

# ‘月面宙返り’のトポロジー

後藤信行\*・富塚 明\*・古賀雅夫\*\*・古谷吉男\*\*

## Topology in ‘Moon-sault’

Nobuyuki GOTO, Akira TOMIZUKA, Masao KOGA, Yoshio FURUYA

### Abstract

The rotation about the second axis is unstable in the free rotation of the rigid body with three inequitable axes, and then the body does a complex rotation, though the rotation about the first or the third axis is stable. The motion of the 'moon-sault' of gymnast can be approximately considered as rotation of the rigid body, and the player has used chaotic phenomena with three inequitable axes of the human body to control his posture. Also the player has matched the rotation to the timing of landing by increasing or decreasing the rotational energy just a little by the hands and feet's little bending or stretching.

Key words : Euler equation, Chaos, Topology, Moon-sault

### 1. はじめに

体操や高板飛び込み、また、モーグルスキーやスノーボードなどのスポーツ競技において、選手の体が空中で回転するのを見ていると、まさかと思いつながらぬ、つい角運動量の保存則を疑いたくなることがある。空気の抵抗を無視すれば、外力のモーメントは働いていないにもかかわらず、空中に舞い上がった選手の体は不思議な回転をする。

スポーツ競技の回転には、異なる二種類の回転が存在しているようである。いずれの回転でも角運動量は保存されているが、一つは、猫の逆さ落としのような回転であり、もう一つは鉄棒のフィニッシュでの‘月面宙返り’のような回転である。

二つの回転はいくつかの点で明らかに異なる。‘逆さ落とし’の場合は猫の体の上下軸のまわりに回転するのに対し、‘月面宙返り’では、人体の左右軸

のまわりの回転である。また、‘逆さ落とし’では、猫は激しく体をねじるのに対し、‘月面宙返り’では、選手は自分の体を僅かしか変形させていない。さらに、前者の回転では、猫は静かに落とされるので、角運動量は終始ゼロのままであるが、後者では、選手の体は角運動量を持った状態で空中に投げ出される。

‘月面宙返り’では、選手は体を僅かしか変形させていないので、近似的には剛体の回転とみなせるので、猫の‘逆さ落とし’より簡単に理解できるかということ、むしろ逆であり、‘逆さ落とし’が比較的簡単に説明できるのに対し、‘月面宙返り’を初等力学で理解するのはほとんど不可能である。

猫の‘逆さ落とし’では、角運動量がゼロであるので、一旦、体の向きを変えてしまえば、それ以上回転することはないから、猫は安全に着地できる。しかし、‘月面宙返り’の場合には、角運動量が存在するので、足から着地できるように、回転と重心の放物運動のタイミングを合わせることも重要となる。

\*長崎大学環境科学部 \*\*長崎大学教育学部

受領年月日 2005 (平成 17 年) 7 月 29 日

受理年月日 2005 (平成 17 年) 11 月 30 日

## 2. 猫の‘逆さ落とし’

猫の両手両足を持ち、逆さにして背中から落とすと、猫は空中で体を激しく振じるとともに、手足を屈伸させながら、体の向きを変え、足から着地する。猫が完全に静止した状態から落とされたとしても、猫の角運動量はゼロのままであるにもかかわらず、猫の向きが変わる。

角運動量がゼロの状態から、内力のみで体の向きを変えられることは、簡単に実験で示すことができる。まず、摩擦のない回転椅子に座り、ダンベルなどの重りを持った片腕を水平面で円を描くように回すと、腕に生じた角運動量を打ち消すように、それとは逆向きに体が回転する。この場合、外力のモーメントは働いていないので、全体の角運動量は常にゼロである。

猫の‘逆さ落とし’の場合も、猫は、頭や尻尾などを内力によって回転させている。体の一部分に角運動量を発生させることにより、それとは逆方向に体全体の向きを変えることが可能なのである。

猫の体を上半身と下半身に分けて考えてみよう。猫が体を振じると、上半身と下半身に角運動量が生じるが、もともと全体の角運動量はゼロであったとすると、二つの角運動量の大きさは等しく、向きは互いに逆向きでなければならない。このときの回転角も上半身と下半身では逆向きとなるが、その大きさは、それぞれの慣性モーメントが小さいほど大きくなる。

まず、猫は手を縮め、首をすくめて上半身の慣性モーメントを小さくし、一方、足としっぽは広げて、下半身の慣性モーメントは大きくし、その状態で体をねじると、慣性モーメントの小さい上半身の回転角が大きくなる。次に手足と首としっぽの屈伸を逆にし、両半身の慣性モーメントの大きさを逆転させ、逆向きに体をねじれば、今度は下半身の回転角が大きくなる。つまり、猫は最初のねじりで上半身を回転させ、次の逆向きのねじりで下半身を回転させていることになる。猫は、この一連の動作を本能的に行い、逆さに落とされても足から着地できるのである<sup>1</sup>。

## 3. 剛体の回転

鉄棒の‘月面宙返り’は、猫の‘逆さ落とし’とは異なり、選手はほとんど体をねじることなく、不思議な回転をしている。人間の体は剛体ではないが、まず、人体を剛体とみなし、簡単な人体模型を作って実験をしてみよう。

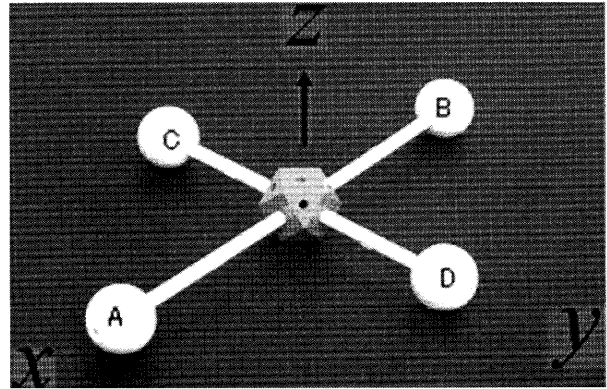


図1 人体の剛体模型

質量の等しい4つの質点A、B、C、Dを図1のように棒でつないで人体の剛体模型としよう。中心Oからの距離をAとBがCとDより長くする。AとBの方向は身長方向に対応し、CとDが左右方向である。化学講義用の分子構造模型が手元があれば、それを用いると簡単に作れる。

このような剛体の自由回転は回転軸の選び方によっては複雑な回転となる<sup>2</sup>。便宜上、物体に固定した座標系xyzを図のように選ぼう。この人体模型の主軸の慣性モーメントはz軸のまわりが一番大きく、次いでy軸で、一番小さいのはx軸の周りである。

この模型を空中に放り投げて、回転させると、x軸のまわりと、z軸のまわりの回転は安定であるが、第2軸であるy軸のまわりに回転させようとする、月面宙返りのような‘ひねり’が加わった回転をすることが観測される。つまり、CとDの球が互いに入れ替わりながら回転する。この場合、球Cと球Dを異なる色にしておくと、‘ひねり’の様子が分かりやすい。

人体模型をy軸のまわりに自由回転させようとする場合、回転軸のy軸からの僅かなずれのため、四つの質点には遠心力とコリオリの力が複雑に働く。それが回転軸のずれを増幅するため、y軸のまわりの回転が不安定になると考えられるが、三軸不等の剛体の自由回転を初等力学の範囲で考えるのは極めて困難である。

## 4. オイラーの方程式

人体の模型としてつくった図1の剛体模型に対するオイラー方程式を考えてみよう。主軸のまわりの慣性モーメントを $I_x, I_y, I_z$ 、剛体の回転の角運動量Lのx, y, z成分をそれぞれ $L_x, L_y, L_z$ とすると、オイラーの方程式は

$$\frac{dL_x}{dt} = (I_z^{-1} - I_y^{-1})L_y L_z \quad (1)$$

$$\frac{dL_y}{dt} = (I_x^{-1} - I_z^{-1})L_z L_x \quad (2)$$

$$\frac{dL_z}{dt} = (I_y^{-1} - I_x^{-1})L_x L_y \quad (3)$$

となる。

剛体は角運動量  $L$  を一定に保ちながら回転しているのであるから、剛体上に取り付けた座標系  $Oxyz$  も回転している。オイラーの方程式は、剛体にとりつけた回転座標系の上立って、剛体自身の角運動量を観測していることになる。

剛体の重心  $O$  を起点とするベクトル  $L$  の先端の点を  $P_L$ 、剛体の上からみた  $P_L$  の座標を  $(x, y, z)$  とし、オイラーの方程式を改めて書き換えると、

$$\frac{dx}{dt} = (I_z^{-1} - I_y^{-1})yz \quad (4)$$

$$\frac{dy}{dt} = (I_x^{-1} - I_z^{-1})zx \quad (5)$$

$$\frac{dz}{dt} = (I_y^{-1} - I_x^{-1})xy \quad (6)$$

となる。これは3元の非線形力学系をなしているが、これから簡単に次の二つの運動の積分が導かれる。まず、(4)、(5)、(6)式の両辺にそれぞれ  $x$ 、 $y$ 、 $z$  を掛けて足し合わせたのち、積分すれば、

$$x^2 + y^2 + z^2 = L^2 \quad (7)$$

となり、(4) (5) (6) にそれぞれ、 $xI_x^{-1}$ 、 $yI_y^{-1}$ 、 $zI_z^{-1}$  を掛けて足し積分すれば、

$$\frac{x^2}{I_x} + \frac{y^2}{I_y} + \frac{z^2}{I_z} = 2E \quad (8)$$

となる。ここで積分定数  $L$  および  $E$  はそれぞれ角運動量の大きさおよび回転のエネルギーを表し、(7) および (8) はそれぞれ角運動量の保存則とエネルギーの保存則を表す。点  $P_L$  は球面 (7) と楕円体面 (8) の交線上を巡ることになる。i, j, k をそれぞれ、 $x$ 、 $y$ 、 $z$  方向の基本単位ベクトルとすると、 $P_L$  の速度  $\mathbf{v}_L$  は、

$$\mathbf{v}_L = \frac{dx}{dt} \mathbf{i} + \frac{dy}{dt} \mathbf{j} + \frac{dz}{dt} \mathbf{k} \quad (9)$$

となる。 $\mathbf{v}_L$  の各成分はオイラーの方程式 (4~6) から求まる。つまり、オイラーの方程式は  $P_L$  の運動に対する速度場を与えている。 $P_L$  は (7) 式の球面上に描かれた等エネルギー線上を速度  $\mathbf{v}_L$  で移動することになるが、明らかに主軸上では  $\mathbf{v}_L = 0$  であるので、主軸上は平衡点である。その平衡点の安定性は速度場のトポロジーによって決まる。

次に角運動量のかわりに剛体の角速度  $\omega$  について考えてみよう。今度はベクトル  $\omega$  の先端  $P_\omega$  の座標を  $(x, y, z)$  とするとオイラーの方程式は、

$$I_x \frac{dx}{dt} = (I_y - I_z)yz \quad (10)$$

$$I_y \frac{dy}{dt} = (I_z - I_x)zx \quad (11)$$

$$I_z \frac{dz}{dt} = (I_x - I_y)xy \quad (12)$$

となる。

一方、運動の積分は

$$I_x^2 x^2 + I_y^2 y^2 + I_z^2 z^2 = L^2 \quad (13)$$

$$I_x x^2 + I_y y^2 + I_z z^2 = 2E \quad (14)$$

で与えられる。今度は角運動量保存則が楕円体面で、エネルギー保存則が球面で表される。

$P_\omega$  の軌道は二つの楕円体面 (13) と (14) の交線になるが、これは  $P_L$  の軌道を三つの主軸方向にそれぞれ一定の割合で引き伸ばしたものであるから、トポロジーとしては  $P_L$  の軌道と  $P_\omega$  の軌道はまったく同等である。

## 5. $P_L$ が描く軌道のトポロジー

慣性モーメントは、質量の分布が回転軸から遠くなるほど大きくなるから、図1の人体の剛体模型では、 $I_x < I_y < I_z$  であり、等エネルギー面を表す楕円体面 (8) は、 $z$  方向に一番長く、 $x$  方向に一番短い。エネルギー  $E$  を増すにつれ、楕円体は相似な形状を保ちながら大きくなっていく。

角運動量を一定にして、エネルギー  $E$  をゼロからだんだん大きくしたとすると、 $E$  が小さいあいだは角運動量球面 (7) とエネルギー楕円体面 (8) は交わらないので、運動の解も存在しないが、

$$E \geq \frac{L^2}{2I_z} \quad (15)$$

となると、二つの曲面の交線が現れる。楕円体 (8)

の  $E$  を増すにつれ、球面 (7) と、まず、 $z$  軸で接し、次に二つの曲面の交線は  $z$  軸を囲む閉曲線を描く。さらに、交線は  $y$  軸上で交差する二つの大円を経て、 $x$  軸を囲む閉曲線となる。図 2 の (a) ~ (d) はエネルギーを順に増加させた場合の球面と楕円体を描いたものである。さらに、球面と楕円体面の交線を球面上に書込むと、図 3 のようになる。 $P_L$  はそのときのエネルギーに応じて一つの閉じた交線、つまり、球面上に描かれた等エネルギー線の上を動く。

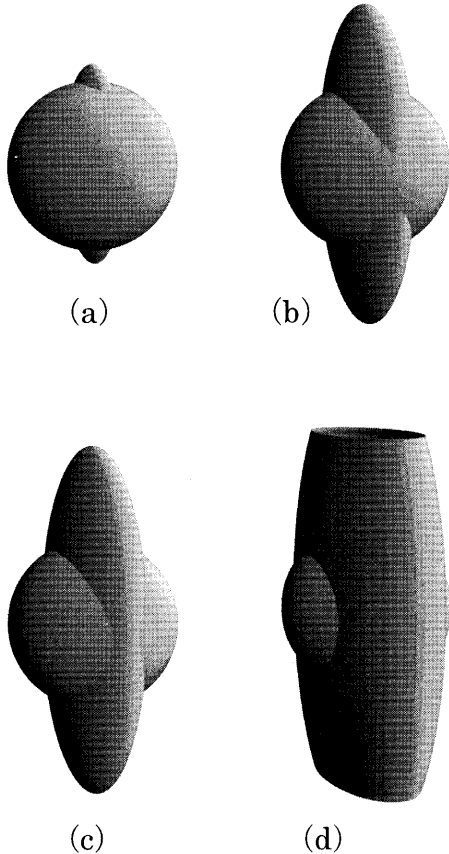


図 2 角運動量球と等エネルギー楕円の交線

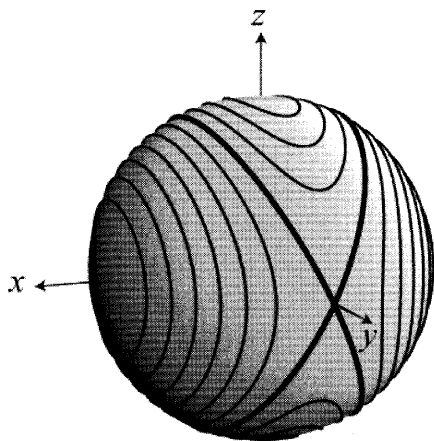


図 3 角運動量球上の等エネルギー線

図 3 において、 $z$  軸と  $x$  軸はそれぞれエネルギー  $E$  が最小と最大に対応し、それぞれの軸を囲む等エネルギー線が存在するが、 $y$  軸はサドル点となり、 $y$  軸を囲む等エネルギー線は存在しない。等エネルギー線のうち、 $y$  軸上で交差する二つの大円は点  $P_L$  の運動に対するヘテロクリニック軌道であり、球面上の等エネルギー線の族を、 $x$  軸を囲む閉曲線と  $z$  軸を囲む閉曲線とに分割するセパトリックスである。この近傍では、僅かなエネルギーの変化でも、軌道は大きく変化する。

$P_L$  が閉曲線を一周する時間はある場合にはオイラーの方程式から近似的に求めることができる。例えば  $z$  軸を囲む小さな閉曲線に対しては、 $z$  を一定とみなし  $z = I_z \omega$  とすれば (4) と (5) から  $P_L$  が  $z$  軸を廻るとききの角振動数  $\Omega_z$  は

$$\Omega_z = \sqrt{\frac{(I_z - I_y)(I_z - I_x)}{I_x I_y}} \omega \quad (16)$$

となる。ここで  $\omega$  は剛体の回転の角振動数である。同様にして  $\Omega_x$  も  $\Omega_y$  も求まるが、 $\Omega_y$  の値だけは純虚数になる。これは  $y$  軸を囲む閉曲線が存在しないことを示している。

$P_L$  が等エネルギー線上を運動する速度  $v_L$  は、慣性主軸上ではゼロであるから、もし、 $P_L$  が完全にヘテロクリニック軌道上をたどるとすれば、 $y$  軸までたどり着くのに、無限の時間がかかることになる。現実にはヘテロクリニック軌道からの僅かなズレが、 $y$  軸に近づくにつれ、増幅され、 $P_L$  は球面上に描かれた双曲線に沿って運動する。

以上のことから、 $P_L$  が  $x$  軸あるいは  $z$  軸のまわりの微小閉曲線をまわるときはその周期を近似的に求めることができるが、閉曲線が大きくなり、ヘテロクリニック軌道に近づくとき、周期はエネルギーに敏感となり、軌道の周期を予測することは不可能となる。近似的に求めることもできなくなる。つまり、この場合には  $P_L$  の運動にカオスが現われることになる。

## 6. ‘月面宙返り’における着地の制御

鉄棒選手が初めに左右軸のまわりに回転しようとするとき、点  $P_L$  はヘテロクリニック軌道の近くを巡ることになり、 $+y$  軸と  $-y$  軸近傍を通るため、回転軸は大きく変化することになり、選手の体の回転にひとりけにひねりが加わり、複雑な回転になることが分かる。

しかし、完全な剛体模型では、月面宙返りでの着

地のタイミングを調節できない。 $P_L$  がヘテロクリニックな軌道の近傍を巡るので、 $P_L$  の軌道運動の周期は初期条件に敏感となる。選手の体は、重心運動をしながら、同時に重心のまわりの回転運動をしているが、前者が予測可能な放物運動であるのに対し、後者の回転運動はカオスであるので、鉄棒から手を離すときの初期条件をいくら調節しても、それだけでは重心運動と回転運動のタイミングを合せることはできない。選手は着地のさい、背中や頭から落下する危険性をどのようにして回避しているのだろうか。

現実には、人体は剛体でないのでオイラーの方程式は厳密には成り立たないが、体の変形はゆるやかとして断熱近似が成り立つとしよう。つまり、 $P_L$  は図3のような球面上の閉曲線として描かれた等エネルギー線上を辿りながら、エネルギーや慣性モーメントの大きさがゆっくり変わるものとしよう。

外力のモーメントが働かなくても選手は変形運動によって、慣性モーメントとともに回転のエネルギーを増減させることができる。遠心力に逆らって手足を縮めれば、エネルギーは増加し、遠心力の働くままにまかせて手足を伸ばせばエネルギーは減少する。体の変形が僅かであれば、エネルギー楕円体(8)の変化も僅かであるが、 $P_L$  がヘテロクリニック軌道の近傍を巡っているため、僅かなエネルギーの変化によって、その後の  $P_L$  の軌道を大きく変えることが可能となる。つまり、カオスを利用して、回転運動を途中で修正することができる。

## 7. 天体の回転

図1のような物体を人工衛星として宇宙空間に打ち上げ、姿勢制御をすることなく、自由に自転させたら、どのようになるだろうか。完全な剛体など存在しないので、長期間の回転に対して角運動量は保存するが、エネルギーは僅かな内部摩擦によって散逸するだろう。エネルギーの散逸があると、図4のように、最小のエネルギー状態である  $z$  軸はアトラクターとなり、 $z$  軸近傍の回転では、回転軸が螺旋状に軌跡を描きながら  $z$  軸に近づく。一方、 $P_L$  が  $x$  軸上にある回転状態はエネルギー最大の状態であるので、リペラーとなり、回転軸は螺旋状に  $x$  軸から遠ざかることになる。つまり、エネルギーの散逸がある場合は、物体が  $z$  軸を回転軸として回転する状態のみが安定となる。慣性モーメントが最大の方向を回転軸に選んだ場合が最も安定であることは、遠心力を考えれば直感的にも理解できよう。

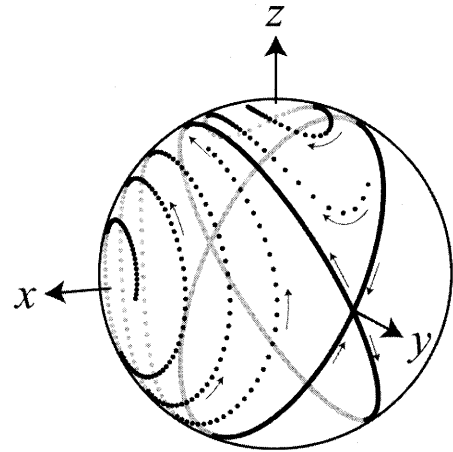


図4 散逸系での角運動量の軌跡

三軸不等の人工衛星が始めに  $z$  軸のまわりに回転していると安定な回転となるが、始めに  $x$  軸のまわりに回転していると、エネルギーを散逸して、回転軸は  $x$  軸から少しずつ遠ざかる。また、始めに  $y$  軸の周りに回転していれば、人工衛星は宇宙空間で‘E難度の妙技’を披露することになる。この回転状態はカオスであるから、人工衛星の回転は初期条件や地球からの起潮力などの外部からの摂動に敏感となり、予測不可能な運動となる。ポイジャーでの観測によると太陽系に属する小惑星でいびつな形をした天体には、このようなカオス的な自転をしているものもあるという<sup>3</sup>。

地球は南北方向に少し押し潰されていて扁平な形をしているので、地球の慣性モーメントは  $z$  軸、即ち、南北軸のまわりが一番大きく、 $x$  軸と  $y$  軸のまわりの慣性モーメントが等しい。南北軸が回転運動のアトラクターとなり、地球は南北軸のまわりに自転するのが一番安定であるが、地球の自転軸は、慣性モーメントが最大の方向、即ち、 $z$  軸とは完全には一致せず、 $z$  軸の周りのリミットサイクル上を動いている。これを地球の上でみると、自転軸が  $z$  軸のまわりを移動しているように見える。これが地球の極運動であり、極運動の角振動数は、(16)式において  $I_x = I_y = I$  とすると

$$\Omega_z = \frac{I_z - I}{I} \omega \quad (17)$$

となる。

極運動はオイラーによって予言され、地球の慣性モーメントの大きさから、極運動の周期を求めると約300日となる。しかし、観測の結果はそれより長く、約430日である。周期の観測値が計算値より長

くなるのは、地球が完全な剛体でないためと考えられている。バネの振動の場合に減衰項を入れると周期が長くなるのと同じである。極運動の大きさは角度にして、せいぜい0.3秒程度で、極地の地表上で半径が10 m程度の円を描いている<sup>4</sup>。

極移動は地球内部の摩擦によって次第に減衰し、最終的には自転軸がz軸に一致するはずだが、地球の地震や大気の運動あるいは他の惑星の影響などにより、回転運動にエネルギーが補給され、絶えず極移動が励起されている。そのため、自転軸は、地球のz軸にいつまでも収束せず、図5のように、z軸のまわりに小円を描きながら廻り続けているのである。

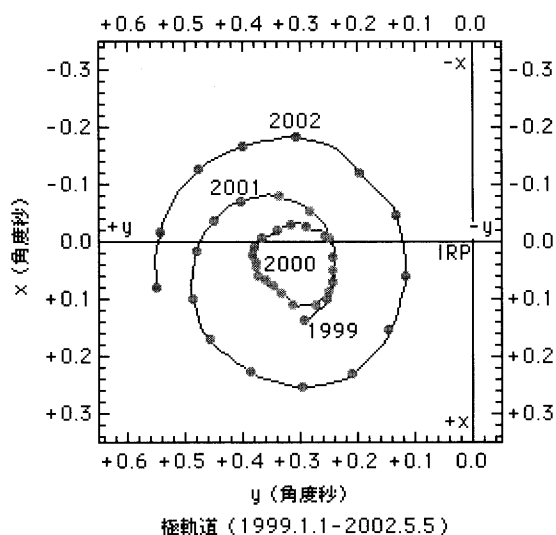


図5 極運動

(国立天文台編：理科年表2003年CD-ROM版)

極運動によって自転軸が描く円の中心が地球のz軸であり、慣性モーメントが最大の方向であるが、このz軸も地球の内核の運動により、長い時間の間では移動するだろう。さらに地球は扁平な形であるため、他の天体からの起潮力によってトルクを受け、慣性系からみた角運動量も空間に対して2万6千年の周期でゆっくり変化している。地球の回転には、体操選手の回転ほどの華麗さこそないが、複雑さの点では‘月面宙返り’に勝るとも劣らないのである。

## 8. おわりに

鉄棒の‘月面宙返り’は、猫の‘逆さ落とし’と混同されがちだが、それとは異質の回転であり、第1近似としては、天体のような剛体の回転運動と本質的に同じである。人体が三軸不等であり、選手は体を第2軸である左右軸のまわりに回転させるため、

回転運動にカオスが現れ、‘月面宙返り’のような複雑な回転になる。さらに、第2近似として、手足の屈伸まで考慮すれば、角運動量一定のもとで、回転のエネルギーを僅かに増減させるだけで、カオスを利用して、頭から落下しないように、回転を着地のタイミングに合わせるができるのである。他のスポーツの回転、例えば、高板飛び込みでは、猫の‘逆さ落とし’と‘月面宙返り’の両方を取り入れていると考えられる。

- 1 ケイン・スターンハイム、ライフサイエンス物理学、廣川書店(1980)P.127
- 2 バーガー、オルソン：力学 新しい視点にたつて、培風館 1975年 p.195
- 3 アイバース・ピーターソン：ニュートンの時計、日経サイエンス社 1995年 p.218
- 4 須川力：地球の回転、NHKブックス 1978年 p.33.