

偏平アーチの非線形振動とカオス解析

高橋和雄* 太田晶一**

Nonlinear Vibrations of an Arch with Small Rise

by

Kazuo TAKAHASHI* and Shouichi OHTA**

Nonlinear free and forced vibrations of an arch with small rise are discussed. The basic equation of motion is solved by a Galerkin method and the resulting time variable is solved by the harmonic balance method and Runge-Kutta-Gill method. Chaotic vibration is obtained by using Lyapunov exponent, Poincaré map and Power spectrum. Nonlinear vibration behaviors are shown for various rise ratios, load intensity and damping constants.

1. まえがき

偏平アーチは構造要素として使用され、また、自重、支持部の出来具合、製作過程などによって生ずる初期変形をもつたりや軸方向圧縮力を受けて座屈したりは、偏平アーチの一種とみなすことができる^{1) 2)}。偏平アーチの運動方程式には2次および3次の非線形項をもつため、非線形項分岐応答およびカオスが発生することが予想される。そこで、本研究では偏平アーチの運動方程式を多自由度の振動系にモデル化した後、Galerkin法を用いて常微分方程式に変換する。次に、両端がヒンジで支えられた偏平アーチを1自由度系にモデル化し、調和バランス法を用いて、1/2数調波共振の応答を求める。ついで、微分方程式を直接数値積分することによって時間応答を求め、偏平アーチの形状パラメータであるライズ比および荷重強度の影響を明らかにする。また、1/2分数調波共振近傍のカオスの挙動の存在についても明らかにする。

2. 運動方程式

Fig. 1に示すようなはりの任意点のひずみおよび応力を求めると次のように得られる²⁾。

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= (A'B' - AB)/AB - \eta \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \\ &= \varepsilon_0 - \eta \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \\ &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 + 2 \frac{\partial y}{\partial x} \frac{\partial y_0}{\partial x} \right\} - \eta \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\end{aligned}\quad (1)$$

$$\sigma_x = E\varepsilon_x \quad (2)$$

ここに、 η ：中立軸からの距離、 y ：たわみ、 x ：はりの支点からの距離、 ε_0 ：中立軸のひずみ、 u ：軸方向変位、 y_0 ：初期変位、 E ：ヤング率。

よって、はりの全体のひずみエネルギーは、

$$\begin{aligned}V &= \frac{1}{2} \iint E \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 + 2 \frac{\partial y}{\partial x} \frac{\partial y_0}{\partial x} \right\} \right. \\ &\quad \left. - \eta \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right]^2 dx dS\end{aligned}\quad (3)$$

ここに、 S ：断面積。

運動エネルギー T は、はりの密度を ρ とすると

$$T = \frac{1}{2} \iint \rho \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 dx dS \quad (4)$$

平成7年4月28日受理

*社会開発工学科 (Department of Civil Engineering)

**長崎大学大学院社会開発工学専攻 (Graduate Student of Nagasaki University)

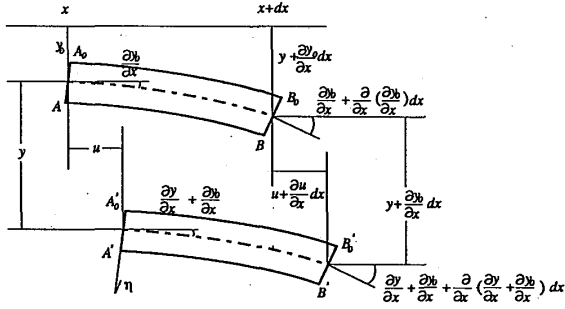


Fig. 1 An infinitely small element of a beam.

荷重のなす仕事 W は,

$$W = \int y p_0 \cos \Omega t dx \quad (5)$$

ここに, Ω : 荷重の円振動数, t : 時間, p_0 : 荷重振幅。

式(3), 式(4)および式(5)を用いて, 一般化 Lagrangian $L' = T - V + W$ が得られ, Hamilton の原理は次のように表される。

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L' dt = 0 \quad (6)$$

δy および δu の任意性から横方向および軸方向の運動方程式は次のように得られる。

$$\begin{aligned} \rho S \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} - ES \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \varepsilon_0 \left(\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial y_0}{\partial x} \right) \right\} \\ = p_0 \cos \Omega t \end{aligned} \quad (7)$$

$$\frac{\partial \varepsilon_0}{\partial x} = 0 \quad (8)$$

ここに, I : 断面 2 次モーメント, S : 断面積。

式(8)より, はりの中立軸のひずみが一定であることおよび両端で軸方向変位拘束を考慮すれば次のような運動方程式が得られる。

$$\begin{aligned} \rho S \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + N_x \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 y_0}{\partial x^2} \right) \\ = p_0 \cos \Omega t \end{aligned} \quad (9)$$

$$N_x = -\frac{ES}{2I} \int_0^l \left\{ \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 + 2 \frac{\partial y}{\partial x} \frac{\partial y_0}{\partial x} \right\} dx \quad (10)$$

上式は偏平アーチの非線形振動問題, 動的安定問題や製作過程, 支持部の出来具合および自重による影響などによって生ずる初期不整をもつはりの非線形振動問題に適用すべき運動方程式である²⁾。

初期たわみのない場合 ($y_0 = 0$) に初期軸力 N_0 および粘性減衰抵抗 $c\dot{y}$ の項を加え, N_x を消去すれば, 初期変形をもつ運動方程式は初期軸力がない場合に次のように表される。

$$\begin{aligned} \rho S \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} \\ - \frac{ES}{2I} \int_0^l \left[\left\{ \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 + 2 \frac{\partial y}{\partial x} \frac{\partial y_0}{\partial x} \right\} dx \right] \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 y_0}{\partial x^2} \right) \\ = p_0 \cos \Omega t \end{aligned} \quad (11)$$

3. 解法³⁾

(1) 常微分方程式への変換

初期変形は境界条件を満足しなければならないから, 次のように関数表示されるものとする。

$$y_0 = \Delta r \bar{X}(x) \quad (12)$$

ここに $\Delta = \Delta_0 / r$: ライズ比, r : 回転半径, $\bar{X}(x)$: 形状関数

式(11)の解を, 次の変数分離形に仮定する。

$$y = r \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x) T_n(t) \quad (13)$$

ここに, X_n : 固有振動形, T_n : 未知の時間関数
式(12), 式(13)を式(11)に代入し, Galerkin 法を適用すれば, 次のような時間に関する連立非線形常微分方程式が得られる。

$$\begin{aligned} \ddot{T}_n + \alpha_n^2 T_n + \Delta^2 S_n^0 \sum_{k=1}^{\infty} Q_k^0 T_k \\ + \Delta \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \left(Q_k^0 R_{ln} + \frac{1}{2} S_n^0 P_{kl} \right) T_k T_l \\ + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \beta_{klm}^n T_k T_l T_m = \gamma_n p \cos \omega \tau \end{aligned} \quad (14)$$

ここに, $\alpha_n = (\lambda_n / \lambda_1)^2$, $p = p_0 l^4 / EI r$,

$\bar{\omega} = \Omega / \omega_1$, $\lambda_1 = l^2 \sqrt{\rho S \omega_1^2 / EI}$,

ω_1 : 線形 1 次固有円振動数,

$$S_n^0 = -\frac{1}{\lambda_1^4 x_n} \int_0^1 \frac{d^2 \bar{X}}{d\xi^2} X_n d\xi$$

$$Q_k^0 = \int_0^1 \frac{d\bar{X}}{d\xi} \frac{dX_k}{d\xi} d\xi$$

$$R_{ln} = -\frac{1}{\lambda_1^4 x_n} \int_0^1 \frac{d^2 X_l}{d\xi^2} X_n d\xi$$

$$P_{kl} = \int_0^1 \frac{dX_k}{d\xi} \frac{dX_l}{d\xi} d\xi$$

$$\beta_{klm}^n = -\frac{1}{2} \int_0^1 \frac{dX_k}{d\xi} \frac{dX_l}{d\xi} d\xi \int_0^1 \frac{d^2 X_m}{d\xi^2} X_n d\xi / (\lambda_1^4 \chi_n)$$

$$\chi_n = \int_0^1 X_n^2 d\xi$$

$$\gamma_n = \int_0^1 X_n d\xi / (\lambda_1^4 \chi_n)$$

(2) 両端ヒンジの偏平アーチへの適用

両端ヒンジばりが正弦波で与える初期変位 $\bar{X} = \sin \pi \xi$ をもつ場合について系を1自由度系と仮定し減衰力を考慮すれば、式(4)は次式となる。

$$\begin{aligned} \ddot{T} + 2ha\dot{T} + \left(1 + \frac{1}{2}\Delta^2\right) T + \frac{3}{4}\Delta T^2 + \frac{1}{4}T^3 \\ = \frac{4}{\pi^5} p \cos \bar{\omega} \tau \end{aligned} \quad (15)$$

ここに、 h : 減衰定数、 $\alpha = \sqrt{1 + \frac{1}{2}\Delta^2}$ 。

(3) 1/2分数調波共振の解法

式(15)の解を次のように仮定する。

$$\begin{aligned} T = c_0 + c_{1/2} \cos \frac{\bar{\omega} \tau}{2} + s_{1/2} \sin \frac{\bar{\omega} \tau}{2} \\ + c_1 \cos \bar{\omega} \tau + s_1 \sin \bar{\omega} \tau \end{aligned} \quad (16)$$

ここに、 c_0, c_1, s_1 : 付随型の振幅成分、 $c_{1/2}, s_{1/2}$: 分岐型の振幅成分。

式(16)を式(15)に代入して、調和バランス法を適用すれば連立非線形方程式が得られる。これに Newton-Raphson 法を用いて解けば、振幅成分が得られる。

(4) 時間応答解析

$T = P_1, \dot{T} = P_2$ とおくと、式(15)は次に示す2個の一階常微分方程式に変換することができる。

$$\begin{aligned} \dot{P}_1 &= P_2 \\ \dot{P}_2 &= -2haP_2 - \left(1 + \frac{1}{2}\Delta^2\right) P_1 - \frac{3}{4}\Delta P_1^2 \\ &\quad - \frac{1}{4}P_1^3 + \frac{4}{\pi^5} p \cos \bar{\omega} \tau \end{aligned} \quad (17)$$

この式に Runge-Kutta-Gill 法を用いて、数値積分をして、時間応答解析を行う。

4. 数値結果

(1) 非線形自由振動の特性

Fig. 2 は、非線形自由振動曲線をライズ比 Δ をパラメーターに示す。縦軸は回転半径で無次元化した無次元振幅で、横軸は線形1次固有円振動数で無次元化

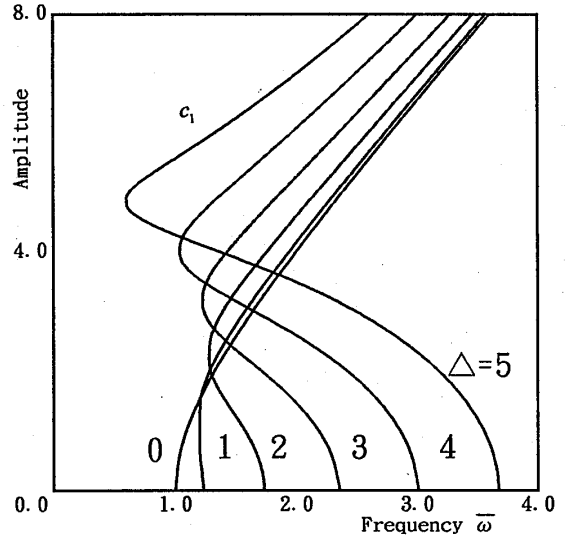


Fig. 2 Amplitude-frequency curves.

した無次元非線形振動数 $\bar{\omega} = \Omega/\omega_1$ である。 $\Delta = 0.0$ のときは、振幅の変動成分 c_1 は振動数とともに単調に増加するのみであるが、ライズ比が回転半径以上 ($\Delta \geq 1$) になると初期変形の影響が効いてくる。この時の無次元非線形振動数 $\bar{\omega}$ は振幅の増加とともに減少する軟化バネの挙動を示す。さらに振幅が増大してライズ比よりも大きくなると、振幅の変動成分 c_1 は無次元非線形振動数 $\bar{\omega}$ の増加とともに増加する硬化バネの挙動を示す。

以上のように、非線形自由振動特性はライズ比の影響を強く受け、軟化および硬化バネの両特性をもつことが確認できる。

(2) 1/2分数調波共振の応答特性

Fig. 3, 4 は、減衰定数 $h = 0.005$ 、荷重強度 p は静的応答が0.5となるように設定している場合について応答振幅と無次元加振振動数との関係をライズ比をパラメーター ($\Delta = 3.0, 5.0$) に示す。縦軸は回転半径で無次元化した無次元応答振幅で、横軸は線形1次固有円振動数で無次元化した無次元加振円振動数 $\bar{\omega}$ である。主調波応答 c_1, s_1 は、あらゆる振動数領域で生じているが、1/2分数調波共振の応答 $c_{1/2}, s_{1/2}$ は、固有振動数の2倍の振動数領域でのみ生じる。偏平アーチでは、ライズ比によって固有振動数が変化し、それに伴って分数調波共振の生じる振動数領域も変わってくる。主調波応答 c_1, s_1 、1/2分数調波共振の応答 $c_{1/2}, s_{1/2}$ ともに2次、3次の非線形項の影響を受けて、軟化、硬化バネの両特性をもつ。さらに、1/2分数調波共振の応答 $c_{1/2}, s_{1/2}$ の方がより軟化、硬化バネの両特性が強く現れている。

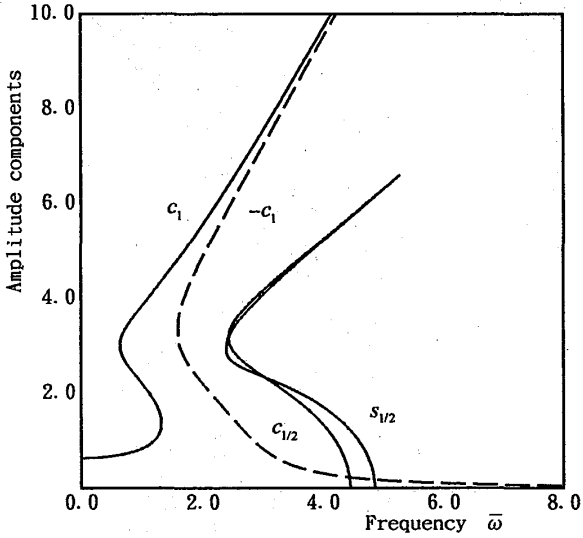


Fig. 3 Frequency-response curves with $\Delta=3.0$, $p=3.3438$ and $h=0.005$.

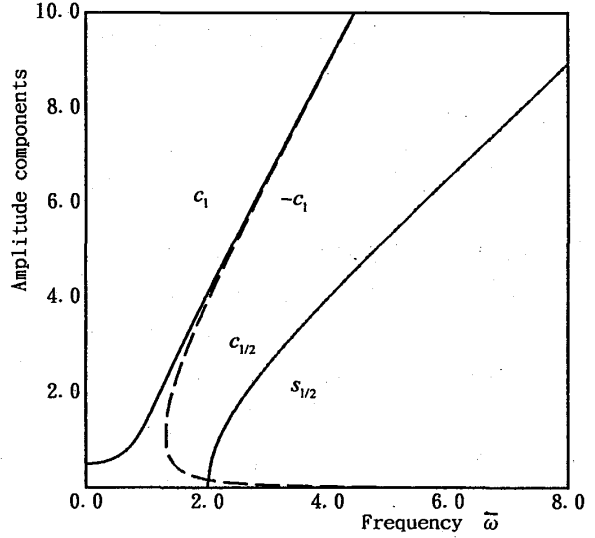


Fig. 5 Frequency-response curves with $\Delta=0.0$, $h=0.5313$ and $h=0.0$.

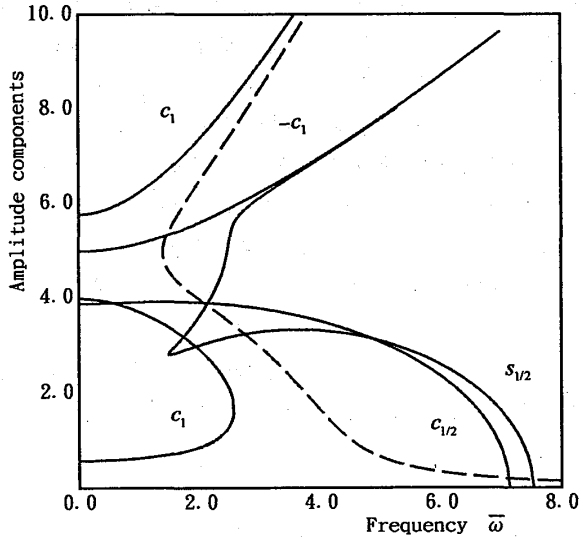


Fig. 4 Frequency-response curves with $\Delta=5.0$, $p=7.7188$ and $h=0.005$.

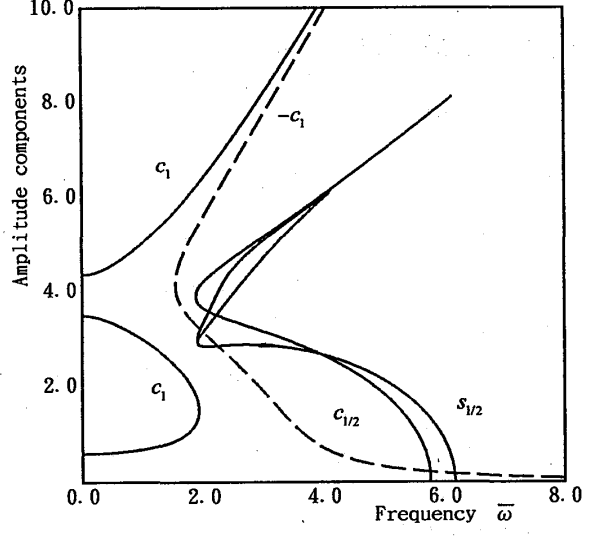


Fig. 6 Frequency-response curves with $\Delta=4.0$, $p=5.2813$ and $h=0.005$.

(3) ライズ比の影響

Fig. 5, 6 に、減衰定数 $h=0.005$ 、荷重強度は静的応答が 0.5 となるように設定している場合について応答振幅と無次元加振振動数との関係をライズ比をパラメーター ($\Delta=0.0, 4.0$) に示す。ただし、ライズ比 $\Delta=0.0$ の場合、減衰力があると 1/2 分数調波共振は生じていない。よって 1/2 分数調波共振は、減衰定数 $h=0.0$ によって求める。ライズ比が大きくなるにしたがい応答振幅が大きくなることを確認できる。また同様にライズ比が大きくなると 1/2 分数調波共振の発生領域が広がることを確認できる。これは、ライズ比が大きくなるにしたがい運動方程式内の非線形項の効果が強くなることに依存する。1/2 分数調波共振の

応答の発生領域はライズ比によって異なり、また発生領域は、はり (ライズ比 $\Delta=0.0$) に比べ著しく広がる傾向が見られる。

(4) 荷重強度の影響

Fig. 7, 8 に、ライズ比 $\Delta=3.0$ 、減衰定数 $h=0.005$ の場合について応答振幅と無次元加振振動数との関係を荷重強度をパラメーター ($p=3.3438, 8.0$) に示す。これらの図には、Runge-Kutta-Gill 法による応答振幅をプロットしている。図中の \circ はシミュレーションによる周期 T の振幅、 \square は周期 $2T$ の振幅、 \triangle は周期 nT の振幅、 \times はカオスの振幅を示している。荷重強度が大きくなるにしたがい主調波応答の応答

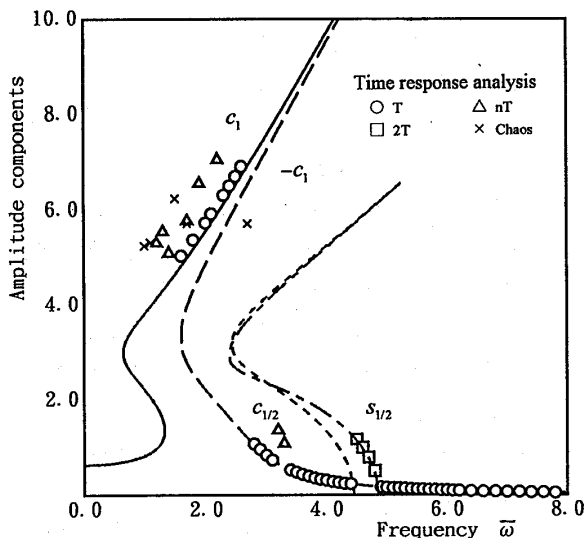


Fig. 7 Frequency-response curves with $\Delta=3.0$, $p=3.3438$ and $h=0.005$.

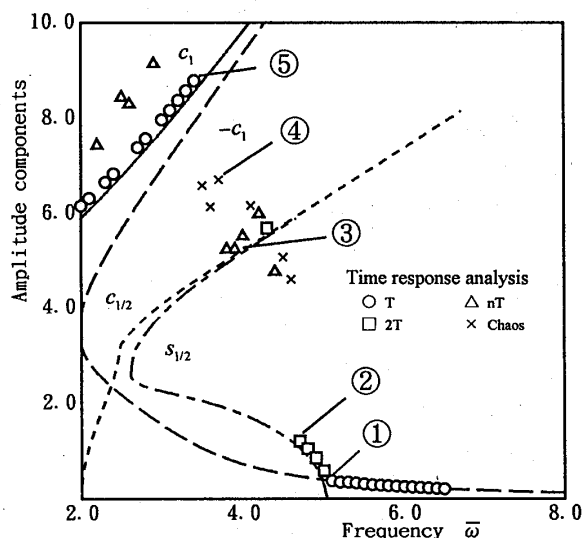


Fig. 9 Frequency-response curves with $\Delta=3.0$, $p=8.0$ and $h=0.005$.

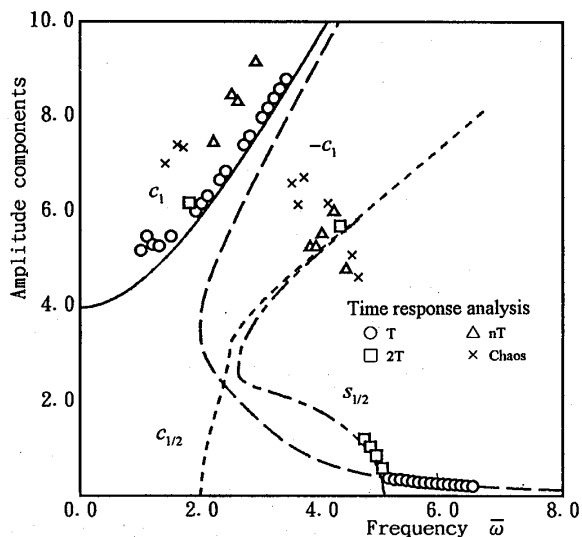


Fig. 8 Frequency-response curves with $\Delta=3.0$, $p=8.0$ and $h=0.005$.

振幅は大きくなり、1/2分数調波応答の発生領域は広がる。周期解に関しては、解析解とシミュレーションによる数値解は、荷重強度が増加しても無関係にはほぼ一致するが、1/2分数調波共振近傍、高調波共振領域においては周期 nT およびカオスが発生しやすい傾向が見られる。

(5) 1/2分数調波共振近傍のカオスの挙動

Fig. 9 にライズ比 $\Delta=3.0$ 、荷重強度、 $p=8.0$ 、減衰定数 $h=0.005$ の場合について、縦軸に振幅成分、横軸に無次元加振円振動数を取り、1/2分数調波共振近傍の主調波応答と1/2分数調波共振応答を示す。図中の○は数値シミュレーションによる振幅である。これ

らのシミュレーションにあたっては、初期変位、速度をいずれも 0 とし、時間刻みは $\Delta\tau=1/250$ 無次元時間で $n\Delta\tau=5000$ 以降の応答を求めた。また振動を特定するため、時系列応答波形、Poincaré 画像、パワースペクトルを参考にした。その結果、図中のポイント①、⑤は外力と同周期 T の主調波応答、②は 2 倍周期 $2T$ の 1/2 分数調波共振応答であり、この 2 種類の定常応答は、解析解と一致している。一方、ポイント③、④では、周期 T および周期 $2T$ と一致しない応答が生じている。カオス挙動が生じている無次元加振円振動数 $\bar{\omega}=3.7$ のポイント④について、その時系列応答波形、Poincaré 画像、パワースペクトルを Fig. 10 に示

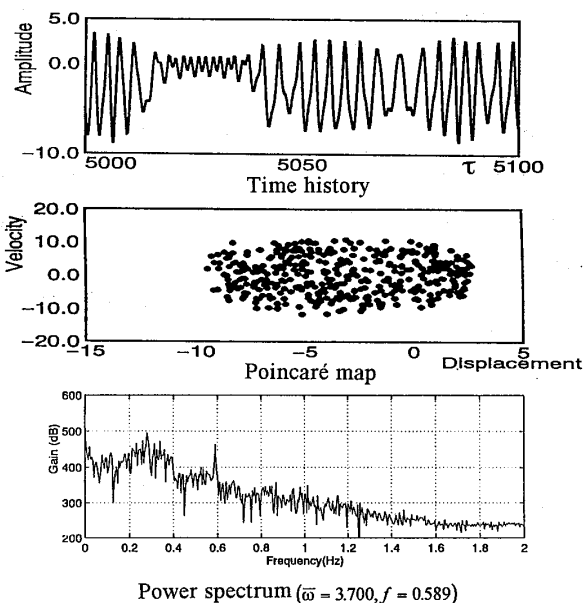


Fig. 10 Time histories, Poincaré map and Power spectrum of the point ④.

す。同様に、ポイント③では周期6Tの応答が確認できた。

(6) 減衰力の影響

Fig. 11に、ライズ比 $\Delta=3.0$ 、荷重強度 $p=3,3438$ について応答振幅と加振振動数の関係を減衰定数 h をパラメーター($h=0.005, 0.05$)に示す。減衰力の影響は振幅が小さいうちは、ほとんど現れないが振幅が大きくなってくるとその影響が現れ、減衰定数 $h=0.05$ においては、減衰定数 $h=0.005$ の場合に定まらなかった主調波応答の共振振幅が有限の大きさとなり、減衰力が大きくなるにつれてその振幅は小さくなる。1/2分数調波共振の応答の減衰力による影響は主調波応答に比べ大きく、振幅の小さいときにも現れ分岐領域は狭くなっている。

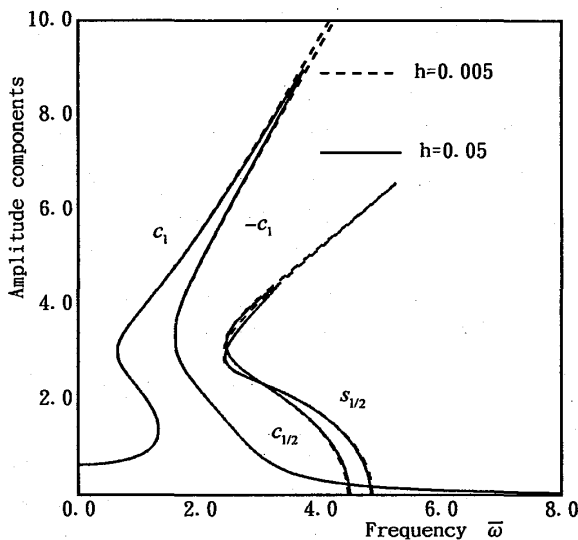


Fig. 11 Frequency-response curves with $\Delta=3.0$ and $p=3,3438$.

5. まとめ

本研究では、偏平アーチに現れる1/2分数調波共振について調和バランス法による解析および時間応答解析を行った。偏平アーチの形状パラメーターである、ライズ比、荷重強度および減衰力の影響を明らかにし

た。

得られた結果をまとめると次のとおりである。

- (1) 非線形自由振動の振動特性はライズ比によって、軟化、硬化バネの両特性を持つため、ライズ比は応答特性に大きな影響を及ぼしてくる。
- (2) 1/2分数調波共振の発生領域はライズ比によって異なり、ライズ比が大きくなるとしたがいの発生領域は、はりに比べ著しく広がる傾向がある。
- (3) 荷重強度において、その値が大きくなると主調波応答の応答振幅は大きくなり、1/2分数調波共振の発生領域は広がる。
- (4) 1/2分数調波共振近傍において、周期 nT およびカオスを確認した。
- (5) 減衰力を考慮すると、減衰を無視した場合に、定まらなかった主調波の共振振幅が有限の大きさとなり、減衰力が大きくなるにしたがいその振幅は小さくなる。また、1/2分数調波共振の発生領域を狭くする効果を持つ。

本研究では、支点が拘束された偏平アーチの運動方程式について検討している。今後、初期変形と座屈や温度変化との関係を考慮した解析を行うことが必要である。また、実験におけるカオスの挙動の確認が今後の課題である。

最後に、本研究を行うにあって多大な御協力を頂いた大学院生の鎌田智之氏に深く感謝の意を表します。

なお、数値計算には長崎大学情報処理センターのVP-1200を使用したことを付記する。

参考文献

- 1) 高橋：構造部材の大振幅振動特性に関する基礎研究, 1984.
- 2) 八巻：弾性体の非線形振動, 「非線形振動の理論と実際」教材, pp. 31~50, 1973.
- 3) TAKAHASHI, K. and KAWAHARA, K.: On a Method of Approaching the Stability Problem of Non-linear Vibrations, Theoretical and Applied Mechanics, Vol. 26, pp. 339~350, 1976