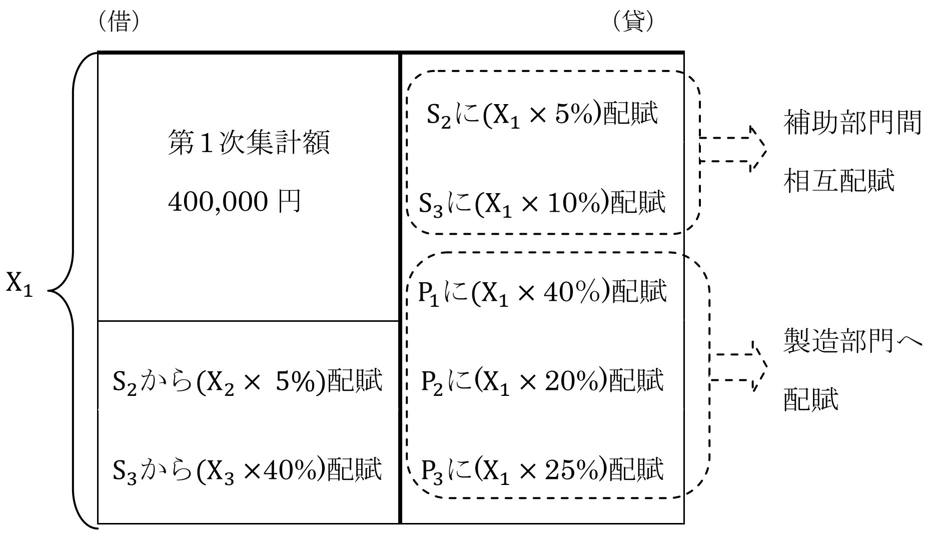
われた。その技法には、(途中略) 間接費、補助部門費を配賦するモデル [4] (途中略) などもある。(途中略) O.R.の文献は大学研究者のみでほとんど開発され、その他の学究者へは単に伝達されたに過ぎなかった。大学研究者は、その考え方を実行するためとか実務上の意義を現場管理者に効果的に伝えるためでさえ、実際の企業を対象とすることに実質的にほとんど注意を払わなかった。(途中略) 従って、1980 年までに不幸な状態に到達してしまった。大学の研究者は、単純で型にはまった生産環境において、管理会計の高度に精巧なモデルを開発することに忙しかった。研究者が実際の企業現象によって動機づけられることもなかったし、当今の企業からのデータで検証されることもなかったし、検証可能でさえなかった。」(pp.157-163) つまり当時、現場管理者と大学研究者の原価計算に対する認識の乖離が大きくなっていたのである。

小林(1993)によると、「1980 年代になると、それまでの伝統的な製品原価計算やコスト・マネジメントは、グローバルな競争の激化やそれに関連する経営意思決定環境の複雑化に対して十分に対応できていないという認識が一般的に広まってきた。」(p.72) Johnson and Kaplan(1987)では、60 年以上にわたって用いられてきた管理会計の諸技法が当時の経営環境下で適合性を失っていることを指摘するとともに、研究者も現場へ出かけ、創造的で革新的な経営が行っている実務を観察すべきことを主張している。その結果、「管理会計研究の流れが原価概念に関していえば、真実原価(true costs)を追求することに対する研究が減少する一方で、特定の意思決定状況に適合的な原価概念を利用することに重点が置かれるようになったのである。」(加登(1989)p.3)

「利用者意思決定モデル・アプローチが今日それほど評価されていないもっとも大きな原因は、計量的技法を用いて管理会計・原価計算問題を考察しようとする問題意識が受け入れられていないためではなく、実践のニーズを反映せずに机上の研究のみが先行した当時の研究方法にある。したがって、実践のニーズを反映した計量的技法の活用は否定されたわけではなく、今日でも遂行されるべき性質のものだと思われる。」(加登(1989)p.13)「計量的意思決定モデルを活用するにあたっては、コンピュータを利用した経営情報システム(computer-based management information systems)の使用が前提となるが、計量的技

[4] 補助部門費配賦問題の行列代数による連立方程式の解法もそのひとつである。利用者意思決定モデル・アプローチで開発されたモデルとその手法としては、他に次のものがある。製品組み合わせ決定（線形計画法、数理計画法)、多品種製品の CVP 分析（線形計画法、数理計画法)、不確実性下の CVP 分析（統計・確率、決定理論)、差異調査意思決定モデル（ベイズ統計学、管理図表、回帰分析)、共通費の配分（数理計画法、ゲーム理論)、コスト・ビヘイビアの分析モデル（回帰分析、時系列分析）(加登(1999)p.19)

図 2-1　S_1部門費



（出典）筆者作成。

3.　Williams and Griffin および Churchill のモデル

ここで示す計算法は、連立方程式として多くのテキスト等に紹介されている標準的な解法[5]であって、Williams and Griffin(1964)がはじめて提示したもの[6]とされている。この配賦法はChurchill(1964)によって拡張されている。以下W&G/Cモデルとする。W&G/Cモデルは以下のとおりである。

いま、X_i (i = 1,2,3)は、他の補助部門からのサービス等の提供[7]に係る原価配賦を受け取った後における補助部門S_iの原価を表すものとする。すると、S_i 部門へインプットされた原価総額X_i は以下の式で表わされる。

X_i =（第１次集計されたS_i部門費）＋（他の補助部門からS_i 補助部門への配賦額）

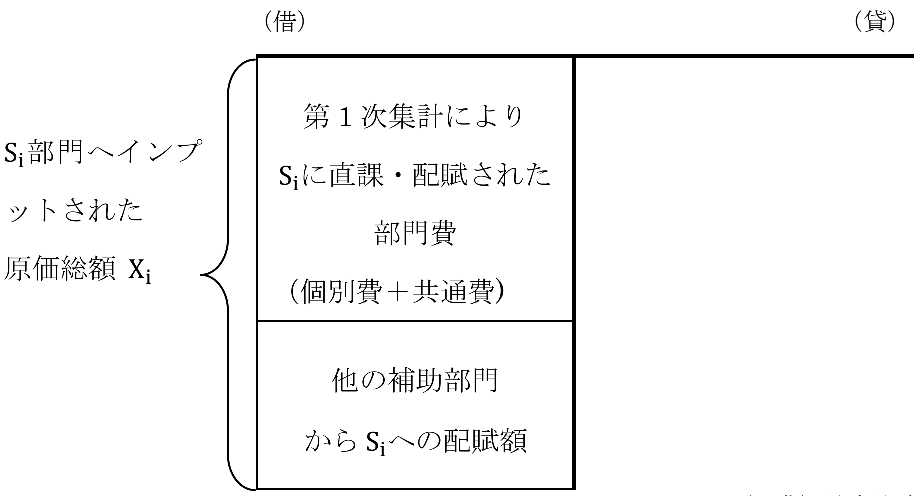
これを T 勘定で示したのが図 3-1 である。

5）門田(2002)pp.83-86、岡本(2000)pp.237-239, 廣本(1997)pp.143-144、小林(1996)pp.97-98、小林(1988)pp.316-318、櫻井(1993)pp.90-91、における連立方程式の解法は W&G/C モデルである。

6）門田（1974)p.59。

7）第１次集計において企業外部から提供されたサービスのうち、当該部門に直課・配賦されるべきものはすでに配賦済みであることから、他の部門よりの配賦は、外部から提供されたサービス等の直接の割当ではなく、当該他の部門で創造されたサービス等の提供である。

図 3-1　S_i部門費



（出典）筆者作成

そこで、表 2-1、表 2-2 より以下の連立方程式が成立する。

$$S_1 \ :\ X_1 = 400{,}000 + 0.05X_2 + 0.40X_3 \cdots (1)$$

$$S_2 \ :\ X_2 = 200{,}000 + 0.05X_1 + 0.30X_3 \cdots (2)$$

$$S_3 \ :\ X_3 = 50{,}000 + 0.10X_1 + 0.10X_2 \cdots (3)$$

この(1)～(3)の連立方程式を解いて X_i $(i = 1,2,3)$ の値を求める。

次に、この $X_i(i = 1,2,3)$ の値を用いて、製造部門 $P_i(i = 1,2,3)$ の原価 $Y_i(i = 1,2,3)$ を求める。ここで、

Y_i =（第 1 次集計されたP_i 部門費）＋（各補助部門からP_i製造部門への配賦額）

という関係が成り立つことから以下の連立方程式が成立する。

$$P_1 \ :\ Y_1 = 2{,}000{,}000 + 0.40X_1 + 0.20X_2 + 0.20X_3 \cdots (4)$$

$$P_2 \ :\ Y_2 = 1{,}200{,}000 + 0.20X_1 + 0.60X_2 + 0.05X_3 \cdots (5)$$

$$P_3 \ :\ Y_3 = 800{,}000 + 0.25X_1 + 0.05X_2 + 0.05X_3 \cdots (6)$$

式(1)～(3)より算出した $X_i\,(i=1,2,3)$ の値を式(4)～(6)に代入し $Y_i(i=1,2,3)$ の値を求めることができる。以下、方程式を解きやすくするために行列を用いて考察を行う。

式(1)～(3)を行列で記述すると、

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 400{,}000 \\ 200{,}000 \\ 50{,}000 \end{pmatrix} + \boxed{\begin{pmatrix} 0 & 0.05 & 0.40 \\ 0.05 & 0 & 0.30 \\ 0.10 & 0.10 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix}} \quad \cdot\cdot\cdot \quad (7)$$

補助部門間相互配賦額の計算部分

ここで、$\boldsymbol{X}$、$\boldsymbol{F}$を列ベクトル、$\boldsymbol{A}$を行列として、

$$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix}、\quad \boldsymbol{F} = \begin{pmatrix} 400{,}000 \\ 200{,}000 \\ 50{,}000 \end{pmatrix}、\quad \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0.05 & 0.40 \\ 0.05 & 0 & 0.30 \\ 0.10 & 0.10 & 0 \end{pmatrix}$$

とおくと、式(7)は次のようになる。

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{F} + \boldsymbol{AX} \quad \cdot\cdot\cdot \quad (8)$$

$\boldsymbol{I}$を単位行列として式(8)を変形すると、

$$(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{X} = \boldsymbol{F} \quad \cdot\cdot\cdot \quad (9)$$

となることから式(9)は次のようになる。

$$\begin{pmatrix} 1 & -0.05 & -0.40 \\ -0.05 & 1 & -0.30 \\ -0.10 & -0.10 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 400{,}000 \\ 200{,}000 \\ 50{,}000 \end{pmatrix} \quad \cdot\cdot\cdot \quad (10)$$

式(9)の両辺に左側から逆行列$(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}$を掛けると

$$\boldsymbol{X} = (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{F} \quad \cdot\cdot\cdot \quad (11)$$

ここで、

$$(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1} = \begin{pmatrix} 1.049784 & 0.097403 & 0.449134 \\ 0.08658 & 1.038961 & 0.34632 \\ 0.113636 & 0.113636 & 1.079545 \end{pmatrix}$$

であるから、

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.049784 & 0.097403 & 0.449134 \\ 0.08658 & 1.038961 & 0.34632 \\ 0.113636 & 0.113636 & 1.079545 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 400{,}000 \\ 200{,}000 \\ 50{,}000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 461{,}850.6 \\ 259{,}740.3 \\ 122{,}159.1 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \sum X_i = 843{,}750$$

となる。次に、式(4)～(6)を行列で表したのが、式(12)である。

$$\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2{,}000{,}000 \\ 1{,}200{,}000 \\ 800{,}000 \end{pmatrix} + \underbrace{\boxed{\begin{pmatrix} 0.40 & 0.20 & 0.20 \\ 0.20 & 0.60 & 0.05 \\ 0.25 & 0.05 & 0.05 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix}}}_{\text{補助部門から製造部門への配賦額の計算部分}} \cdot \cdot \cdot \quad (12)$$

X_i のそれぞれの値を式(12)に代入するとY_iが求められる。

$$\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2{,}261{,}120.1 \\ 1{,}454{,}322.2 \\ 934{,}557.6 \end{pmatrix} \qquad \therefore \sum Y_i = 4{,}650{,}000$$

表 2-1 より第 1 次集計後における各部門の部門費の合計額は、

$$\sum P_i = 4{,}000{,}000 \qquad \sum S_i = 650{,}000$$

であることより、

$$\sum P_i + \sum S_i = 4{,}650{,}000 \qquad \therefore \sum Y_i = \sum P_i + \sum S_i$$

以上の説明から、第 1 次集計された各補助部門の部門費全額が製造部門 P_i $(i = 1,2,3)$へ配賦されていることがわかる。

第 2 次集計の計算は、補助部門間の相互配賦額を計算する式(1)、(2)、(3)の連立方程式（行列方程式(7)）と補助部門から製造部門への配賦額を計算する式(4)、(5)、(6)の連立方程式（行列方程式(12)） の二段階を経て行われる。

補助部門から製造部門への配賦結果を表にしたのが表 3-1 である。

表 3-1　配賦結果

	S_1から	S_2から	S_3から	P_iへの合計
P_1に対し	184,740.2	51,948.1	24,431.8	261,120.1
P_2に対し	92,370.1	155,844.2	6,108.0	254,322.3
P_3に対し	115,462.6	12,987.0	6,108.0	134,557.6
S_iからの合計	392,573.0 $= 0.85\,X_1$	220,779.3 $= 0.85\,X_2$	36,647.7 $= 0.30\,X_3$	650,000.0

（出典）筆者作成

ここで注目すべきことは、以下の関係が成立していることである。

$$\sum S_i < \sum X_i$$

本稿の設例でいえば、第 1 次集計後の補助部門費合計額$\sum S_i = 650{,}000$ と相互配賦後の補助部門費合計額 $\sum X_i = 843{,}750$の数値が一致せず、$\sum S_i < \sum X_i$ となっていることである。このことを批判したのが第 4 節で検討する Manes(1965)である。

なお、本稿では議論を容易にするために製造部門 P_i（$i = 1,2,3$）、補助部門 S_i（$i = 1,2,3$）の数を、それぞれ 3 部門とし、自家消費はないものとしたが、部門数をそれぞれ m、n とし、自家消費ありとしても同様である。W&G/C モデルの一般形について、および、X_i の非負解が存在することの証明は第 6 節で詳述している。

4.　Manes と Livingstone および Minch & Petri のモデル

(1)　Manes のモデル

W&G/C モデルに対して、Manes(1965)は第 1 次集計後の補助部門費の総計$\sum S_i$の額と相互配賦後の補助部門費の総計$\sum X_i$の額が一致せず、$\sum X_i$の額が $\sum S_i$の額を上回っていることを批判し、別の配賦法を提示している。

Manes の考え方によると、補助部門S_i の製造部門に配賦されるべき補助部門費X_i' は、他の補助部門からの原価受取を借記し、かつ他の補助部門に対する原価割当を貸記した後にはじめて確定できるものである、と仮定している。T 勘定で示すと図 4-1 のようになる。

定の数値に決まる。つまり、「他の部門からの配賦額」は、部門間サービス等の対価として実際に財貨が組織外に支出された額ではなく、第 1 次集計額との相対的価額として決まる。

Manes(1965)は、第 1 次集計後の補助部門費の総計 $\sum S_i$ の額と相互配賦後の補助部門費の総計 $\sum X_i$ の額が一致せず、$\sum X_i$ の額が $\sum S_i$ の額を上回っていることを批判したが、これらの差額の有無は「他の補助部門からのサービスの対価としての額」の認識の有無と同じ意味をもつ。部門間の関係が相互依存の関係にあるとするのであれば、互いにサービス等の授受を認識することは当然であり、部門間サービス等の授受の対価を第 1 次集計の額の相対的価額として認識しても、W&G/C モデルは第 1 次集計後の補助部門費合計額と製造部門へ配賦される第 2 次集計の合計額が一致していることから、原価計算上何ら不都合はない。したがって Manes の指摘は不適切といわざるを得ない。

6. W&G/C モデルの一般形と H/S 条件の成立

本節では、W&G/C モデルが、「Leontief 行列」と呼ばれる行列によって一般的にも表現されることを示し、産業連関分析と同様の分析が可能となること、および、部門間の協働による利得の相対的値が「Leontief の逆行列」によって算出されることを示す。また「Hawkins - Simon の条件(H/S 条件)」が、W&G/C モデルに非負解が存在するための必要十分条件であることを証明する。また、本稿第 3 節 W&G/C モデルでは議論を容易にするために、製造部門 P_i（ $i = 1,2,3$ ）、補助部門 S_i（ $i = 1,2,3$)の数を 3 とし、自家消費はないものとして考察したが、本節では、部門数を一般的にそれぞれ m、n とする。自家消費ありとしても同様である。

(1) W&G/C モデルと Leontief 行列

まず、W&G/C モデルが、「Leontief 行列」と呼ばれる行列によって一般的にも表現されることを示し、産業連関分析と同様の分析が可能となること、および、部門間の協働による利得の相対的値が「Leontief の逆行列」によって算出されることを示す。

部門間の配賦率は以下のとおり与えられているとする。

表 6-1 配賦率表

		補助部門			
		S_1から	S_2から	・・・	S_nから
補助部門	S_1に対し	a_{11}	a_{12}	・・・	a_{1n}
	S_2に対し	a_{21}	a_{22}	・・・	a_{2n}
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
	S_nに対し	a_{n1}	a_{n2}	・・・	a_{nn}
製造部門	P_1 に対し	b_{11}	b_{12}	・・・	b_{1n}
	P_2に対し	b_{21}	b_{22}	・・・	b_{2n}
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
	P_mに対し	b_{m1}	b_{m2}	・・・	b_{mn}
$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} + \sum_{i=1}^{m} b_{ij}$		1.00	1.00	1.00	1.00

（出典）筆者作成。

いま、X_i（i =1,…,n）は、他の補助部門からのサービス等の提供に係る原価配賦を受け取った後における補助部門S_iの原価、F_i（i=1,…,n）は、第 1 次集計後の補助部門S_iの原価、a_{ij}（i =1,…,n、j =1,…,n）は配賦率を表すものとすると、W&G/C モデルは次のように表わせる。

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}$$

相互配賦後の各補助部門の借方合計額をベクトル $\boldsymbol{X}$ 、第 1 次集計額をベクトル $\boldsymbol{F}$、補助部門間の配賦率を行列 $\boldsymbol{A}$、補助部門から製造部門への配賦率を $\boldsymbol{B}$ とすると、

$$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}、\qquad \boldsymbol{F} = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_n \end{pmatrix}、$$

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}、\qquad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

となるが、これらのベクトル、行列の要素は定義された意味からすべて非負である。
W&G/C モデルの補助部門に関する一般形は以下のようになる。

$$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{F}+\boldsymbol{AX} \quad \cdot\cdot\cdot\cdot \quad (1)$$

$\boldsymbol{I}$を単位行列として式(1)を $\boldsymbol{X}$について整理すると、

$$(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{F} \quad \cdot\cdot\cdot\cdot \quad (2)$$

W&G/C モデルの行列方程式(2)は産業連関分析の基本モデルである、「Leontief の基本方程式」とよばれる式と同形である。また行列$(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})$は「Leontief の行列」とよばれる。

仮に $\det(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\neq 0$ であれば、行列$(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})$に逆行列が存在するので、

$$\boldsymbol{X}=(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{F} \quad \cdot\cdot\cdot\cdot \quad (3)$$

となり Leontief の基本方程式の解として W&G/C モデルの相互配賦後の借方合計額である、ベクトル $\boldsymbol{X}$をもとめることができる。

この逆行列$(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}$は「Leontief の逆行列」とよばれる。このように W&G/C モデルは Leontief の基本方程式と同形であることから産業連関分析と同様の分析が可能となる。たとえば特定の補助部門において設備投資をするなど、第 1 次集計額の一部が増額されることによる他の部門に及ぼす経済効果が、事前に評価可能となる。また $\sum_{i=1}^{n} X_i$ と $\sum_{i=1}^{n} F_i$ との差額が、部門間の協働による利得の相対的値として算出されることは第 5 節で指摘した。

(2) Hawkins - Simon の条件

ここでは、「Leontief 行列」と呼ばれる行列によって表現される W&G/C モデルが、

「Hawkins‐Simon の条件(H/S 条件)」を満たし、W&G/C モデルに必ず非負解が存在することを証明する。

命題：　「Leontief 行列」と呼ばれる行列によって表現される W&G/C モデルには必ず非負解が存在する。

証明：　Leontief の基本方程式が以下のように与えられているとき、

$$
\begin{array}{l}
(1-a_{11})X_1 \quad - a_{12}X_2 - \quad \cdots \quad - a_{1n}X_n = F_1 \\
- a_{21}X_1 + (1-a_{22})X_2 - \quad \cdots \quad - a_{2n}X_n = F_2 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
- a_{n1}X_1 \quad - a_{n2}X_2 - \quad \cdots \quad (1-a_{nn})X_n = F_n
\end{array}
$$

この線型方程式系に、

$$X_1 = X_2 = \cdots \; X_n = 1$$

を代入して得られる左辺値は正値になる。このことは、係数行列が優対角性をもつことから自明である。したがって、この正値を右辺に持つような線型方程式系は、

自明解：$X_1 = X_2 = \cdots \; X_n = 1$

を持つ。二階堂(1960)によれば、このことから、この線型方程式系は、任意の右辺値（すべて正値）にたいして非負解をもつことが、det（$\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}$）＞ 0（Hawkins‐Simon の条件）との同値性を利用することにより、証明されている。（二階堂(1960)（pp.11‐19）を参照）なお、解の存在そのものは、優対角行列の正則性からただちに明らかである。

証了

(3) 2 部門ケースにおける直接証明

前節における、二階堂(1960)の証明は数学的帰納法によっているため、会計学的な条件との対比を容易には行うことができない。そこで、ここでは、このことを直截的に明示する目的から、n = 2 のケースについて、直接証明を与える。以下、その証明部分のみを示す。

証明：　表 6‐1 配賦率表より、

$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} + \sum_{i=1}^{n} b_{ij} = 1$　（j = 1 ,・・・,n）　であることから、

補助部門間の配賦行列 $\boldsymbol{A}$ の第 j 列和、$\sum_{i=1}^{n} a_{ij}$ が 1 以上はないことは、$\boldsymbol{A}$ が補助部門の配賦率であることからありえない。したがって、

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} < 1 \qquad (j = 1, \cdot\cdot\cdot, n)$$

この補助部門間の配賦行列 $\boldsymbol{A}$ の列和条件は Solow の（列和）条件とよばれる。

ここからは、議論を簡素化させるために補助部門を S_1 、S_2 の 2 部門とする。

Leontief 行列（$\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}$）は、

$$\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1 - a_{11}) & -a_{12} \\ -a_{21} & (1 - a_{22}) \end{pmatrix}$$

となるので、式(2)（$\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}$）$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{F}$ は、

$$\begin{pmatrix} (1 - a_{11}) & -a_{12} \\ -a_{21} & (1 - a_{22}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix} \quad \cdot\cdot\cdot\cdot \quad (4)$$

（$\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}$）に逆行列が存在するには正則条件、$\det(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}) \neq 0$ をみたさなければならない。つまり、

$$\det(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}) = \begin{vmatrix} (1 - a_{11}) & -a_{12} \\ -a_{21} & (1 - a_{22}) \end{vmatrix}$$

$$= (1 - a_{11})(1 - a_{22}) - a_{12}a_{21} \neq 0$$

であると（$\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}$）に逆行列が存在する。

そこで Solow の（列和）条件より、$a_{11} + a_{21} < 1$， $a_{12} + a_{22} < 1$ であるから、

$$1 - a_{11} > a_{21} > 0, \qquad 1 - a_{22} > a_{12} > 0$$

$$(1 - a_{11})(1 - a_{22}) > a_{12}a_{21} > 0$$

となるので、

$$\det(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}) = (1 - a_{11})(1 - a_{22}) - a_{12}a_{21} > 0 \quad \cdot\cdot\cdot\cdot \quad (5)$$

$$\therefore \ \det(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}) \neq 0$$

よって、正則条件がみたされることから$(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})$に逆行列が存在する。

$$(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}=\frac{1}{\det(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})}\begin{pmatrix}(1-a_{22}) & a_{12}\\ a_{21} & (1-a_{11})\end{pmatrix}$$

となり、式(4) の行列方程式は以下のように解ける。

$$\begin{pmatrix}X_1\\ X_2\end{pmatrix}=\frac{1}{\det(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})}\begin{pmatrix}(1-a_{22}) & a_{12}\\ a_{21} & (1-a_{11})\end{pmatrix}\begin{pmatrix}F_1\\ F_2\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{\det(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})}\begin{pmatrix}(1-a_{22})F_1+a_{12}F_2\\ a_{21}F_1+(1-a_{11})F_2\end{pmatrix}\quad\cdot\cdot\cdot\cdot\quad(6)$$

第 1 次集計額 F_i 、配賦率 a_{ij} はともに非負である。配賦率が 1 を超えることはないので、$(1-a_{ij})$ も正値である。したがって、式(6)における右辺のベクトルの各要素は非負であることから、相互配賦後の各補助部門の借方合計額 $\boldsymbol{X}$ の解が非負であるための必要十分条件は、以下で与えられる。

$$\det(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})>0\quad\cdot\cdot\cdot\cdot\quad(7)$$

証了

式(7)は、Leontief 行列が正則であるための条件の $\det(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\neq 0$ を含んだ上で、より強い条件になっている。これは Hawkins‐Simon の条件（H/S 条件）とよばれる。

以上の直接証明において明らかになることは、Solow の（列和）条件成立が決定的に重要であるということである。したがって、Solow の（列和）条件が成立する限り H/S 条件は成立する。補助部門、製造部門が複数存在するという、部門別原価計算の構造から常に、

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij}<1\qquad(j=1,\cdot\cdot\cdot,n)$$

となり、Solow の（列和）条件は成立する。つまり「W&G/C モデルは常に非負解が存在することになる。」ということを意味している。

おわりに

本稿では、Williams and Griffin(1964)から Minch and Petri(1972)までの４つのモデルについて検討を行った。その結果、Manes モデルと Minch & Petri モデルは、設定する未知数に対して適用する配賦率が適切ではないことが判明した。Livingstone(1968) は、Manes(1965) の考え方「補助部門 S_i の製造部門に配賦されるべき補助部門費 X'_i は、他の補助部門からの原価受取を借記し、かつ他の補助部門に対する原価割当を貸記した後にはじめて確定できるものである。」を基に使用する配賦率を適正にして計算を行っている。W&G/C モデルと Livingstone モデルは未知数を換えただけの同じ解法であることから同じ結果となる。W&G/C モデルと Livingstone モデルを比較した場合、W&G/C モデルで適用している配賦率が、基準を 100 とするなど単純で明快であることから W&G/C モデルが優れているといえよう。

Manes(1965)が批判した「第１次集計後の補助部門費合計額と相互配賦後の補助部門費合計額が一致しないこと」について、数値例に基づく検討を通じてこの「一致しない額の意味」を考察した。その結果、この一致しない額は、「その部門で実際に消費された費用の額（相互配賦後）」と「組織外に実際に支払われた費用の割当額（第１次集計後）」との差額であり､その具体的数値は第１次集計額との相対的数値として算出されることを指摘した。

相互のサービス等の授受を数値で認識することで、部門間のサービス等の流れを跡付けでき、各部門が協働することによる支出の伴わない部門間内部消費量を具体的数値で把握することが可能となる。協働による部門間内部消費量を部門管理者が互いに認識することで、部門間の意思の疎通、協力が得られると同時に原価計算に対する理解・納得が深まるものと思える。

補助部門間相互依存の実態を反映した原価を算出することは、これまで十分に議論されてきたといえない。逆行列を求める際、手計算[8]は困難であり、コンピュータ処理が必要となる。W&G/Cモデルが提唱された 40 年前と比べ、コンピュータが発達した今日において、「補助部門費配賦問題の行列代数による連立方程式の解法」を再考することには意義があるものと思える。

8）手計算で行う場合、未知数を一つずつ減らす（掃き出す）ことによって、未知数の少ない連立方程式にして解を求める「掃き出し法」という方法がとられる。しかしこの方法は３元以上の場合、逆行列を手計算で求めるのは非常に困難で実際的ではない。

参考文献

Johnson, H. T. and R. S. Kaplan. *Relevance Lost*：*The Rise and Fall of Management Accounting.* Harvard Business School Press, 1987.（鳥居宏史訳『レレバンス・ロスト－管理会計の盛衰－』白桃書房、1992 年）.

Kaplan, R. S. "Variable and Self-Service Costs in Reciprocal Allocation Models." *The Accounting Review,* 1973, *48* (4), pp.738-748.

Livingstone, J. L. "Matrix Algebra and Cost Allocation." *The Accounting Review*, 1968, *43* (3), pp.503-508.

Manes, R. P. "Comment on Matrix Theory and Cost Allocation." *The Accounting Review*, 1965, *40* (3) pp.640-643.

Minch, R. and E. Petri. "Matrix Models of Reciprocal Service Cost Allocation." *The Accounting Review*, 1972, *47* (3) pp.576-580.

Williams, T. H. and C. H. Griffin. "Matrix Theory and Cost Allocation." *The Accounting Review*, 1964, *39* (3) pp.671-678.

太田哲三(1972)『実践原価計算』同文舘。

岡本清（2000)『原価計算　六訂版』国元書房。

片岡洋一・井岡大度(1983)「補助部門費配賦法と自部門用役の消費について」『原価計算』第 272 号 pp.21-37。

加登豊(1989)『管理会計研究の系譜－計量的意思決定モデルから意思決定支援システムへ－』税務経理協会。

加登豊(1999)『管理会計入門』日本経済新聞社。

小林哲夫(1988)『原価計算〔改訂版〕－理論と計算例－』中央経済社。

小林哲夫((1993)『現代原価計算論－戦略的コスト・マネジメントへのアプローチ－』中央経済社。

小林啓孝(1996)『現代原価計算講義』中央経済社。

櫻井通晴(1993)『原価計算－理論と計算－』税務経理協会。

佐藤精一(1972)「部門別原価計算への経済学的、数学的研究」『會計』第 102 巻第 5 号、pp.3-53。

二階堂副包(1960)『現代経済学の数学的方法』岩波書店。

番場嘉一郎(1963)『原価計算論』中央経済社。

廣本敏郎(1997)『原価計算論』中央経済社。

門田安弘(1974)「<研究ノート>行列代数による部門別原価計算」『大阪府立大學經濟研究』1974,19(4),pp.58-72。

門田安弘(2002)『原価計算〔第 2 版〕』税務経理協会。

山本哲朗(1976)『サイエンスライブラリ現代数学への入門＝14　数値解析入門』サイエンス社。