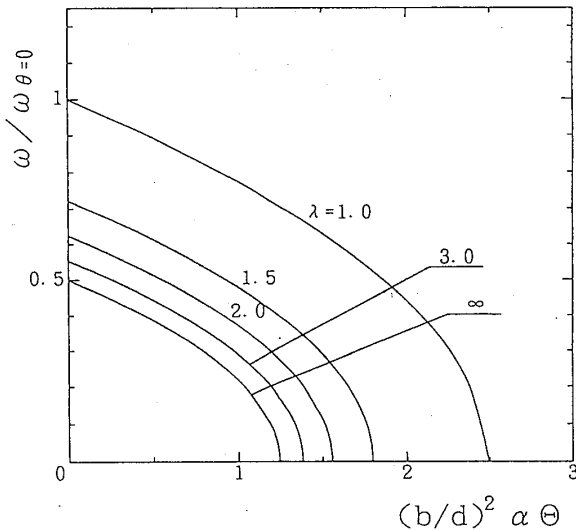


Fig. 3 Relation between frequency $\omega / \omega_{\theta=0}$ and temperature rise $(b/d)^2 \alpha \Theta$.

(2) 熱座屈

Fig. 4, 5は、臨界温度 $(b/d)^2 \alpha \Theta_{cr}$ と縦横比 λ の関係を単純支持および固定についてそれぞれ示してあ

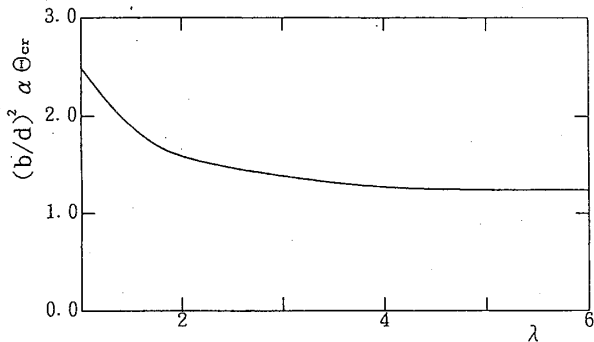


Fig. 4 Relation between thermal buckling coefficient and aspect ratio: simply supported edges.

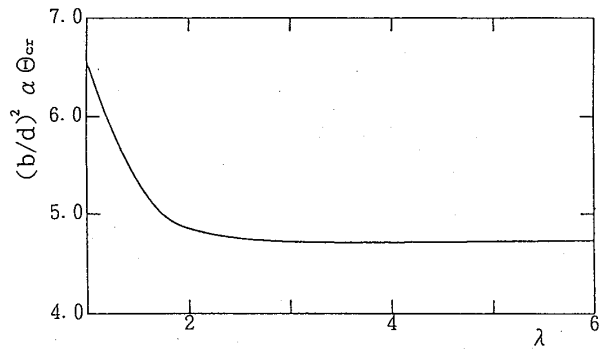


Fig. 5 Relation between thermal buckling coefficient and aspect ratio: clamped edges.

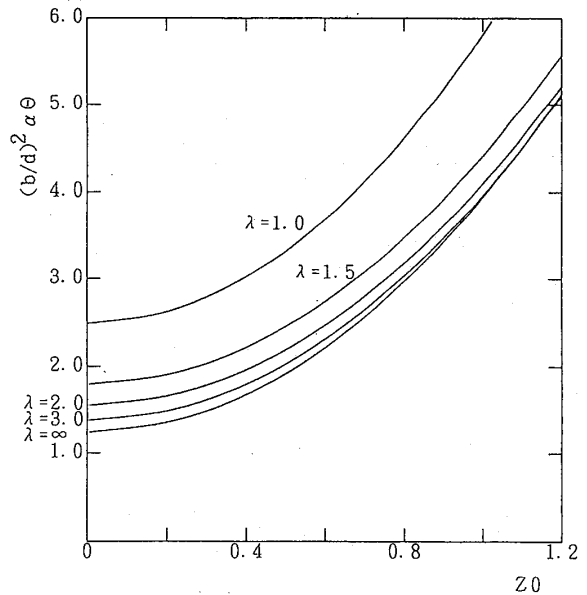


Fig. 6 Relation between temperature rise and deflection of plate: simply supported edges.

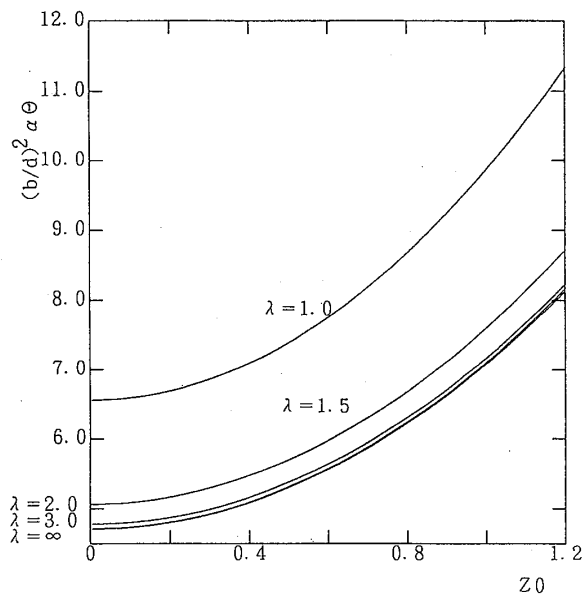


Fig. 7 Relation between temperature rise and deflection of plate: clamped edges.

る。臨界温度 $(b/d)^2 \alpha \theta_{cr}$ を単純支持と固定の場合とを比較してみると固定の方が高い。これは、固定の方が構造物の剛性が高いため座屈荷重が大きいためと考えられる。臨界温度は、ある程度の縦横比を越えると一定となる。これは、縦横比が増加すると平板の剛性が $y=0, b$ の間の長さで決まってしまうためである。

温度 $(b/d)^2 \alpha \theta$ と座屈後の平板中央のたわみ z_0 (θ) との関係は式(7)より求められ、単純支持および固定の場合はそれぞれ Fig. 6, 7 に示される。縦軸 $(b/d)^2 \alpha \theta$ は無次元温度、横軸 z_0 は板厚 d でたわみを無次元化した無次元変位である。線形問題では座屈すると平板のたわみ $z_0(\theta)$ は無限大となる。しかし、2次、3次の非線形項があるとたわみは有限な大きさとなる。温度が上昇するとともに平板のたわみが大きくなり、温度とたわみの関係は非線形となる。

(3) 非線形振動

Fig. 8, 9, 10, 11は、座屈前の場合の縦横比 $\lambda=1.0, 3.0$ の時の非線形振動数と振幅の関係を温度をパラメータにして、単純支持および固定の場合についてそれぞれ示したものである。縦軸 $\omega/\omega_{\theta=0}$ は、非線形振動数 ω を縦横比 $\lambda=1.0$, 温度 $(b/d)^2 \alpha \theta = 0$ の場合の振動数 $\omega_{\theta=0}$ で無次元化した無次元振動数、横軸 a_1 は板厚 d で無次元化した無次元振幅である。図中より、座屈前では振幅が増加すると無次元振動数が増加する。振幅の振動数に与える影響は温度パラメータが増加すると大きくなる。逆に冷却すると振動数は上昇するが、

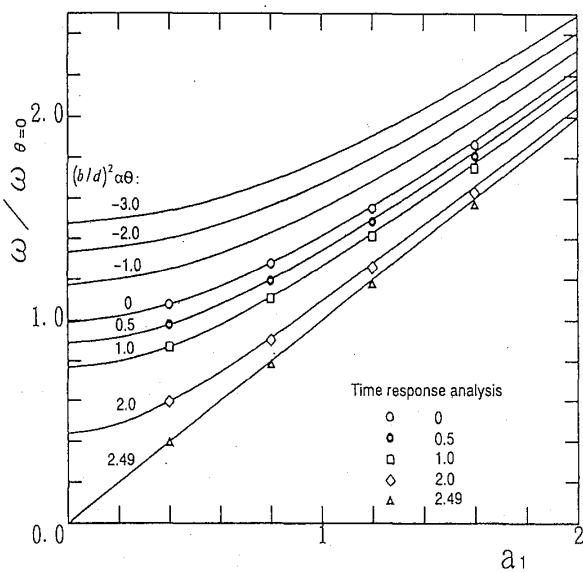


Fig. 8 Influence of large amplitude on frequency of plate, simply supported edges: $\lambda=1.0$ and prebuckling state.

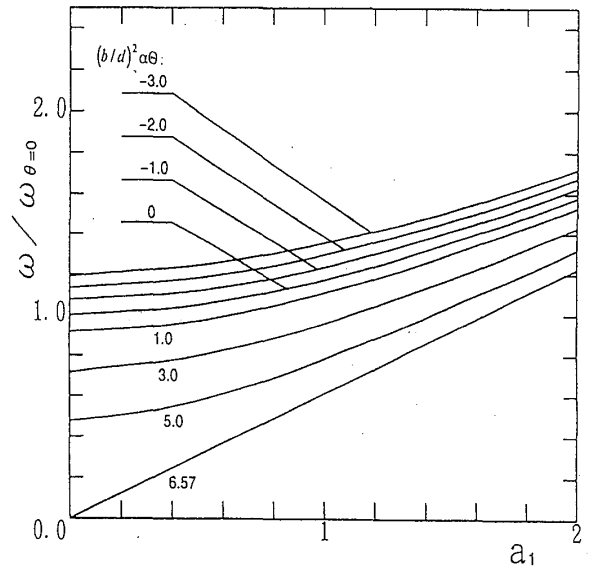


Fig. 9 Influence of large amplitude on frequency of plate, clamped edges: $\lambda=1.0$ and prebuckling state.

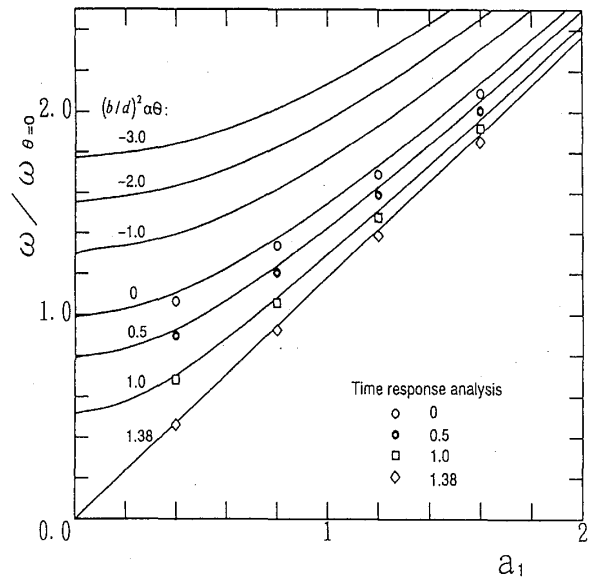


Fig. 10 Influence of large amplitude on frequency of plate, simply supported edges: $\lambda=3.0$ and prebuckling state.

当然熱座屈は生じない。振幅の振動数に及ぼす影響は振幅が大きくなると効いてくる。これは、振幅が大きくなると線形項に比べ非線形項が効いてくるためこのような現象が見られると考えられる。Fig. 6には、Runge-Kutta-Gill法によって得られたシミュレーション結果を記入している。解析解と数値解の両者は一致している。また、既往の解析結果ともよく一致することを確かめている。

Fig. 12, 13は $\lambda=1.0$ のときの座屈後の単純支持およ

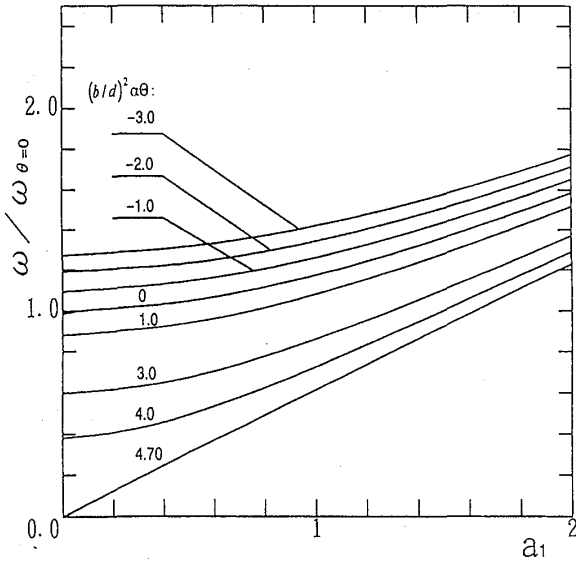


Fig.11 Influence of large amplitude on frequency of plate, clamped edges: $\lambda=3.0$ and prebuckling state.

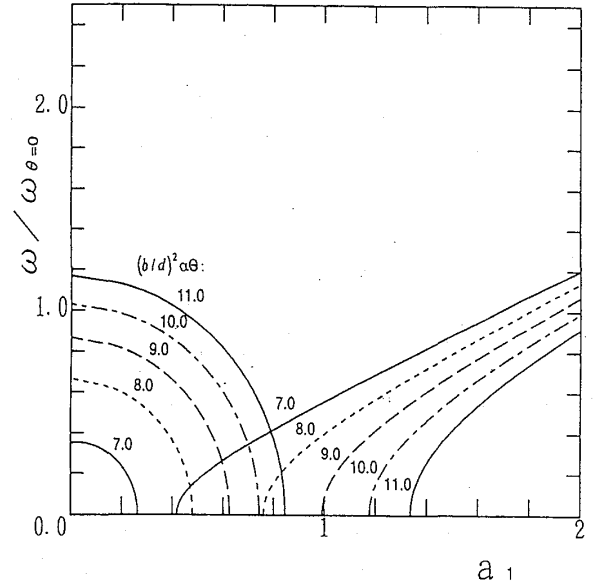


Fig.13 Influence of large amplitude on frequency of plate, clamped edges: $\lambda=1.0$ and postbuckling state.

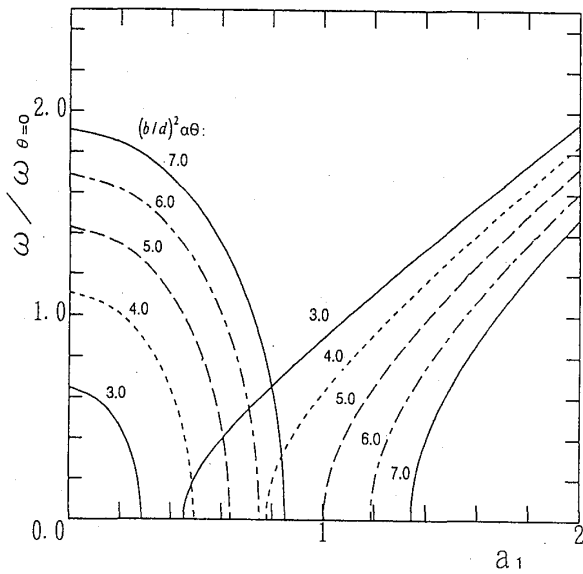


Fig.12 Influence of large amplitude on frequency of plate, simply supported edges: $\lambda=1.0$ and postbuckling state.

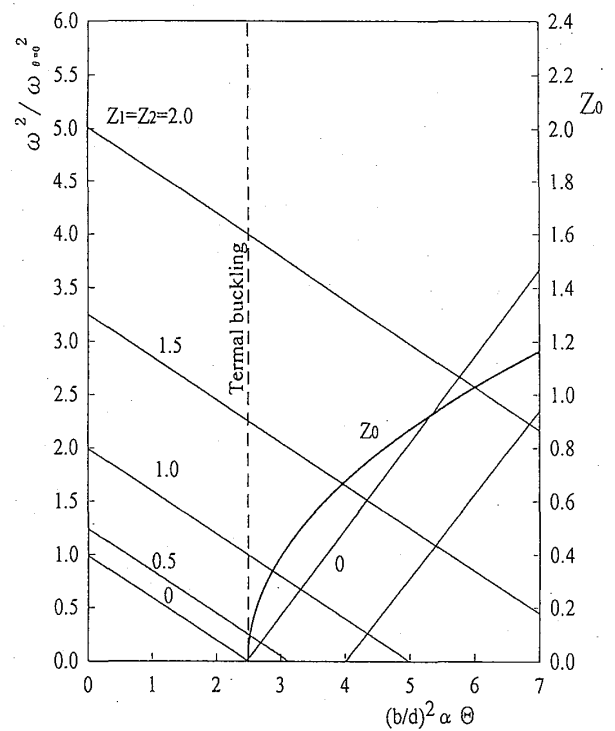


Fig.14 Variation of frequency with temperature rise and large amplitude: simply supported edges and $\lambda=1.0$.

び固定の場合の振動特性を示している。縦軸と横軸は先程と同様にとってある。図中より1つの温度に対して2個の解が出てくる。これは、座屈前には、静的解が値を持たなかったが、座屈後には値を持つてくるためこのような結果が得られたと考えられる。第1の解の上に乗っている間は振幅を増加するにしたがって、振動数は小さくなり最終的には0となる。つまり、軟化バネ特性を示す。振動数が0となった後も再び振幅を増加していくと逆に振動数は増加する傾向が見られ

る。この中間の振幅では、振動数を生じない領域が存在するため、自由振動の存在しない領域があると考えられる。温度が増加すると、第1の解の振幅および振動数はともに増加する傾向が見られる。また、第2の解の振幅の振動数に与える影響は大きくなる傾向が見

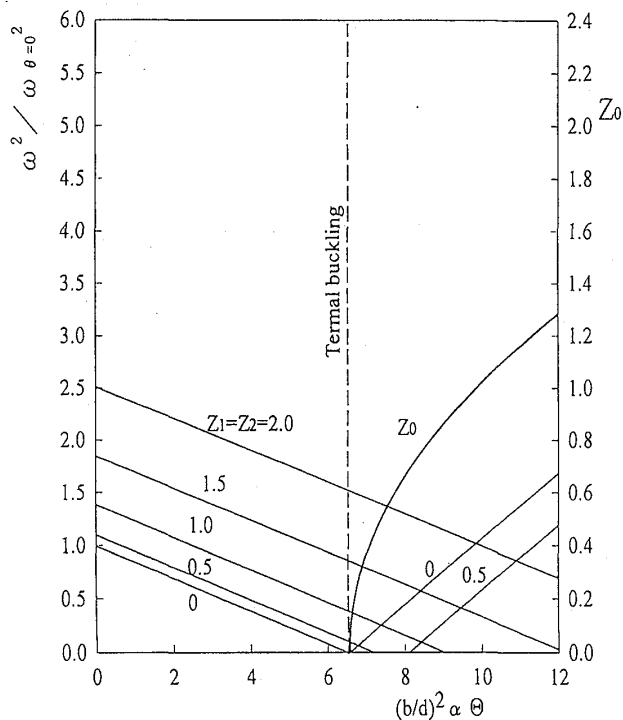


Fig.15 Variation of frequency with temperature rise and large amplitude: clamped edges and $\lambda=1.0$.

られる。

Fig.14, 15は、座屈前後の振動数と振幅の関係を用いて、振動数と温度パラメータの関係を振幅をパラメータとして示している。縦軸 $\omega^2 / \omega_{\theta=0}^2$ は振動数 ω の2乗を縦横比 $\lambda=1.0$ 、温度 $(b/d)^2 \alpha \theta$ の時の振動数 $\omega_{\theta=0}$ の2乗で無次元した無次元振動数、横軸 $(b/d)^2 \alpha \theta$ は温度を示してある。Fig.14, 15から、振幅が0の場合、熱座屈前では温度パラメータが増加すると振動数は減少していき、臨界温度で0となる。臨界温度後は、温度パラメータが増加すると、振動数は増加する。振幅が有限振幅として取り扱えることができる場合、つまり非線形の時には、前の結果と同様に振動数の存在しない温度領域が存在することがわかった。また、この自由振動の存在しない温度領域は振幅を増加するにしたがって広がっていく傾向が見られる。しかし、振幅が微小振幅として取り扱える場合、

つまり線形の時、この温度領域は存在しない。したがって、非線形振動の場合、振動数の存在しない温度領域が存在するが、線形振動では存在しないことが明らかとなった。

5. まとめ

本研究では、温度変化を受ける長方形板の振動および座屈挙動を非線形性を考慮して明らかにしたものである。これにより、振動特性および座屈特性に及ぼす温度、境界条件、縦横比および振幅の影響を明らかにした。

本研究で明らかになったことを以下にまとめる。

- (1) 調和バランス法を用いた解析結果は既往の摂動法や数値シミュレーション結果とよく一致する。
- (2) 温度が上昇すれば、長方形板の固有振動数が減少し、臨界温度で座屈によって0になる。
- (3) 臨界温度は、縦横比によって変化する。臨界温度は、固定の場合が単純支持より高い。
- (4) 臨界温度より温度が上昇すると平板にたわみが生じ、温度とたわみの関係は非線形となる。
- (5) 非線形振動数は振幅の増大とともに増大する。非線形振動では熱座屈を起こした平板も振動する。また、非線形振動の場合、座屈後に自由振動が存在しない温度領域が存在する。

本研究によって、調和バランス法による解析が有効なことが示された。引き続き、長方形板を多自由度系で近似する予定でいる。

数値計算には、長崎大学の情報処理センターのFACOM VP-1200を使用したことを付記する。

参考文献

- 1) 砂川 恵：長方形平板の自由振動特性に及ぼす温度変化および振幅の影響，日本機学会論文集（第1部），30巻，212号，pp.558～566，1964
- 2) 砂川 恵：空力加熱による矩形平板の熱変形（四辺固定の場合），日本航空学会誌，第9巻，第85号，pp.37～42，1961