位相ベクトル空間における確率収束

式　見　拓　仙

Abstract

Let (X_n) be a sequence of random variables with values in a topological vector space. We introduce the notion of convergence in probability for (X_n) and discuss the basic relations between convergence in probability and almost sure convergence. Moreover, we also defne the Cauchy property for (X_n) and prove that, if the topological vector space is complete, locally bounded and locally convex, then (X_n) has an a.s. convergent subsequence.

Keywords : convergence in probability; Cauchy criterion; topological vector space

1　はじめに

$X, X_n, n=1,2,\ldots$は確率空間（$\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P}$）上に定義され，可分距離空間（$\mathscr{X}, d$）に値をとる確率変数であるとする．任意の$\varepsilon>0$に対し，

$$\mathbf{P}(d(X_n, X)\geqslant\varepsilon)\to 0 \quad (n\to\infty) \tag{1.1}$$

が成り立つとき，確率変数列（X_n）がXに確率収束するといい，この収束を$X_n \xrightarrow{P} X$で表す．（X_n）がXに確率収束することと（X_n）の任意の部分列がXに概収束するさらなる部分列をもつことが同値であることはよく知られている．すなわち，

$$X_n \xrightarrow{P} X \Longleftrightarrow \forall(n_k)\subset(n)\exists(n_{k(i)})\subset(n_k)X_{n_{k(i)}}\to X \text{ a.s.} \tag{1.2}$$

が成り立つ．このことから，特に，確率収束は（$\mathscr{X}$,d）の距離位相にのみ依存する概念であり，その位相を距離づける距離の選択には直接依存しないことがわかる．言い換えれば，d' が d と位相的に同値な距離ならば，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，(1.1) が成り立つことと任意の $\varepsilon > 0$ に対して，$\mathbf{P}(d'(X_n,X) \geqslant \varepsilon) \to 0$ が成り立つこととは同値である．

（X_n）が確率収束するならば，（X_n）は次の意味でCauchy列である：任意の $\varepsilon > 0$ に対して，

$$\mathbf{P}(d(X_n,X_m) \geqslant \varepsilon) \to 0 \quad (m,n \to \infty). \tag{1.3}$$

実際，$X_n \xrightarrow{P} X$ となる確率変数 X が存在するならば，

$$\mathbf{P}(d(X_n,X_m) \geqslant \varepsilon) \leqslant \mathbf{P}(d(X_n,X) \geqslant \varepsilon/2) + \mathbf{P}(d(X,X_m) \geqslant \varepsilon/2) \to 0$$

となるからである．一般にこの逆は成り立たないが，（$\mathscr{X}$,d）が完備可分距離空間ならば，逆も成り立つ．すなわち，（X_n）が上の意味でCauchy列ならば，（X_n）は確率収束する．これは次の事実が成り立つことによる：

（X_n）が上の意味でCauchy列⇒その適当な部分列（X_{n_k}）が概収束する．　(1.4)

本稿では，位相ベクトル空間に値をとる確率変数列が確率収束することおよびCauchy列であることの定義を導入し，距離空間において成り立つ (1.2) と (1.4) と同様の結果が位相ベクトル空間においても成り立つことを証明する．

2　準　備

この節では位相ベクトル空間の定義から始めて，その部分集合が有界であること，均衡していること，絶対凸であることを定義し，それらに関する簡単な性質を祖述する．また，位相ベクトル空間の点列がCauchy列であることの定義を述べ，さらに級数の収束に関する補題を一つ証明しておく．

体$\mathbf{K}$（$=\mathbf{R}$または$\mathbf{C}$）上のベクトル空間$\mathscr{X}$に位相τが定義されており，和

$$(x,y)\in\mathscr{X}\times\mathscr{X}\to x+y\in\mathscr{X} \tag{2.1}$$

とスカラー倍

$$(\lambda,x)\in\mathbf{K}\times\mathscr{X}\to\lambda x\in\mathscr{X} \tag{2.2}$$

がともに連続であるとき，$\mathscr{X}$を位相ベクトル空間とよぶ（Rudin, 1991）．$\mathscr{X}$が位相ベクトル空間であることの定義に$\mathscr{X}$がHausdorff空間であることを含めることが多いが，本稿ではHausdorff性を位相ベクトル空間の定義に含めない．以後，$\mathscr{X}$は体$\mathbf{K}$上の位相ベクトル空間を表すものとし，その線型位相をτで表す．また，τ_0によって$0\in\mathscr{X}$の開近傍全体を表すものとする．

$\mathscr{X}$の部分集合$A,B,x\in\mathscr{X}$，スカラー$\lambda\in\mathbf{K}$に対し，次のように記号を定める：

$$x+A=\{x+a:a\in A\},$$
$$x-A=\{x-a:a\in A\},$$
$$A+B=\{a+b:a\in A,b\in B\},$$
$$\lambda A=\{\lambda a:a\in A\}.$$

Aを$\mathscr{X}$の部分集合とする．$|\lambda|\leqslant 1$を満たす任意の$\lambda\in\mathbf{K}$に対し，

$$\lambda A\subset A$$

が成り立つとき，Aを均衡集合とよぶ(あるいはAは均衡しているという)．言い換えれば，任意の$x\in A$に対し$-x$とxとを結ぶ線分がAに含まれるとき，Aを均衡集合とよぶ．したがって，特に均衡集合は0を含む．Aが均衡しているとき，$s\leqslant t$に対し，$sA\subset tA$が成り立つ．実際，$s=0$ならば自明であり，もし，$0<s\leqslant t$ならば，任意の$x\in A$に対し，$(s/t)x$は0とxを結ぶ線分上の点であるから，$(s/t)x\in A$である．よって，$sx\in tA$.

$\mathscr{X}$の部分集合Aが

$$\forall U\in\tau_0\ \exists s>0\ \forall t>s A\subset tU$$

を満たすとき，Aは有界（より正確には位相的に有界）であるという．有界な$U\in\tau_0$が存在するとき，$\mathscr{X}$は局所有界であるという．$U\in\tau_0$が有界で，$0<\delta_n\downarrow 0$ならば，($\delta_n U$）は0の局所基底となる．なぜならば，Vを0の任意の近傍とすると，Uの有界性より，$U\subset\delta_n^{-1}V$となるnが存在するからである．この結果より，特に$\mathscr{X}$が局所有界ならば，$\mathscr{X}$は第1可算公理を満たすこともわかる．

$\mathscr{X}$の部分集合Aが凸でありかつ均衡しているならば，Aは絶対凸であるという（Narici and Beckenstein, 2011）．Aが絶対凸ならば，$0\leqslant\lambda_i$, $\Sigma_{i=1}^n\lambda_i\leqslant 1$を満たす任意の$\lambda_1,\ldots,\lambda_n$に対して，

$$\lambda_1 A+\cdots+\lambda_n A\subset A$$

が成り立つ．これを示すには$0<\lambda_i$, $i=1,\ldots,n$と仮定してよい．そうするとAが凸集合であることから，

$$\left(\frac{\lambda_1}{\Sigma_{i=1}^n\lambda_i}\right)A+\cdots+\left(\frac{\lambda_n}{\Sigma_{i=1}^n\lambda_i}\right)A\subset A$$

であることがわかり，このこととAが均衡していること，さらに$\Sigma_{i=1}^n\lambda_i\leqslant 1$であることより，

$$\lambda_1 A + \cdots + \lambda_n A \subset \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \right) A \subset A$$

が得られる．

凸集合からなる 0 の局所基底が存在するならば，$\mathscr{X}$ は局所凸であるという．$\mathscr{X}$ が局所凸であることの必要十分条件は凸集合からなる基底が存在することである．$\mathscr{X}$ が局所凸ならば，絶対凸な近傍からなる 0 の局所基底が存在する．したがって，もしさらに$\mathscr{X}$ が局所有界ならば，有界かつ絶対凸な近傍からなる 0 の局所基底が存在する．例えば，ノルム空間は局所有界かつ局所凸である．

$\mathscr{X}$ の点列（x_n）がCauchy列であるとは，ネット（$x_m - x_n$）が 0 に収束することである．すなわち，任意の$U \in \tau_0$に対し，適当なn_0が存在して，すべての$m, n \geqslant n_0$に対し$x_m - x_n \in U$となるとき，（x_n）はCauchy列であるという．$\mathscr{X}$ の任意のCauchy列が収束するとき，$\mathscr{X}$ は完備であるという．正確には，任意のCauchyネットが収束するとき，$\mathscr{X}$ は完備であるといい，任意のCauchy列が収束するとき，$\mathscr{X}$ は点列完備であるという．しかし，第 1 可算公理を満たす$\mathscr{X}$ ならば両者の概念は一致し，本稿の主定理では$\mathscr{X}$ に第 2 可算公理を仮定するため，両者を区別する必要はない．そのため，点列完備のことを単に完備ということにする．

Banach空間において，絶対収束する級数は収束する．次の補題は位相ベクトル空間においても同種の結果が成り立つことを示している．

補題 2.1. $\mathscr{X}$ を完備な位相ベクトル空間，（x_n）をその点列とし，$0 < r_n$, $n = 1, 2, \ldots, \Sigma_n r_n < \infty$であるとする．もし，

$$x_n \in r_n U, \ n = 1, 2, \ldots \tag{2.3}$$

を満たす有界，絶対凸な$U \in \tau_0$が存在するならば，級数$\Sigma_n x_n$は収束する．

証明. U, r_nを仮定にある通りとする．$V\in\tau_0$を任意の近傍とすると，Uは有界であるから，十分小さい$\varepsilon>0$をとれば，

$$\varepsilon U\subset V \tag{2.4}$$

が成り立つ．$S_\ell=\Sigma_{n=1}^{\ell}x_n,\ \ell=1,2,\ldots$とおくと，$m>k$ならば，(2.3)より，

$$S_m-S_k=x_{k+1}+\cdots+x_m\in r_{k+1}U+\cdots+r_mU. \tag{2.5}$$

$\Sigma_n r_n$は収束するから，$\Sigma_{n=n_0}^{\infty}r_n<\varepsilon$となる$n_0$が存在する．もし$m>k\geqslant n_0$ならば，

$$\frac{r_{k+1}}{\Sigma_{n=n_0}^{\infty}r_n}+\cdots+\frac{r_m}{\Sigma_{n=n_0}^{\infty}r_n}\leqslant 1$$

である．このこととUが絶対凸であることから，$m>k\geqslant n_0$ならば，

$$\frac{r_{k+1}}{\Sigma_{n=n_0}^{\infty}r_n}U+\cdots+\frac{r_m}{\Sigma_{n=n_0}^{\infty}r_n}U\subset U.$$

となる．よって，

$$r_{k+1}U+\cdots+r_mU\subset\left(\sum_{n=n_0}^{\infty}r_n\right)U\subset\varepsilon U \tag{2.6}$$

が成り立つ．最後の包含関係は，Uが均衡していることと$\Sigma_{n=n_0}^{\infty}r_n<\varepsilon$であることによる．したがって，(2.5), (2.6), (2.4)から，

$$S_m-S_k\in V$$

がすべての$m>k\geqslant n_0$に対して成り立つ．すなわち，(S_ℓ)はCauchy列である．$\mathscr{X}$は完備であるから，(S_ℓ)は収束する．　□

3　定理と証明

以後，すべての確率変数は同じ確率空間（$\Omega,\mathscr{F},\mathbf{P}$）に定義されているものとする．

定義 3.1. $X,(X_n)$ はそれぞれ第 2 可算公理を満たす位相ベクトル空間 $\mathscr{X}$ に値をとる確率変数および確率変数列であるとする．任意の $U\in\tau_0$ に対して，

$$\mathbf{P}(X_n-X\notin U)\to 0 \quad (n\to\infty)$$

が成り立つとき，（X_n）は X に確率収束するといい，$X_n\xrightarrow{P}X$ で表す．

定義 3.2. （X_n）はそれぞれ第 2 可算公理を満たす位相ベクトル空間 $\mathscr{X}$ に値をとる確率変数列であるとする．任意の $U\in\tau_0$ に対して，

$$\mathbf{P}(X_n-X_m\notin U)\to 0 \quad (m,n\to\infty) \tag{3.1}$$

を満たすとき，（X_n）は Cauchy 列であるという．

注意 3.3. 1．定義 3.1,定義 3.2において，$\mathscr{X}$ に第 2 可算公理を仮定する理由は，確率変数同士の 1 次結合が確率変数であることを保証するためである．距離空間に可分性を要請する理由も（1.1）の $d(X_n, X)$ や（1.3）の $d(X_m,X_n)$ が確率変数になることを保証するためである．

2．$\mathscr{X}$ が距離 d によって距離付け可能であっても，すべての $x,y,z\in\mathscr{X}$ に対して，$d(x+z,\ y+z)=d(x,\ y)$ を満たす距離でない限り，定義 3.1の意味で（X_n）が X に確率収束することと，任意の $\varepsilon>0$ に対して，（1.1）が成り立つこととは一般に同値ではない．同様に，たとえ $\mathscr{X}$ が距離づけられていても，（X_n）が定義 3.2の意味で Cauchy 列であることと，任意の $\varepsilon>0$ に対して，（1.3）が成り立つこととは一般に同値ではない．

3．任意の$\varepsilon>0$に対して，(X_n)が（3.1）を満たすとき，単に「(X_n)はCauchy列である」とはいわず，“Cauchy in probability”もしくは“fundamental in probability”の適訳を用意すべきであろうが，本稿では定義 3.2の意味でのCauchy列しか扱わないため，任意の$\varepsilon>0$に対して，（3.1）が成り立つとき，単に「(X_n)はCauchy列である」という．

定理 3.4. $X,(X_n)$はそれぞれ第2可算公理を満たす位相ベクトル空間$\mathscr{X}$に値をとる確率変数および確率変数列であるとする．このとき，以下の（i），（ii），（iii）が成り立つ．

（i） $X_n \to X$ a.s.ならば，$X_n \xrightarrow{P} X.$

（ii） $\forall (n_k) \subset (n) \exists (n_{k(i)}) \subset (n_k) X_{n_{k(i)}} \to X$ a.s.ならば，$X_n \xrightarrow{P} X.$

（iii）$\mathscr{X}$は局所有界であるならば，（ii）の逆が成り立つ．

証明. （i）$X_n \to X$ a.s.であることは，任意の$U \in \tau_0$に対して，$\mathbf{P}(X_n - X \notin U$ i.o.$) = 0$であることと同値であるから，

$$\limsup_n \mathbf{P}(X_n - X \notin U) \leqslant \mathbf{P}(X_n - X \notin U \text{ i.o.})$$

より，$\lim_n \mathbf{P}(X_n - X \notin U) = 0$である．

（ii）$\forall (n_k) \subset (n) \exists (n_{k(i)}) \subset (n_k) X_{n_{k(i)}} \to X$a.s.であるとする．$X_n \xrightarrow{P} P$を示すために，これが成り立たないと仮定して矛盾が生じることを示す．$X_n \xrightarrow{P} P$でない，すなわち，ある適当な$U \in \tau_0$が存在して，

$$\mathbf{P}(X_n - X \notin U) \not\to 0$$

であると仮定すると，適当な$\delta>0$と適当な部分列(X_{n_k})が存在して，

$$\mathbf{P}(X_{n_k} - X \notin U) \geqslant \delta, \quad k=1,2,\ldots \tag{3.2}$$

仮定より，この部分列はXに概収束する部分列（$X_{n_{k(i)}}$）をもつ．(i)より，$X_{n_{k(i)}}\xrightarrow{P}X$（$i\to\infty$）である．しかし，(3.2)は

$$\mathbf{P}(X_{n_{k(i)}}-X\notin U)\geqslant\delta,\quad i=1,2,...$$

を含意するから，$X_{n_{k(i)}}\xrightarrow{P}X$（$i\to\infty$）に矛盾する．

(iii) $\mathscr{X}$ は局所有界であるから，有界な$U\in\tau_0$が存在する．$X_n\xrightarrow{P}X$とすると，(n)の任意の部分列(n_k)に対し，次のようなさらなる部分列$(n_{k(i)})$をとることができる：すべての$k\geqslant k(i)$に対して，

$$\mathbf{P}(X_{n_k}-X\notin i^{-1}U)<2^{-i}.$$

よって，$\Sigma_i\mathbf{P}(X_{n_{k(i)}}-X\notin i^{-1}U)<\infty$が成り立ち，Borel-Cantelliの補題より，

$$\mathbf{P}(X_{n_{k(i)}}-X\notin i^{-1}U\ \text{i.o.})=0$$

である．すなわち，ほとんど全ての$\omega\in\Omega$に対し，有限個のiを除いて$X_{n_{k(i)}}(\omega)-X(\omega)\in i^{-1}U$が成り立つ．$U$は有界であるから，任意の$V\in\tau_0$に対し，十分大きいすべての$i$をとれば，$i^{-1}U\subset V$である．かくして，ほとんど全ての$\omega\in\Omega$に対し，$X_{n_{k(i)}}(\omega)-X(\omega)\to 0$が成り立つことがわかる．　□

定理 3.5. （X_n）はそれぞれ第2可算公理を満たす位相ベクトル空間$\mathscr{X}$に値をとる確率変数列であるとする．

(i)（X_n）が$\mathscr{X}$に値をとる確率変数Xに確率収束するならば，（X_n）はCauchy列である．

(ii) $\mathscr{X}$ は完備，局所有界，局所凸であるとする．（X_n）がCauchy列ならば，概収束する適当な部分列が存在する．

証明. (i) $X_n \xrightarrow{P} X$ であるとする．任意の $U \in \tau_0$ に対して，加法（2.1）の連続性より，$V+V \subset U$ となる近傍 $V \in \tau_0$ を選ぶことができるので，

$$\mathbf{P}(X_n - X_m \notin U) \leqslant \mathbf{P}(X_n - X \notin V) + \mathbf{P}(X - X_m \notin V) \to 0,\ m,n \to \infty$$

が成り立つ．

(ii) (X_n) はCauchy列であると仮定する．$\mathscr{X}$ は局所有界，局所凸であるから，有界で絶対凸な近傍 $U \in \tau_0$ が存在する．$k_1 = 1$ とし，k_2 を

$$\forall m,n \geqslant k \mathbf{P}(X_n - X_m \notin 2^{-2}U) < 2^{-2}$$

を満たす最小の $k > k_1$ と定義する．さらに k_3 を

$$\forall m,n \geqslant k \mathbf{P}(X_n - X_m \notin 2^{-3}U) < 2^{-3}$$

を満たす最小の $k > k_2$ と定義する．同様に帰納的に定義して，$k_1, k_2, \ldots$ を得る．かくして

$$\sum_i \mathbf{P}(X_{k_{i+1}} - X_{k_i} \notin 2^{-i}U) < \sum_i 2^{-i} < \infty$$

となるから，Borel-Cantelliの補題より，

$$\mathbf{P}(X_{k_{i+1}} - X_{k_i} \notin 2^{-i}U \text{ i.o.}) = 0$$

が成り立つ．ほとんどすべての $\omega \in \Omega$ に対し，有限個の i を除けば，$X_{k_{i+1}}(\omega) - X_{k_i}(\omega) \in 2^{-i}U$ であるから，補題 2.1より，$\mathbf{P}(N) = 0$ となる適当な $N \in \mathscr{F}$ の外で，$\Sigma_i (X_{k_{i+1}} - X_{k_i})$ は収束する．そこで，

$$X(\omega) = \begin{cases} X_1(\omega) + \sum_{i=1}^{\infty} (X_{k_{i+1}}(\omega) - X_{k_i}(\omega)), & \omega \in N^c, \\ 0, & \omega \in N \end{cases}$$

と定義すると，X_{k_i} は X に概収束する． □

参考文献

Folland, G.B.（1999）Real Analysis, 2nd ed. John Wiley & Sons, New York.

Rudin, W.（1991）Functional Analysis, 2nd ed. McGraw-Hill, New York.

Narici, L. and Beckenstein, E.（2011）Topological Vector Spaces, 2nd ed. CRC Press, Boca Raton.