数学の教科書をより有効的に使う力の育成に関する研究（１）

―算数・数学的活動の視点から―

平岡　賢治[*]　　野本　純一[**]

Study of Developing the Ability to use Mathematics Textbooks Effectively (1)

― The Perspective of Mathematical Activities ―

Kenji HIRAOKA[*]　　Junichi NOMOTO[**]

１．はじめに

現行の中学校学習指導要領数学科の目標には,「数学的活動を通して・・・(中略)・・・学的活動の楽しさや数学のよさを実感し，それらを活用して考えたり判断したりしようとする態度を育てる」(文部科学省，2008）と示され，また，小学校算数科・高等学校数学科においても，それぞれの目標に同様なことが示されている．われわれ教師も算数・数学的活動を取り入れた授業を日々実践している．しかし，授業で扱う問題や学習内容が教師にとって平易なものであっても，児童・生徒が考えようとしても内容が理解できないもの，結果として，問題解決の方略が見つけられないものになる授業をすることがよくある．例えば，生徒は，具体的な偶数を表すことはできるが，文字を使って表すことは難しい．このことについて，ウィケルグレン（1980）は，問題解決の視点から,「偶数 n を整数 m を用いて表すと，n=2m となるが，これは，偶数という言葉の中に直接的には示されていない．このことは，子どもの既習内容である記憶によって導くことになる」と述べている．

そこで授業では，算数的活動･数学的活動を促す方略の 1 つとして，児童・生徒への発問を通して，図・式・グラフなどで表現させ，既習の内容を用いて考えさせることがある．

しかし，具体的な事象からすぐに図・式・グラフなどで表すことが児童・生徒にとって難しい場合もよくあるから，操作などを通して問題の理解などを図っていく．

操作について，それは Piaget の「発生的認識論」における基本概念であり，多くの数学

*長崎大学教育学部数理情報講座　**長崎市立式見中学校

教育の研究で用いられている．小山（1988）は，操作を算数・数学の学習指導に取り入れるねらい及び効果として次の 6 点をまとめており，その教授学的効果は高い．

① 動機づけに役立つ
② 概念形成あるいはシェマの形成に役立つ
③ 数学的原理や法則の理解に役立つ
④ 筋道立てて考えたり，数学的な考えを身につけたりするのに役立つ
⑤ 問題解決に役立つ
⑥ ことばでは難しい表現や評価に役立つ

しかし，操作を行う上で危惧する面もある．平林（1982）が指摘しているように，「華やかに展開されている操作活動も，あらかじめそれと数学的概念・知識・技能とのつながりが，きめ細かく検討されていなければ，きわめて空しい教授学的努力に終わってしまう」（p.10）ことである．そして，われわれ教師が操作などの活動を通した授業を行う上で大切なことは，具体的操作や計算などの式操作から導かれることや，その理解のプロセスを生徒の算数・数学的活動の視点から分析していくことであると言える．

算数・数学的活動を視点においた研究は多く行われているが，授業構成の研究については，平岡（1994），小山（2006）などの研究があり，それらの研究では，1 時間の授業における算数・数学的活動の相を明確化し，授業を構成している．本稿で行っていく研究は授業を構成する前の教材研究に関するものであり，それは，Shulman の言う Pedagogical Content Knowledge（以下 PCK と略す）に関係していくものである．Shulman(1987)は PCK を「教授学習内容と教授法が結合したものであり，教師に独特のものである．また，教師の持つ専門的理解の特別な形式」(p.8)としている．教師は効果的な授業を展開するためには，数学の知識のみではなく，その知識が生成される過程などを認識していなければならない．このような教師の知識を Shulman は PCK として表現しており，算数・数学的活動の視点からの授業づくりを進めていく上でも，数学授業における PCK を具体的に考察していくことは有意義であると考える．

そこで本稿は，数学授業における PCK の 1 つの具体的な視点について研究を行っていくものであり，数学教師が授業で使用する教科書の問題を算数・数学的活動の視点から理解する方略について提案する．具体的には，算数・数学的活動を理解する枠組みとして，平岡・宮内（吉田）（2006）が設定した「算数・数学的活動を促す 5 段階」,「算数・数学的活動の視点に立った授業理解の枠組み」をもとに，中学校 1 年生で学習する 1 次方程式の学習内容を生徒の数学的活動の視点から分析していく．その上で，教師が教科書の問題を理解する方略を提案する．

２．算数・数学的活動の視点に立った授業理解の枠組み

筆者たちは，図の「算数･数学的活動の視点に立った授業理解の枠組み」において，例えば,「具体的な事象」→「具体的な事象の数理性」の段階では，具体的な事象を操作活動や図･表･グラフなどで表すことを通して，算数・数学の言葉を使って説明できるようにする．これは，具体的な事象の中に，数理性を見いだす算数･数学的活動として不可欠のも

のである．また，それぞれの段階において算数･数学的な活動の視点から捉えたものが「算数･数学的活動の 5 段階」である．

「算数･数学的活動の 5 段階」

① 数学化[1]の活動

具体的な場面における問題の数学化（具体的な事象を数理的に捉える）活動

② 定式化[1]（課題の設定）の活動

具体的な事象を数学的に定式化（数学的な課題を設定する）活動

③ 考察・処理の活動

既習の知識や数学的な考え方を基にした数学的な考察・処理活動

④ 反省・適用・応用の活動

数学的な思考過程や数学的に得られた事柄をより一般的な場面において反省したり（振り返ったり），適用したり，応用したりする活動

⑤ 発展・創造・文化の享受の活動

さらなる数学的な方法の広がりを導く発展的・創造的な活動，論理的体系性をもった数学文化を享受する活動

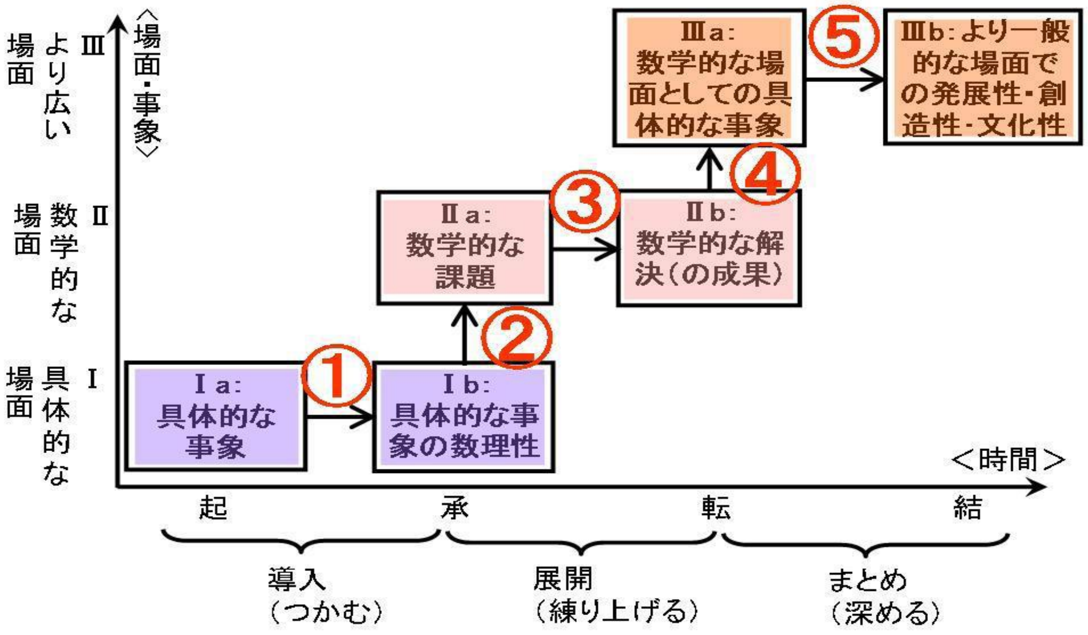


図　算数・数学的活動の視点にたった授業理解の枠組み

また，「算数・数学的活動の視点にたった授業理解の枠組み」では，これまで筆者たちが実践または観察した授業内容を分析した結果，授業における算数・数学的活動には次の 3 つの段階（Ⅰ～Ⅲ）があると捉えることができる．すなわち，第Ⅰ，Ⅱ段階ではそれぞれ，具体的な事象，数学的な事象を対象とした算数・数学的活動が，また第Ⅲ段階では，数学的な場面の中で具体的な事象を振り返ったり，より一般的な場面で学習内容を発展させたりする算数・数学的活動が行われていると考えることができる．

この授業理解の枠組みを教師がもつべき教科書をより有効的に使う方法として捉えた．とりわけ，第Ⅰ段階の数学化の活動，第Ⅱ段階の定式化の活動を児童・生徒の立場に立って具体的にしていくことが，数学的活動を促した授業設計を行う上で大切であると考えるので，それらを中心に問題を理解していく．

３．具体的事例－１次方程式の利用について－

平成 21 年度の全国学力・学習状況調査では以下の問題が出題されている．

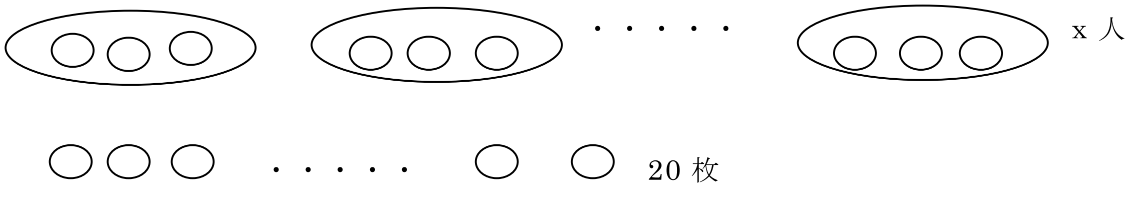
> **問題**
>
> 折り紙を何人かの生徒に配るのに， 1人に3枚ずつ配ると20枚余ります．また，1人に5枚ずつ配ると2 枚たりません．生徒の人数を求めるために，生徒の人数をx 人として，方程式をつくりなさい．
>
> **考え方**
>
> 方程式をつくるために，xを使って，上の**問題**の数量のうち，$\boxed{\qquad\qquad}$ を2通りの式で表すと，$3x+20$ と $5x-2$ になります．
>
> この2つの式が等しいので，方程式は $3x+20=5x-2$ です．

この問題の正答率は 36.3%，無答率は 17.9%であった．解法のプロセスは問題文の「考え方」に示してあるが，正答率はかなり低く，無答率はかなり高い．本節では，この問題を筆者たちの「授業理解の枠組み」の視点から考察する．

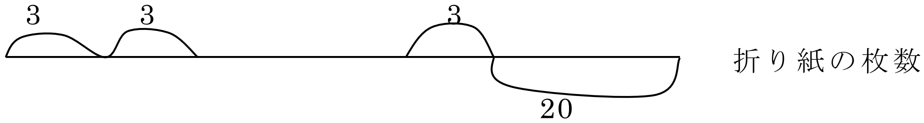
① <u>数学化の活動</u>

1 人に 3 枚ずつ x 人に配ると 20 枚余る折り紙の枚数の図表示を考える．

● マル図を用いると，



● 線分図を用いると，



この結果，折り紙の枚数は，$3x+20$ 枚になる．

同様に，1 人に 5 枚ずつ x 人に配ると 2 枚たりない折り紙の枚数の図表示を考えると，折り紙の枚数は，$5x-2$ 枚と表すことができる．

② <u>定式化の活動</u>

「考え方」にもあるように，折り紙の枚数がそれぞれの配り方で 2 つの式に表すことができたので，方程式

$$3x+20=5x-2$$

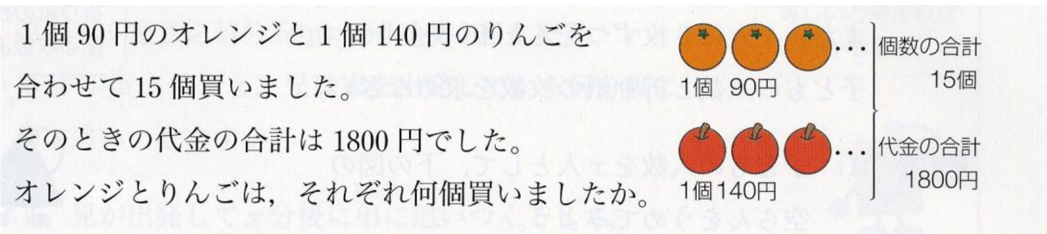
を求めることができる．

このように，①<u>数学化の活動</u>で，折り紙の枚数を図表示することを通して，配る人数 x で 2 通りの式で表すことができる．次に，<u>②定式化の活動</u>で，2 つの式が等しい数量を示していることを使って方程式を作る．問題文の「考え方」には，このような数学的活動が記述されている．多くの教科書には，方程式の単元において「求める数量を x で表して，方程式を解く」と書いてある．しかし，この調査結果は，問題場面の理解のためは，文章題だけでは不十分である実態を示している．筆者たちは，図や表・グラフなどの視覚的な表現をする活動が重要であること，そして，これが数学的な表現をするために大きな役割を果たしていると考えている．さらに，式・方程式・関数などの数学を使って表し，処理することが，数学的活動を取り入れた授業づくりに繋っていくことになる．

実際，吉野ら（2009）らは，文章題を図・表･グラフなどに表現するイメージ能力と文章題解決力の関係を調査し，文章を適切な図に表現できる子どもは，問題に正答できる傾向が高いことを明らかにしている．また，イメージ能力には複数の尺度があり，文章題の解決に必要となるイメージ能力は，普段からイメージ化して考えることのできる常用性と，イメージを状況に合わせて変形することができる操作能力であることも示している．

以上のことを踏まえ，1 次方程式の指導でよく扱われる「個数の問題」，「過不足の問題」，「追いつき算の問題」について，算数・数学的活動の視点から理解していく．

（問題１）


1 個 90 円のオレンジと 1 個 140 円のりんごを合わせて 15 個買いました。
そのときの代金の合計は 1800 円でした。
オレンジとりんごは，それぞれ何個買いましたか。

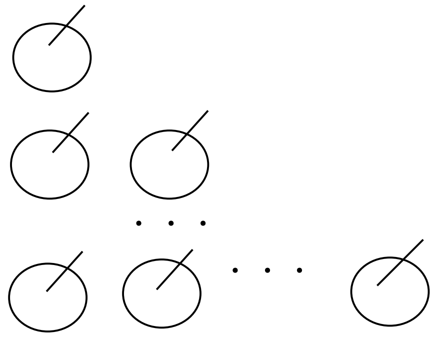
（新しい数学 1　p. 93）

① 数学化の活動

代金の合計は 1800 円であることをより明確にするために，オレンジの値段とりんごの値段に注目する．文字と式の学習を踏まえて，次のような具体的な計算を通して，

オレンジの値段は，90×（オレンジの個数），りんごの値段は，140×（りんごの個数）で表されることを確認するとともに，例えば，オレンジを x 個買ったならば，オレンジの値段は，90x と表すことができる．

オレンジの値段



1 個の値段　　90×1＝90 円

2 個の値段　　90×2＝180 円

x 個の値段　　90×(オレンジの個数)
　　　　　　　＝90× x
　　　　　　　＝90x

② 定式化の活動

「そのときの代金の合計は 1800 円でした」ということから，

90×(オレンジの個数)＋140×(りんごの個数)＝1800

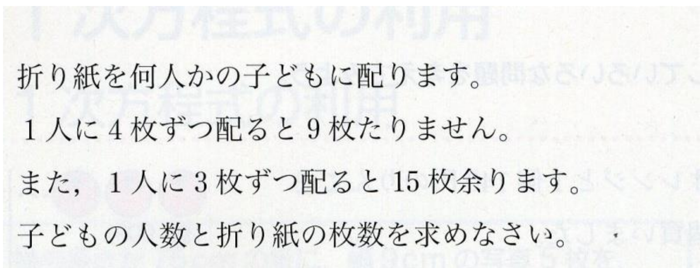
ということばの式が立てられる．「オレンジとりんごの個数は 15 個である」から，りんごの個数は，全部の個数からオレンジの個数をひいた数であるということ導き，オレンジの個数を x 個とおいたならば，りんごの個数は(15－ x) 個と表すことができるということを導く．

そして，以上から，

90× x ＋140(15－ x)＝1800

となり，1 次方程式を解く問題になる．

（問題２）



折り紙を何人かの子どもに配ります。
１人に４枚ずつ配ると９枚たりません。
また，１人に３枚ずつ配ると 15 枚余ります。
子どもの人数と折り紙の枚数を求めなさい。

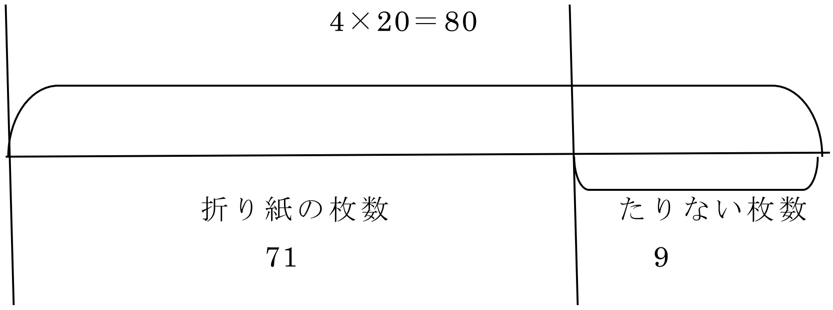
（教科書　新しい数学 1　p. 94）

① 数学化の活動

（ア）．生徒の人数を具体的な数に置き換えて，折り紙の枚数を計算する．

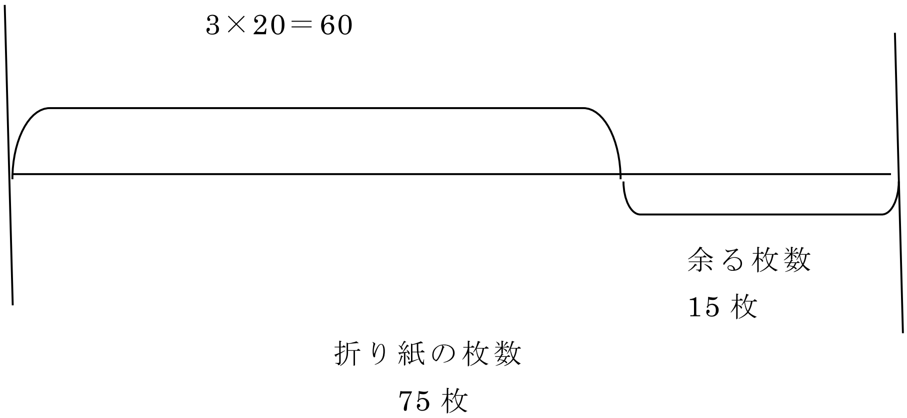
例えば，生徒の人数が 20 人ならば，

「1 人に 4 枚ずつ配ると 9 枚たりません」



⇒4×20－9＝71

「1 人に 3 枚ずつ配ると 15 枚あまります」



⇒3×20＋15＝75

計算した結果が違うから，20 人ではないということがわかる．

また，このような計算をいくつか続けていき，折り紙の枚数は，「4×(生徒の人数)－9」と「3×(生徒の人数)＋15」という 2 つの式で表すことができることを理解する．

(ｲ)．折り紙の枚数を具体的な数に置き換えて，生徒の人数を計算する．

例えば，折り紙の枚数が 30 枚ならば，「1 人に 4 枚ずつ配ると 9 枚たりません」ということは，1 人に 4 枚ずつ配るときは，折り紙は 39 枚必要になる．その枚数を 4 で割ると，生徒の人数が出てくるから

$$(30+9)\div 4=39\div 4=3.75$$

答えは整数でないから，答えではない．

例えば，折り紙の枚数が 40 枚ならば，「1 人に 3 枚ずつ配ると 15 枚あまります」ということは，1 人に 3 枚ずつ配るときは，折り紙は 25 枚必要になる．その枚数を 3 で割ると，生徒の人数が出てくるから

$$(40—15)\div 4=25\div 4=6.25$$

答えは整数でないから，答えではない.

このような計算をいくつか続けていき，生徒の人数は，「$\dfrac{(\text{折り紙の枚数})+9}{4}$」と「$\dfrac{(\text{折り紙の枚数})-15}{3}$」という２つの式で表すことができることを理解する.

②定式化の活動

（ア）の場合,「4×(生徒の人数)－9」と「3×(生徒の人数)＋15」という２つの式は，折り紙の枚数をどちらとも表していることを確認した上で，

4×(生徒の人数)－9＝3×(生徒の人数)＋15

ということばの式で表す．そして，生徒の人数を x 人とおくと，

$$4x-9=3x+15$$

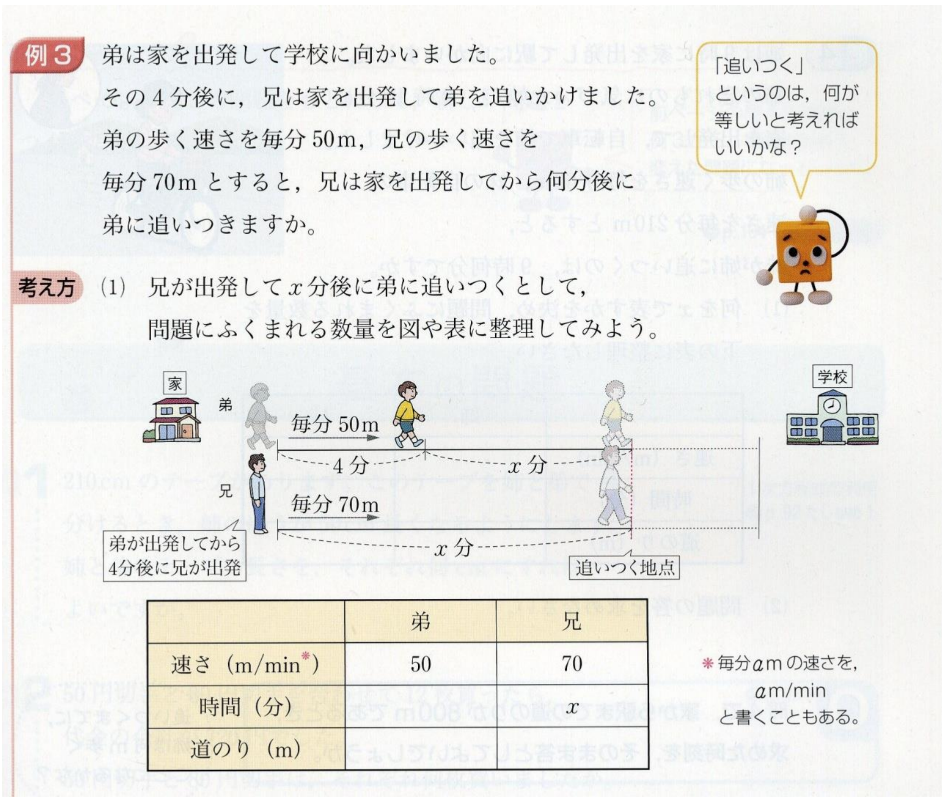
となり，１次方程式の問題を解くことになる.

（イ）の場合についても，同様にして，折り紙の枚数を x 枚とおくと，

$$\frac{x+9}{4}=\frac{x-15}{3}$$

となり，１次方程式の問題を解くことになる.

（問題３）


例3　弟は家を出発して学校に向かいました。その4分後に，兄は家を出発して弟を追いかけました。弟の歩く速さを毎分 50m，兄の歩く速さを毎分 70m とすると，兄は家を出発してから何分後に弟に追いつきますか。

考え方　(1)　兄が出発して x 分後に弟に追いつくとして，問題にふくまれる数量を図や表に整理してみよう。

	弟	兄
速さ（m/min*）	50	70
時間（分）		x
道のり（m）		

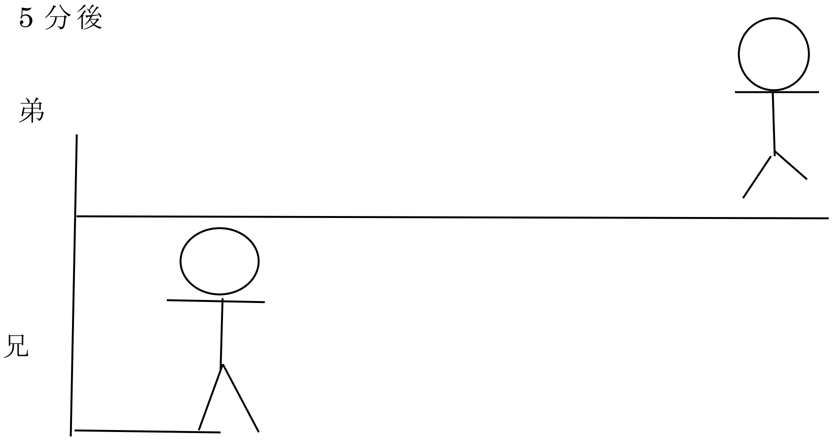
*毎分 am の速さを，am/min と書くこともある。

（教科書　新しい数学１　p. 95）

① 数学化の活動

まず，2 人の動きを次のように具体的に提示し，問題場面の情景を具体的につかんでいく．

5 分後



そして，下のような表を使って，兄が弟に追いつくという感覚を数字を通して明確化する．

	1	2	3	4	5	6	7	8	・・・
弟	50	100	150	200	250	300	350	400	・・・
兄	0	0	0	0	70	140	210	280	・・・
差	50	100	150	200	180	160	140	120	・・・

このような計算を通して,「兄が出発してから，1 分ごとに 20 mずつ 2 人の差は縮まっていること」「追いつくということは，弟が動いた道のりと兄が動いた道のりが等しい」ことなどを考える．

② 定式化の活動

次に「兄が出発してから何分後に弟に追いつきますか？」ということから，兄が出発してから x 分後に追いつくとして，上の表を参考に考える．

兄の時間					1	2	3	・・・	x
弟の時間	1	2	3	4	5	6	7	・・・	x+4
弟	50	100	150	200	250	300	350	・・・	50(x+4)
兄	0	0	0	0	70	140	210	・・・	70x
差	50	100	150	200	180	160	140	・・・	

上の表から明らかなように，兄の時間と弟の時間には 4 分の差があるのだから，兄の時間が x 分のときに, 弟の時間は x+4 分と表すことができ, 従って， 道のりも，弟は 50(x+4)，兄は 70x と表すことができる．2 人が追いつくというのは，歩いた道のりの長さが等しいということから，

$$50(x+4)=70x$$

という 1 次方程式を立式することができる．

５．まとめ

本稿では，平岡・宮内（吉田）（2006）が設定した「算数・数学的活動を促す 5 段階」，「算数・数学的活動の視点に立った授業理解の枠組み」を教師がもつべき教科書をより有効的に使う方法として捉えた．そして，具体的事例の考察を通して，教師の教科書の問題理解の方略として，次の 2 点を提案する．

○ 数学化の活動として，操作や図表示，帰納的な考え方などの数学的活動を積極的に取り入れること

○ 定式化の活動として，数学化で得られた結果を既習内容と関連させることや数学的不変性の考察などを通して数学的性質を見いだすこと

このために，問題文については，問題文の数学的構造をとらえさせるために，具体的な数値で計画させる．実際，前節の具体的事例においても，求める量がある値だと仮定して，問題文を図表示するなどして，数学的構造をとらえさせている．これが，数学化への過程であり，定式化につながる前段階になっている．

われわれ数学教師は，数学的形式やそれらの操作に関する方略になれ親しんでいる．しかし，授業においては，児童・生徒が初めに行う形式化されていない数学的活動を，より洗練された数学的概念に形成することが大切である．David ら（2008）も，教師教育の観点から，形式化されていない表現や形式化につながる表現を具体的に調べることが，学習過程や生徒が用いる方略に考える際の支えとなると指摘しており,その重要性が伺える．

従って，教師は，今まで児童・生徒が学習した中で使うであろう表現を教科書などの中から具体的に把握し，授業づくりを行っていくことが大切である．本稿で行ったことは，その一つの試みである．今後は更なる研究を通して，より教師に役立つ視点を作っていきたい．

註

１）数学化・定式化という語に関する筆者らの規定について述べる．Freudenthal（1968）は，数学化について，「人間が学ばなければならないものは，閉じた体系としての数学ではなく，活動としての数学，つまり，現実を数学化するプロセスであり，可能ならば，数学を数学化するプロセスである．」（p.7）と述べ，数学化を数学を創り出すプロセスを総称する言葉として捉えられている．また，定式化について，数学的モデル化の過程の中でよく使われる語であり，例えば，三輪（1982）は，それを「その事象に光を当てるように，数学的課題に定式化する」（p.286）と述べている．

それに対し，筆者らは，数学化を「具体的な場面における問題の数学化（具体的な事象を数理的に捉える）活動」，定式化を「具体的な事象を数学的に定式化（数学的な課題を設定する）活動．理想化・単純化・理想化ともいえる．」と規定した．その理由は，数学的活動の視点に立った授業づくりでは,数学的事象の各要素を数理的に具体的に捉えることと，数理的な視点で捉えたことを数学的な課題に設定することは異なる相であり，それぞれを意識して捉えていくことが大切であると考えたからである．したがって，筆者らは，数学化・定式化の語について狭義の意味で規定している．

引用・参考文献

ウェン・A・ウィケルグレン，矢野健太郎訳（1980),『問題をどう解くか―問題解決の理論』，秀潤社.

国立教育政策研究所　教育課程研究センター（2009),『平成 21 年度　全国学力・学習状況調査　解説資料』.

小山正孝（1988),「数学教育における操作的活動と思考実験」,『教育学研究紀要』，第二部，34，255-260.

小山正孝（2006),「数学理解の 2 軸過程モデルに基づく授業構成の原理と方法」,『日本教科教育学会誌』，28(4)，61-70.

平岡賢治（2004),「数学的活動の視点をあてた授業構成に関する研究」,『全国数学教育学会誌　数学教育学研究，10，21-28.

平岡賢治・宮内（吉田）香織（2008),「複式教育の算数科授業創りにおける「算数・数学的活動の視点に立った授業理解の枠組み」の活用」,『研究論文集－教育系・文系の九州地区国立大学間連携論文集』，1（1）.

平林一栄（1982),「操作的活動とは何か－今なぜ注目されるのか―」,『授業研究』，239，5-11.

藤井斉亮ほか（2012)，新しい数学１，東京書籍.

三輪辰郎（1983),「モデル化」,『現代教育学の基礎』，筑波大学教育学研究会編，286－289

文部科学省（2008),『中学校学習指導要領解説数学編』，教育出版.

吉野巌（2009).「PB049 イメージ能力と数学文章題解決力との関連：心的回転課題，VVIQ 質問紙，VVQ 質問紙を用いて」,『日本教育心理学会総会発表論文集』, 51,148.

David C. Webb, Nina Boswinkel, Toruus Dekker (2008). Beneath the Tip of the Iceberg：Using Representations to Support Student Understanding . Mathematics Teaching in the Middle School, 14(2),　110-113.

Freudenthal, H (1968), Why to teach mathematics so as to be useful. Educational Studies in Mathematics, 1, 3-8.

Shulman, L.S, (1987), Knowledge and Teaching：Foundations of The New Reform. Harvard Educational Review, 57(1), 1-22.

*本稿は,

平岡賢治・野本純一（2014）. 数学の教科書をより有効的に使う力の育成に関する研究（1）－算数・数学的活動の視点から－. 長崎大学教育学部紀要. 教科教育学, 54, 1-10.

に対する査読の結果，加筆・修正を加えたものである.