弾性支持される変断面片持ち長方形板の振動，座屈および動的安定性

高橋和雄*・古谷寿章**

Vibration, Buckling and Dynamic Stability of a Non-Uniform Rectangular Cantilever Plate with Elastic End Support

by

Kazuo TAKAHASHI* and Hisaaki FURUTANI**

Vibration , buckling and dynamic stability of a non-uniform rectangular cantilever plate with elastic end support are studied. Vibration and buckling problems are solved by Rayleigh-Ritz method. Dynamic stability is solved by Hamilton method and the harmonic balance method. The effects of non-uniform parameter and the stiffness of the elastic end support are discussed.

1．まえがき

はりや平板の動的安定性の研究はこれまで数多く行われ，解法および現象も明確になってきている。しかし，動的安定性の汎用的な解法がないため，不安定領域が単純共振しか得られていないことや，解析の自由度が限定されていることなど不十分な点が認められる。このため，複雑な構造特性をもつ構造部材の動的安定性は十分に解析されていない。最近，動的不安定領域の解析の新しい手法の開発[1]や計算機の活用によって複雑な構造特性を解析することが可能になりつつある。弾性拘束，変断面を考慮した構造部材の動的安定性の研究として，Kar による自由端で弾性支持された変断面片持ちばりの解析[2]がある。Kar は，Bolotin の方法[3]を用いて単純共振のみを求めている。しかし，動的不安定現象が生じるような片持ちばりは薄肉材であることから，はりに断面変形が生ずることが予想される。したがって，平板として解析することがより適切である。

そこで，本論文では境界部で弾性拘束を受ける変断面長方形板の動的安定を明らかにする。Kar によって提案された問題を平板に拡張する。自由辺を含む平板を解析する場合，幾何学的境界条件と力学的境界条件を満足する座標関数を仮定することは不可能であるため，平板の運動方程式を Galerkin 法を用いて解析することは無理である。本論文では，幾何学的境界条件のみを満足する座標関数を用いて解が得られるエネルギー法[4]に基づく Rayleigh-Ritz 法を用いて固有振動形を得る。次いで，得られた固有振動形を用いて，Hamilton の原理に基づいて，時間に関する係数励振振動型の運動方程式に変換する手法を採用する。動的安定解析には，Bolotin の方法で得られない結合共振も得られる解法[1]を採用し，動的不安定領域の全体像を得る。解析にあたっては，変断面長方形板の固有振動，座屈および動的不安定領域に及ぼす変断面，弾性支持などの各種のパラメータの影響を明らかにする。

弾性支持される変断面長方形板の動的安定性では，自由辺に Kar が仮定した鉛直バネ[2]の他に回転バネを設定する。これにより，自由辺でのたわみを抑制す

平成７年４月２８日受理
*社会開発工学科　(Depertment of Civil Engineering)
**日立造船(株)　(Hitachi Zosen Co.)

ると同時にたわみ角を抑制する。

数値解析において，弾性支持される変断面長方形板の固有振動特性，座屈特性および動的不安定領域を，変断面およびバネに関する無次元パラメータのもとに明らかにする。

2．解法

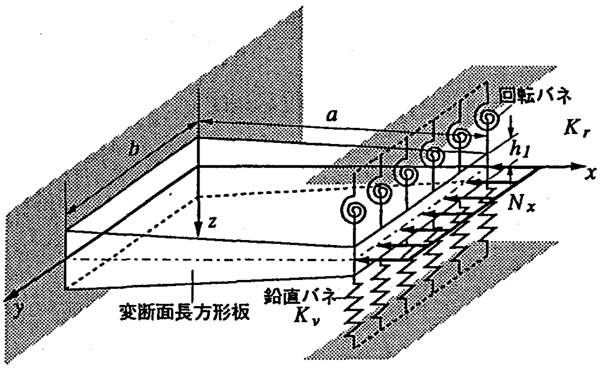


Fig. 1　Geometry of plate

Fig. 1 に示すような，自由辺で弾性支持された変断面長方形板が，x方向に一様分布の静的面内力 N_{xo} と変動面内力 $N_{xt}\cos\Omega t$ を受ける場合を考える。本研究で特に用いた仮定は，次のとおりである。

(1)　基本的仮定

本研究で用いる変断面長方形板は薄板と仮定するので，板厚方向（z方向）の応力成分を無視する。

長方形板の板厚はx方向に線形的に変化し，y方向に対しては一定である

(2)　Hamilton の原理による解法

弾性支持される変断面長方形板のひずみエネルギーVは，変断面長方形板の曲げによるひずみエネルギー[6]，鉛直バネおよび回転バネのひずみエネルギーから構成される。したがって，本研究では，ひずみエネルギーVを次のように定義する。

$$V(\mathrm{w})=\frac{1}{2}\int_0^b\int_0^a D\left\{(\nabla^2 w)^2-2(1-\nu)\left[\frac{\partial^2 w\partial^2 w}{\partial x^2\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)^2\right]\right\}dxdy+\frac{K_v}{2}\int_0^b w(a,y)^2dy+\frac{K_r}{2}\int_0^b\left(\frac{\partial w(a,y)}{\partial x}\right)^2dy \tag{1}$$

ここに，w：たわみ，$D(x)=Eh(x)^3/12(1-\nu^2)$：板剛度，E：ヤング率，$h(x)$：板厚，ν：ポアソン比，$\nabla^2=(\partial^2/\partial x^2+\partial^2/\partial y^2)$，$K_v$：鉛直バネ定数，$K_r$：回転バネ定数，x，y：平板中央面の座標系．

変断面長方形板の運動エネルギーTと面内力による仕事Uは，次のように与えられる。

$$T(w)=\frac{\rho}{2}\int_0^b\int_0^a h\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2dxdy \tag{2}$$

$$U(w)=-\frac{N_x}{2}\int_0^b\int_0^a\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2dxdy \tag{3}$$

ここに，ρ：板の密度，$N_x=N_{xo}+N_{xt}\ \cos\Omega t$：面内力（圧縮を正とする），$N_{xo}$：静的面内力，$N_{xt}$：変動面内力の振幅，$\Omega$：変動面内力の円振動数，t：時間.

一般解を次のように仮定する。

$$w=\sum_{m=1}\sum_{n=1}T_{mn}(t)W_{mn}(x,y) \tag{4}$$

ここに，T_{mn}：未知の時間関数，W_{mn}：境界条件を満足する座標関数．本研究では，面内力を受けない，弾性支持された変断面長方形板の固有振動形を用いる（Appendix A）。

一般座標に関する運動方程式を誘導するために，Hamilton の原理を用いる。すなわち，

$$\delta\int_{t_1}^{t_2}Ldt=\delta\int_{t_1}^{t_2}\left\{T-(V-U)\right\}dt=0 \tag{5}$$

ここに，$\delta T_{mn}(t_1)=\delta T_{mn}(t_2)=0$．

次に，式(5)の変分を行い，部分積分してまとめると，次式が得られる。

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{T}_{kl}}\right)+\frac{\partial V}{\partial T_{kl}}-\frac{\partial U}{\partial T_{kl}}=0\ (k,\ l;1,\ 2,\ \cdots,\ N) \tag{6}$$

式(6)に式(1)，(2)，(3)を代入し，偏微分した後，x，y座標，時間 t および面内力 N_x に関して無次元化すると，一般座標に関する運動方程式が得られる。

$$\sum_{m=1}\sum_{n=1}\sum_{k=1}\sum_{l=1}\left[C_{mn}^{kl}\ddot{T}_{mn}+\left\{\frac{1}{K_{11}^4}A_{mn}^{kl}-\frac{\lambda_b\pi^2}{K_{11}^4}(\bar{N}_{xo}+\bar{N}_{xt}\cos\bar{\omega}\tau)B_{mn}^{kl}\right\}T_{mn}\right]=0 \tag{7}$$

ここに，$\lambda_b=N_{cr}b^2/D_1\pi^2$：座屈固有値，$D_1$，$h_1$，：$x=a$ での板剛度，板厚，$K_{11}^4=\rho h_1\omega_{11}^2b^4/D_1$：弾性支持された一様断面正方形板の1次振動固有値，$\bar{\omega}=\Omega/\omega_{11}$，$\omega_{11}$：一様断面正方形板の1次振動の固有円振動数，$\bar{N}_{x0}=N_{x0}/N_{cr}$：無次元静的面内力，$\bar{N}_{xt}=N_{xt}/N_{cr}$：無次元変動面内力の振幅，$N_{cr}$：座屈荷重，$\tau=\omega_{11}t$，$\tau$：無次元時間，$A_{mn}^{kl}$，$B_{mn}^{kl}$，$C_{mn}^{kl}$（*Appendix B*）．

式(7)を行列表示すると，次式になる。

$$[C]\{\ddot{T}\}+[A]\{T\}+(\bar{N}_{x0}+\bar{N}_{xt}\cos\bar{\omega}\tau)[B]\{T\}=\{0\} \tag{8}$$

$$[C]:C\{l+(k-1)L,\ n+(m-1)L\}C_{mn}^{kl},$$

$$[A]:A\{l+(k-1)L,\ n+(m-1)L\}=\frac{1}{K_{11}^4}A_{mn}^{kl},$$

$$[B]:B\{l+(k-1)L,\ n+(m-1)L\}=\frac{\lambda_b}{K_{11}^4}B_{mn}^{kl},$$

式(8)に，[C] の逆行列 $[C]^{-1}$を左側から掛けると次式になる。

$$[I]\{\ddot{T}\}+[F]\{T\}+(\bar{N}_{x0}+\bar{N}_{xt}\cos\bar{\omega}\tau)[G]\{T\}=\{0\} \tag{9}$$

ここに，$[F]=[C]^{-1}[A]$，$[G]=[C]^{-1}[B]$.

式(9)は連立の *Mathieu* の方程式である。式(9)において行列 [I]，[F] および [G] の性質を調べると，[I] は単位行列，[F] は対角線に固有円振動数の2乗が並んだ対角行列である。行列 [G] は零要素を多く含んでいる係数励振行列である。したがって，行列 [G] の行と列の並び換えを行えば，いくつかの非零要素からなる小行列に分割することができる。

本題の長方形版の場合，行列 [G] の要素のうち，半分は0である。時間関数 {T} の順番を並び替えることにより，行列 [G] の要素を零と非零のグループにまとめる。

このときの並び替えによって，行列 [I] と [F] も対角行列になるので，式(9)は2つに分割することができる。いま，小行列 $[G_1]$ と $[G_2]$ の大きさが同じになるように時間関数 {T} の要素を選ぶと，式(9)は次のように分割される。

$$[I]\{\ddot{T}_i\}+[F_i]\{T_i\}+(\bar{N}_{xo}+\bar{N}_{xt}\cos\bar{\omega}\tau)[G_i]\{T_i\}=\{0\} \tag{10}$$

$$\{T_1\}=\{T_{11}T_{21}T_{13}T_{23}T_{31}T_{33}T_{41}T_{15}\}^T,$$
$$\{T_2\}=\{T_{12}T_{22}T_{14}T_{32}T_{24}T_{42}T_{34}T_{16}\}^T,\ i=1,2.$$

上式において，$\{T_1\}$ はy方向の変形がy＝b／2に対して対称な固有振動形をもつ自由度によって構成される。$\{T_2\}$ はy方向の変形がy＝b／2に対して逆対称な固有振動形をもつ自由度によって構成される。時間関数 T_{ij} のサフィックスiはx方向の振動波形の次数を意味し，片持ちはりの振動次数に対応する。サフィックスjはy方向の振動波形の次数を意味し，j＝1は両端自由はりの並進剛体モード，j＝2は回転の剛体モードに対応し，j≧3は両端自由はりの曲げ振動の（j-2）次の振動次数に対応する。したがって，y方向の振動次数が偶数，奇数となるような結合共振が発生する。

以上の処理によって計算自由度を減らすことができ，かつ不安定領域の種類の判定を容易にすることができる。

縮小された式(10)の一般解を，次のようにフーリエ級数を使って仮定する。

$$\{T\}=e^{\lambda\tau}\left\{\frac{1}{2}\mathbf{b}_0+\sum_{k=1}(\mathbf{a}_k\sin k\bar{\omega}\tau+\mathbf{b}_k\cos k\bar{\omega}\tau)\right\} \tag{11}$$

ここに，λ:未定定数，$\mathbf{b}_0$，$\mathbf{a}_k$，$\mathbf{b}_k$:未知のベクトル.

式(11)を式(10)に代入し調和バランス法を適用すると，以下の様な代数方程式が与えられる。

$$([M_0]-\lambda[M_1]-\lambda^2[M_2])\{X\}=\{0\} \tag{12}$$

ここに，$[M_0]$，$[M_1]$，$[M_2]$: 係数行列，

$$\{X\}=\{\mathbf{b}_0\mathbf{b}_1\mathbf{b}_2\cdots\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2\cdots\}^T$$

いま，$\{Y\}=\lambda\{X\}$ なる新しいベクトルを代入すれば，式(12)は2倍サイズの固有値問題に変換される[1]。

$$\begin{bmatrix}[0] & [I]\\ [M_2]^{-1}[M_0] & -[M_2]^{-1}[M_1]\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}X\\Y\end{Bmatrix}=\lambda\begin{Bmatrix}X\\Y\end{Bmatrix} \tag{13}$$

3．計算パラメータ

$x=a$ での板剛度 D_1，板厚 h_1を用いると，断面内のx点における諸値は次のように設定される[2]。

$$h(\xi)=h_1\{1+\beta^*(1-\xi)\}=h_1G(\xi),$$
$$D(\xi)=D_1\{1+\beta^*(1-\xi)\}^3=D_1G(\xi)^3,\ \xi=x/a.$$

ここに，$G(\xi)$:ξ の関数.

変断面パラメータ β^* の存在によって板厚は増大する。長方形板の縦横比を $\beta=a/b$ とし，弾性拘束を表す定数としては，無次元鉛直バネ定数 $k_v=K_vb^3/D_1$，無次元回転バネ定数 $k_r=K_rb/D_1$ を用いる（Appendix A)。

4．固有振動特性

(1)　収束性の検討

数値解析の前に，本解法の解の収束性を検討する。自由辺 $x=a$ で鉛直バネのみによって弾性支持されている場合（$k_v=10^7$，$k_r=0.0$）は，一辺固定他辺単純支持，他対辺自由の正方形板（Fig.2（a））の固有振動数と比較する。鉛直バネおよび回転バネによって弾性支持されている場合（$k_v=k_r=10^7$）は，二辺固定他対辺自由の正方形板（Fig.2（b））の固有振動数と比較する。

なお，以後の比較検討が容易となるように，鉛直バネのみが存在する場合を CASE A，鉛直バネと回転バネの両方が存在する場合を CASE B とする。

Fig. 2は，それぞれ CASE B（$k_v=k_r=10^7$）の場合の，一様断面正方形板の固有振動数の収束状況を表す。縦軸λ_i^2は正方形板の固有振動数を表し，横軸Nは項数を表す。図中に引かれた点線は，文献5）による近似解である。CASE Aは $x=a$ の辺が単純支持の場合とよく一致しているが，CASE Bは $x=a$ の辺が

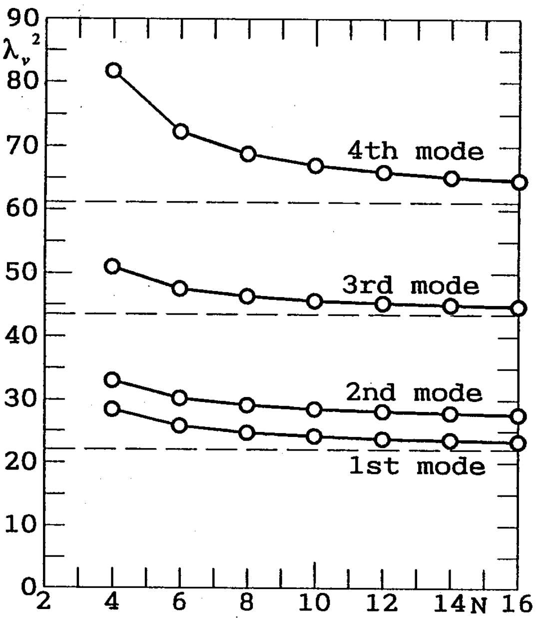


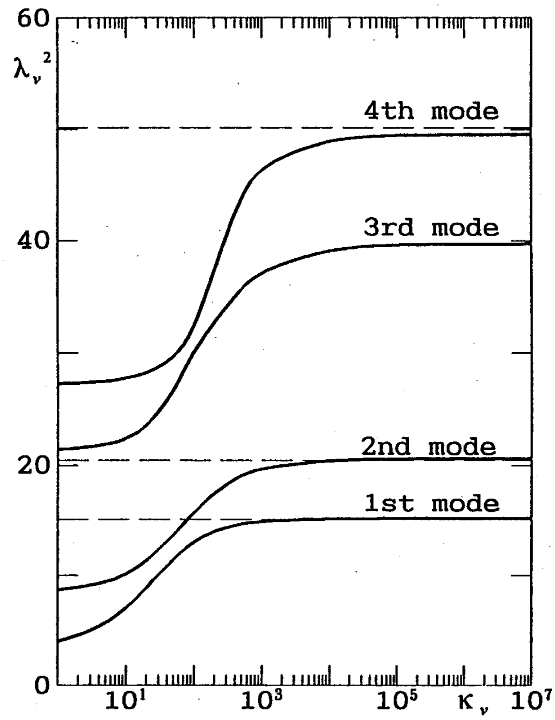
Fig. 2　Convergence of solution: $\beta=1.0$ and $\beta^*=0.0$

固定の場合と5～6％の差が見受けられる。これは，本研究で採用している試行関数の精度上の問題であり，自由辺 $x=a$ でのたわみとたわみ角を同時に定義することは無理なためである。このように精度上の問題が存在するが，以後の計算には項数 $N=16$の値を使用する。

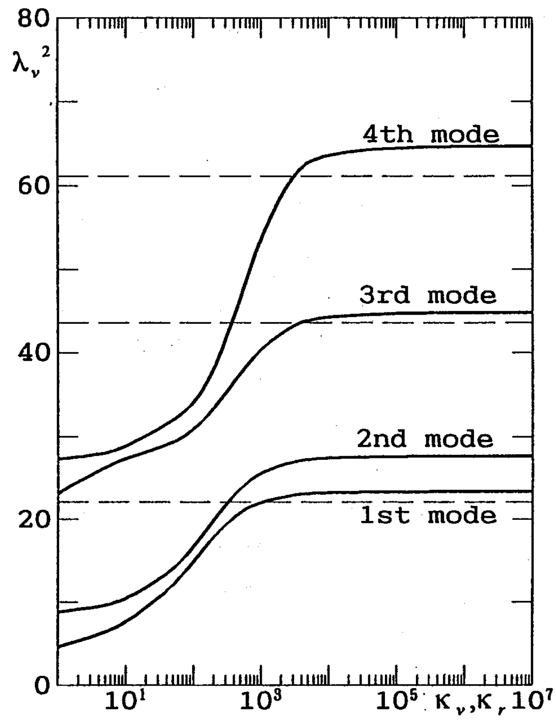
（2）　鉛直バネおよび回転バネの影響

Fig. 3（a），（b）は境界条件がCASE A，CASE Bの場合の一様断面片持ち正方形板（$\beta=1.0, \beta^*=0.0$）の固有振動数に対する鉛直バネおよび回転バネの影響を表したものである。両図の縦軸 λ_ν^2 は固有振動数である。横軸は Fig.3（a）が無次元鉛直バネ定数 k_ν で，Fig.3（b）が無次元鉛直バネ定数 k_ν および無次元回転バネ定数 k_r である。図中に引かれた点線は，文献11）による $x=a$ が単純支持（$k_\nu=\infty$，$k_r=0$ に相当）の固有振動数と，$x=a$ が固定（$k_\nu=\infty$，$k_r=0$ に相当）の固有振動数である。CASE A，CASE Bともにバネ定数の増大に伴い，固有振動数は一定値に収束していく。従って，本論文では固有振動数が収束したとみなされる，$k_\nu=10^7$，$k_r=10^7$ を以後の解析に使用する。

バネ定数が一様断面正方形板（$\beta=1.0$，$\beta^*=0.0$）の固有振動形に与える影響を Fig.4（a），（b）に示す。両図は正方形板の1次の固有振動形を $y=b/2$ の断面で切り取ったものである。両図の縦軸は，最大たわみで無次元化したたわみWで，横軸は長方形板の断面方向の座標ξである。Fig.4（a）は CASE Aの場合で，Fig.4（b）は CASE Bの場合である。無次元鉛直バネ定数 k_ν あるいは無次元回転バネ定数 k_r の値が増加していくに従い，CASE Aの場合は一端固定他端単純支持，他対辺自由の正方形板の固有振動形に漸近し，CASE Bの場合は二辺固定，他対辺自由の正方形板の固有振動形に漸近していく。



(a) CASE A

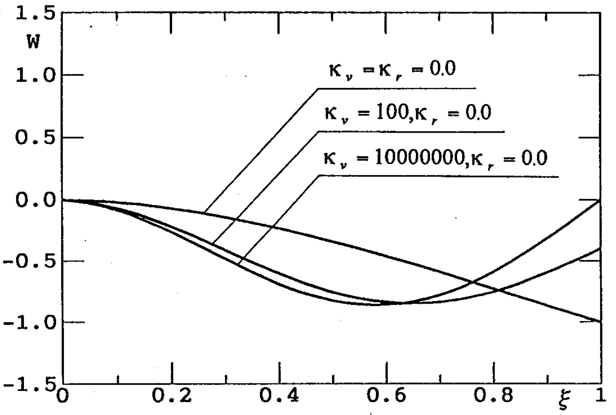


(b) CASE B

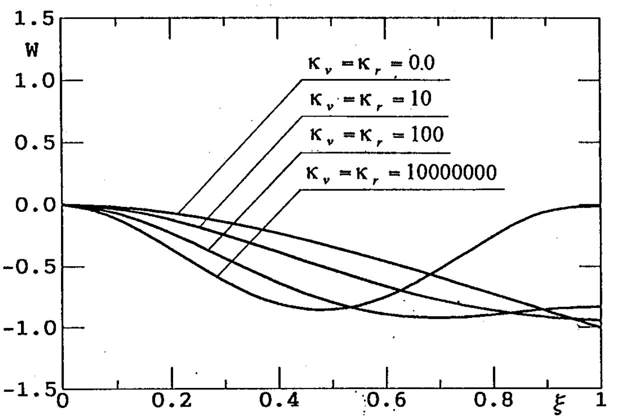
Fig. 3　Natural frequencies of the plate: $\beta=1.0$ and $\beta^*=0.0$

（3）　変断面パラメータの影響

変断面パラメータ β^* が固有振動形に与える影響を，Fig. 5 に示す。Fig. 5 も Fig. 4 と同様に，1 次の

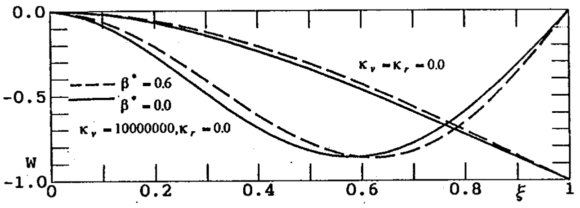


(a) CASE A

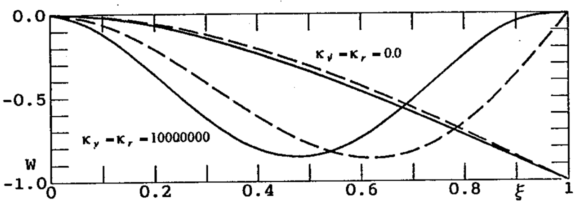


(b) CASE B

Fig. 4　Vibration mode of the uniform plate ($\beta=1.0$ and $\beta^*=0.0$)



(a)$\beta=1.0$, $k_\nu=10^7$ and $k_r=0.0$



(b)$\beta=1.0$, $k_\nu=k_r=10^7$

Fig. 5　Vibration mode of the non-uniform plate

固有振動形を $y=b/2$ の断面で切り取ったものである。Fig.5（a）は，片持ち正方形板（$k_\nu=k_r=0.0$）と CASE A の場合の正方形板（$k_\nu=10^7$，$k_r=0.0$）の固有振動形を，一様断面（$\beta^*=0.0$）と変断面（$\beta^*=0.6$）の場合に対して描いたものである。図の縦軸 W は最大たわみで無次元化したたわみで，横軸 ξ は平板の断面方向の座標である。図中の実線は変断面パラメータを考慮しない場合（$\beta^*=0.0$）の固有振動形で，点線は考慮した場合（$\beta^*=0.6$）の固有振動形である。平板が変断面になると，$k_\nu=10^7$，$k_r=0.0$ のときの振動形の腹が板厚の薄い方に移動している。Fig.5（b）は，正方形板 $k_\nu=k_r=0.0$）と CASE B の場合の正方形板（$k_\nu=10^7$，$k_r=0.0$）の固有振動形を，一様断面（$\beta^*=0.0$）と変断面（$\beta^*=0.6$）の場合に対して描いたものである。Fig.5（a）と同様に，$k_\nu=k_r=10^7$）のときの板厚の薄い方へ固有振動形の腹が移動している。

5．座屈特性

Fig.6は，$x=a$ で弾性支持された，変断面片持ち長方形板の座屈曲線を示す。3 本の曲線は，おのおの鉛直バネがある場合（$k_\nu=10$，$k_r=0.0$），鉛直バネと回転バネがある場合（$k_\nu=k_r=10$）およびバネなしの場合（$k_\nu=k_r=0.0$）を示す。鉛直バネおよび回転バネにより，長方形板の剛性が増大するため，座屈固有値 λ_b は増大する。

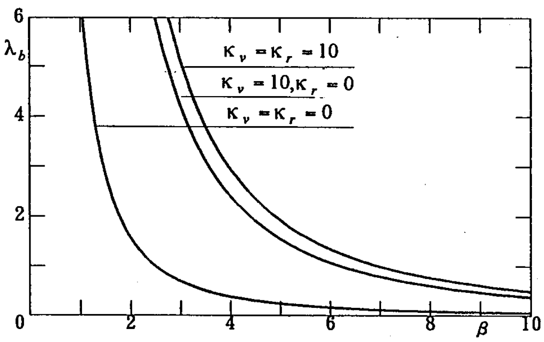


Fig. 6　Buckling curves: $\beta^*=0.6$

6．動的不安定領域

Fig. 7 に，$x=a$ で弾性支持された変断面正方形板（$\beta=1.0$，$\beta^*=0.6$，$k_\nu=50$，$k_r=0.0$）の動的不安定領域を示す。図の縦軸 $\bar{N}_{xt}$ は無次元変動面内力の振幅で，横軸 $\bar{\omega}$ は静的面内力 $\bar{N}_{x0}=0.0$ の時の 1 次の固有円振動数で無次元化した無次元励振振動数である。図中の不安定領域は，$\bar{N}_{xt}=0.5$ の時の励振振動数 $\bar{\omega}$ の幅が 0.1 以上のものをプロットしている。不安定領域には単

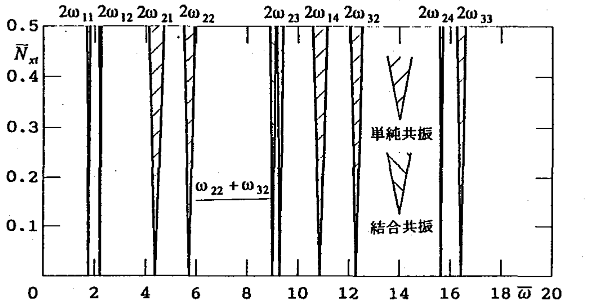


Fig. 7 Unstable regions: $\beta=1.0$ and $\beta^*=0.6$, $k_\nu=50$ and $k_r=0.0$

純共振の主不安定領域（$2\omega_{ij}/k;k=1$）と結合共振の主不安定領域 $\{(\omega_{ij}+\omega_{mn})/k;k=1\}$ があり，両者の副不安定領域は不安定領域幅が狭いため本論文では省略する。発生する不安定領域のほとんどが主不安定領域であり，不安定領域幅も結合共振のそれと比較して広い。

（1） 変断面パラメータの影響

Fig. 8 は，自由辺 $x=0$ で弾性支持された変断面正方形板（$\beta=1.0$，$\beta^*=0.6$，$k_\nu=50$，$k_r=0.0$）の不安定領域と変断面パラメータ β^* の関係を示す。変断面パラメータの増大に従い，不安定領域幅の発生域が高くなる。またその幅は，わずかながら狭くなる。

（2） 鉛直バネの影響 Fig.9に，鉛直バネ k_ν の変化による不安定領域変動図を示す。縦軸 $\bar{\omega}$ は無次元励振振動数である。鉛直バネ k_ν の増大に伴い固有振動数が増加し，それと同時に不安定領域の発生域が高くなる。しかし，$k_\nu=0.1$ と $k_\nu=10^7$（$k_\nu=\infty$ に相当）の場合では片持ち長方形板の剛性が著しく異なり，長方

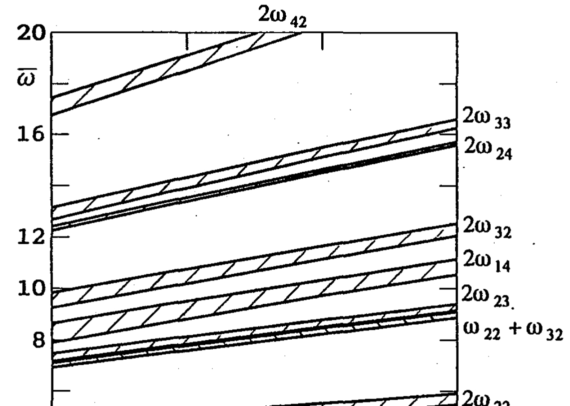


Fig. 8 Unstable regions: $\beta=1.0$, $k_\nu=50$ and $k_r=0.0$

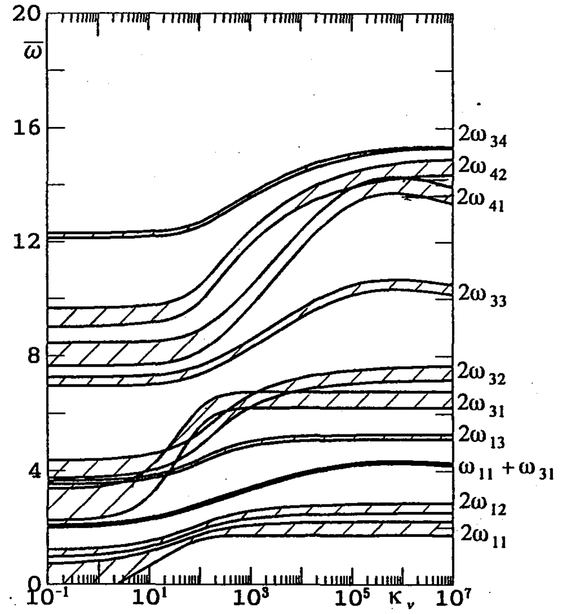


Fig. 9 Unstable regions: $\beta=1.0$，$\beta^*=0.0$ and $k_r=0.0$

形板の固有振動形も変化する。したがって，不安定領域は Fig. 9 のような複雑な変化を示す。

7．まとめ

本研究は，自由辺で弾性支持された変断面長方形板の固有振動特性，座屈特性および動的安定性を Rayleigh–Ritz 法と調和バランス法を用いて明らかにしたものである。本論文によって，変断面パラメーター，鉛直ばねおよび回転パラメーターの影響を明らかにすることができた。

本研究の数値計算には長崎大学総合情報処理センターの電子計算機FACOM VP-1200モデル10を使用したことを付記する。

Appendix A Ritz 法による固有振動解析および座屈解析

式（1）および（3）より全ポテンシャルエネルギーWは以下のようになる。

$$W(w)=V(w)-U(w) \qquad (A-1)$$

固有振動および座屈解析のために，上式（$A-1$）において $N_{xt}=0$ とする。次いで，式（$A-1$）の一般解を次のように仮定する。

$$w=\sum_{m=1}\sum_{n=1}A_{mn}h_m(\xi)\bar{h}_n(\eta)e^{i\omega t} \qquad (A-2)$$

ここに，h_m，$\bar{h}_n$:はりの固有振動形（Appendix C），A_{mn}:未定定数，ω：固有円振動数．

無次元化した式（$A-1$）に式（2）および式

（$A-2$）を代入し，Ritz 法を適用すると次式が得られる。

$$\sum_{m=1}\sum_{n=1}\sum_{m=1}\sum_{s=1} A_{mn}(E_{mrns}-\lambda_\nu^4 F_{mrns}-\bar{N}_{x0}G_{mrns})=0 \quad (A-3)$$

ここに，

$$E_{mrns}=\frac{1}{\beta^4}I^2_{mr}\bar{I}^1_{ns}+\frac{\nu}{\beta^2}(I^3_{mr}\bar{I}^2_{ns}+I^4_{mr}\bar{I}^3_{ns})+I^1_{mr}\bar{I}^5_{ns}+\frac{2(1-\nu)}{\beta^4}I^5_{mr}\bar{I}^4_{ns}+\frac{\kappa_r}{\beta}I^7_{mr}\bar{I}^1_{ns}+\frac{\kappa_r}{\beta^3}I^9_{mr}\bar{I}^1_{ns},$$

$$G_{mrns}=\frac{1}{\beta^2}I^8_{mr}\bar{I}^1_{ns},\quad F_{mrns}=I^6_{mr},\quad \bar{I}^1_{ns},\ \mathrm{I}^1_{mr},\ I^2_{mr},\ \cdots$$

：固有関数の定積分（Appendix C）(m,n,r,s=1,2,・・,N).

ここに，$k_\nu=K_\nu b^3/D_1$：無次元鉛直バネ定数，$k_r=K_r b/D_1$：無次元回転バネ定数．

式（$A-3$）は次のように行列表示される。

$$([E]-\lambda_\nu^4[F]-\bar{N}_{x0}[G])\{x\}=\{0\} \quad (A-4)$$

ここに，

$[E]=E\{s+(r-1)N,\ n+(m-1)N\}=E_{mrns}$,

$[F]=F\{s+(r-1)N,\ n+(m-1)N\}=F_{mrns}$,

$[G]=G\{s+(r-1)N,\ n+(m-1)N\}=G_{mrns}$,

$\{x\}=\{A_{11}A_{12}A_{13}\cdots A_{1N}A_{21}\cdots A_{1N}A_{NN}\}^T$.

$\bar{N}_{x0}$とおけば，自由振動の固有値λ_νが得られる。

また，$\lambda_\nu=0$とおけば，$\bar{N}_{x0}=\lambda_b$の座屈の固有値が得られる。数値解析において，式（A-4）は行列の固有値問題に変換される。ベクトル｛X｝を用いて，1次，2次，・・・，N次の振動波形を得ることができる。

$$W_{mn}=\sum_{p=1}a^m_p X_p(\xi)\sum_{q=1}a^n_q Y_q(\eta) \quad (A-5)$$

ここに，$\xi=x/a$，$\eta=y/b$，X_p:片持ちばりの固有振動形，Y_q:両端自由ばりの固有振動形，a^m_p，a^n_q:自由振動解析から得られるモード定数.

Appendix B　定積分 $A^{k\ell}_{mn}$, $B^{k\ell}_{mn}$, $C^{k\ell}_{mn}$

$$A^{k\ell}_{mn}=\int_0^1\int_0^1 G(\xi)^3\Big\{\frac{1}{\beta^4}\bar{W}_{mn,\xi\xi}\bar{W}_{k\ell,\xi\xi}+\bar{W}_{mn,\eta\eta}\bar{W}_{k\ell,\eta\eta}+\frac{\nu}{\beta^2}(\bar{W}_{mn,\xi\xi}\bar{W}_{k\ell,\eta\eta}+\bar{W}_{mn,\eta\eta}\bar{W}_{k\ell,\xi\xi})+\frac{2(1-\nu)}{\beta^2}\bar{W}_{mn,\xi\eta}\bar{W}_{k\ell,\xi\eta}\Big\}d\xi d\eta+\frac{K_\nu}{\beta}\int_0^1\bar{W}_{mn}\bar{W}_{k\ell}d\eta+\frac{K_\nu}{\beta^2}\int_0^1\bar{W}_{mn,\xi\xi}\bar{W}_{k\ell}d\eta,$$

$$B^{k\ell}_{mn}=\int_0^1\int_0^1\bar{W}_{mn,\xi}\bar{W}_{k\ell,\xi}d\xi d\eta,,$$

$$C^{k\ell}_{mn}=\int_0^1\int_0^1 G(\xi)\bar{\mathrm{W}}_{\mathrm{mn}}\bar{\mathrm{W}}_{\mathrm{k}\ell}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta,$$

$$\bar{W}_{u\nu}=\sum_{m=1}a^u_m h_m\sum_{n=1}a^\nu_n\bar{h}_n,\quad \bar{W}_{u\nu,\xi\eta}=\sum_{m=1}a^u_m h'_m\sum_{n=1}a^\nu_n\bar{h}'_n,$$

$$\bar{W}_{u\nu,\xi\xi}=\sum_{m=1}a^u_m h''_m\sum_{n=1}a^\nu_n\bar{h}_n,\quad \bar{W}_{u\nu,\eta\eta}=\sum_{m=1}a^u_m h_m\sum_{n=1}a^\nu_n\bar{h}''_n,$$

$$\bar{W}_{u\nu,\xi}=\sum_{m=1}a^u_m h'_m\sum_{n=1}a^\nu_n\bar{h}_n,\quad \bar{W}_{u\nu,\eta}=\sum_{m=1}a^u_m h_m\sum_{n=1}a^\nu_n\bar{h}'_n,$$

a^u_m，a^ν_n:モード定数，h_m，$\bar{h}'_m$，$\bar{h}''_m$，$\bar{h}_n$，$\bar{h}'_n$，$\bar{h}''_n$ (*Appendix C*).　($m,n,k,l,u,v=1,2,\cdots,N$)

Appendix C　はりの固有関数の定積分

$$I^1_{mr}=\int_0^1 G(\xi)^3 h_m h_r d\xi,\quad \mathrm{I}^2_{mr}=\int_0^1 G(\xi)^3 h''_m h''_r d\xi,$$

$$I^3_{mr}=\int_0^1 G(\xi)^3 h_m h''_r d\xi,\quad \mathrm{I}^4_{mr}=\int_0^1 G(\xi)^3 h''_m h_r d\xi,$$

$$I^5_{mr}=\int_0^1 G(\xi)^3 h'_m h'_r d\xi,\quad \mathrm{I}^6_{mr}=\int_0^1 h'_m h'_r d\xi,$$

$$I^7_{mr}=h_m(1)h_r(1),\quad I^8_{mr}=\int_0^1 h_m h_r d\xi,$$

$$I^9_{mr}=h_m(1)'\,h_r(1)',\quad \bar{I}^1_{ns}\int_0^1\bar{h}_n\bar{h}_s d\eta,$$

$$\bar{I}^2_{ns}=\int_0^1\bar{h}''_n\bar{h}_s d\eta,\quad \bar{I}^3_{ns}=\int_0^1\bar{h}_n\bar{h}''_s d\eta,$$

$$\bar{I}^4_{ns}=\int_0^1\bar{h}'_n\bar{h}'_s d\eta,\quad \bar{I}^5_{ns}=\int_0^1\bar{h}''_n\bar{h}''_s d\eta,$$

$$h'_m=\frac{1}{\pi}\frac{dh_m}{d\xi},\quad h''_m=\frac{1}{\pi^2}\frac{d^2h_m}{d\xi^2},\quad h'_r=\frac{1}{\pi}\frac{dh_r}{d\xi},$$

$$h''_r=\frac{1}{\pi^2}\frac{d^2h_r}{d\xi^2},\quad \bar{h}'_n=\frac{1}{\pi}\frac{d\bar{h}_n}{d\eta},\quad \bar{h}''_n=\frac{1}{\pi^2}\frac{d^2\bar{h}_n}{d\eta^2},$$

$$\bar{h}'_s=\frac{1}{\pi}\frac{dh_s}{d\eta},\quad \bar{h}''_s=\frac{1}{\pi^2}\frac{d^2\bar{h}_s}{d\eta^2}.$$

$$h_m=\frac{1}{2}[\delta_m exp(\beta_m a\xi)+\gamma_m exp(-\beta_m a\xi)]-\cos(\beta_m a\xi)+a_m\sin(\beta_m a\xi),$$

$$h_r=\frac{1}{2}[\delta_r exp(\beta_r \alpha\xi)+\gamma_r exp(-\beta_r \alpha\xi)]\cos(\beta_r a\xi)+a_r\sin(\beta_r a\xi),$$

$$\bar{h}_1=1,\quad \bar{h}_2=\sqrt{3}(1-2\eta),$$

$$\bar{h}_n=\frac{1}{2}[\delta_n exp(\beta_n b\eta)+\gamma_n exp(-\beta_n b\eta)]+\cos(\beta_n b\eta)-a_n\sin(\beta_n b\eta),\quad (n\geq 3)$$

$$\bar{h}_s=\frac{1}{2}[\delta_s exp(\beta_s b\eta)+\gamma_s exp(-\beta_s b\eta)]+\cos(\beta_s b\eta)-a_s\sin(\beta_s b\eta),\quad (s\geq 3)$$

$$\alpha_m=\frac{\cosh(\beta_m a)+\cos(\beta_m a)}{\sinh(\beta_m a)+\sin(\beta_m a)},$$

$$\alpha_r=\frac{\cosh(\beta_r a)+\cos(\beta_r a)}{\sinh(\beta_r a)+\sin(\beta_r a)},$$

$$\alpha_n=\frac{\cos(\beta_n b)-\cosh(\beta_n b)}{\sin(\beta_n b)-\sinh(\beta_n b)},$$

$$\alpha_s=\frac{\cos(\beta_s b)-\cosh(\beta_s b)}{\sin(\beta_s b)-\sinh(\beta_s b)},$$

$\delta_m=(1-\alpha_m)$，$\delta_r=(1-\alpha_r)$，$\delta_n=(1-\alpha_n)$，
$\delta_s=(1-\alpha_s)$，$\gamma_m=(1+\alpha_m)$，$\gamma_r=(1+\alpha_r)$，
$\gamma_n=(1+\alpha_n)$，$\gamma_s=(1+\alpha_s)$．$(m,n,r,s,=1，2，\cdots N)$

参考文献

1）Takahashi,K.:Instability of Parametric Dynamic Systems with Non-uniform Damping,Journal of Sound and Vibration,Vol.85, pp.257－262, 1982.

2）Kar,R.C.and Sujata,T.:Parametric Instability of a Non-uniform Beam with Thermal Gradient Resting on a Pasternak Foundation,Computer & Structures,Vol.29, No.4, pp.591－599, 1988.

3）Bolotin,V.V.:The Dynamic Stability of Elastic Systems,Holden-Day,Inc., San Fransisco, 1964.

4）林：軽構造の理論とその応用（上），日科技連出版社，pp.448－453, 1967.

5）Leissa,A.W.:Vibration of Plate,NASA SP-160, pp.74－76, 1969.