

変動軸力と面内変動荷重を受ける 扁平ケーブルの非線形振動の補足

高橋和雄¹・花田博史²・鎌田智之³・山口健市⁴

¹正会員 工博 長崎大学教授 工学部社会開発工学科 (〒852 長崎市文教町1-14)

²学生員 長崎大学大学院学生 工学研究科社会開発工学専攻 (〒852 長崎市文教町1-14)

³正会員 工修 前田建設工業(株) (〒102 東京都千代田区富士見2丁目10-26)

⁴正会員 工修 (株)ピー・エス (〒810 福岡市博多区中州5丁目6番20号)

本研究は、周期的変動軸力(係数励振力)と面内周期的変動荷重を同時に受ける扁平ケーブルの非線形振動に及ぼす、周期的変動軸力と面内周期的変動荷重間の加振振動数比の影響および過渡振動の影響を評価したものである。これより、加振振動数比は、ケーブルの分岐応答および主共振の応答に影響を及ぼすことを明らかにした。さらに、平均法による過渡振動の解析の精度は良好で、過渡振動の振幅は定常振動の約1.5倍になることを示した。

Key Words : nonlinear vibration, cable, parametric vibration, transient vibration

1. まえがき

斜張橋の主桁もしくは塔が風荷重や走行荷重によって振動すると、支持ケーブルに振幅の大きな局部振動が発生することが指摘されている。この振動の原因にケーブルと桁の連成振動の内部共振、係数励振振動問題などが考えられ、いくつかの研究が見られる(文献1)の文献参照)。

著者らは、文献1)で周期的変動軸力(係数励振力)を受けるケーブルの非線形応答を明らかにしている。さらに、周期的変動軸力と面内周期的変動荷重が同時に作用する場合のケーブルの非線形応答特性をサグ比、変動軸力の振幅および減衰定数からなるパラメータのもとに解析的に明らかにした¹⁾。しかし、周期的変動軸力と面内周期的変動荷重の加振振動数比が1の場合のみ取り扱っている。最近の研究によれば周期的変動軸力と面内周期的変動荷重を受ける非線形振動系の応答解析が進められており^{2),3)}、またガイタワーのケーブルの風による応答と周期的変動軸力の作用による係数励振振動の連成も取り扱われるようになっていく⁴⁾。文献2)によれば、加振振動数比は非線形振動系の応答特性に影響を及ぼすことが示されている。また、斜張橋ケーブルが周期的支点変動を受ける場合にケーブルに支点変動の2倍の振動数をもつ係数励振力が作用することが知られている⁵⁾。したがって、応答に及

ぼす影響が大きいと予想される加振振動数比が2の場合を解析する。

また、係数励振振動を含めた非線形振動の研究のほとんどは定常振動に注目している。しかし、土木構造物に現れる振動は過渡振動であることが多く、過渡振動の影響を評価しておくことが必要である。

そこで、本研究では周期的変動軸力と面内周期的変動荷重の加振振動数比が2の場合の扁平ケーブルを解析する。はじめに加振振動数比が2の場合の応答特性を各種のパラメータのもとに解析し、1の場合と比較する。次いで非線形振動系の過渡振動が取り扱い可能な平均法を用いて解析し、過渡振動の影響を評価する。

2. 解法¹⁾

扁平ケーブル(サグ比 $\gamma = f/l < 1/8$)が周期的変動軸力 $H_t \cos \nu \Omega t$ と面内周期的変動荷重 $p \cos(\Omega t + \phi)$ を受ける場合について考える。文献1)と同様に系を1自由度系と仮定すると、次のケーブル中央点の応答を表す時間に関する運動方程式が得られる。

$$\ddot{p} + 2h\omega_1 \dot{p} + \omega_1^2 p + C_1 \bar{H}_t \cos \nu \bar{\omega} \tau P + C_2 P^2 + C_3 P^3 = C_4 \bar{p}_0 \cos(\bar{\omega} \tau + \phi) \quad (1)$$

ここに、 $P(\tau)$: 時間関数、 $W(\xi)$: ケーブルの 1 次振動の固有振動形、 $\xi = x/l$ 、 x : 支点からの水平距離、 l : スパン長、 $\omega_1 = n_1 / \pi n_0$: 1 次振動の無次元固有円振動数、 $n_0 = \sqrt{H_e \pi^2 / m \ell^2}$: 弦の 1 次の固有円振動数、 m : ケーブルの質量、 $\bar{H}_t = H_t / H_e$: 無次元変動軸力の振幅、 H_t : 周期的変動軸力の振幅、 H_e : 初期水平張力、 h : 減衰定数、 $\tau = n_0 t$: 無次元時間、 $\bar{\omega} = \Omega / n_0$: 周期的変動荷重の無次元円振動数、 Ω : 周期的変動荷重の円振動数、 $v\bar{\omega}$: 周期的変動軸力の無次元円振動数、 $C_1 = I_b / \pi^2 I_a$ 、 $C_2 = 12\gamma I_b I_c I_d$ 、 $C_3 = I_b^2 I_d / 2$ 、 $C_4 = I_c / I_a \pi^2$ 、 $I_a = \int_0^1 W^2 d\xi$ 、 $I_b = \int_0^1 W'^2 d\xi$ 、 $I_c = \int_0^1 W d\xi$ 、 $I_d = k^2 / (1 + 8\gamma^2) I_a \pi^2$ 、 $\bar{p}_0 = p_0 / H_e$ 、 $\gamma = f / \ell$: サグ比、 f : ケーブルのサグ、 $k = \sqrt{EA / H_e}$: 縦波一横波伝播速度比、 E : ケーブルのヤング率、 A : 断面積、 ϕ : 位相角。

$\nu = 1$ の場合は、文献 1) において報告している。ここでは、 $\nu = 2$ の場合を解析する。式(1)には、周期的変動軸力の項と面内周期的変動荷重の項が含まれる。前者より $2\bar{\omega} = 2\omega_1$ で主不安定振動、 $2\bar{\omega} = \omega_1$ で副不安定振動が生ずることから、主および副不安定振動が固有円振動数および固有円振動数の半分付近に生じることになる。また、後者より各種の高調波共振および分数調波共振が生ずるが、ここでは主共振および 1/2 分数調波共振のみを対象とする。これらの共振は固有円振動数付近および固有円振動数の 2 倍付近に生じる。 $\nu = 2$ の場合、主共振を除くとこれらはいずれも分岐振動であり、これらを解析するために、式(1)の解を次のように仮定する。

$$P = \frac{c_0}{2} + c_{1/2} \cos \frac{\omega\tau}{2} + s_{1/2} \sin \frac{\omega\tau}{2} + c_1 \cos \omega\tau + s_1 \sin \omega\tau + c_2 \cos 2\omega\tau + s_2 \sin 2\omega\tau \quad (2)$$

ここに、 c_0, c_1, s_1 : 付随調波成分、 $c_{1/2}, s_{1/2}$: 固有円振動数の 2 倍付近に生ずる分岐調波成分、 c_2, s_2 : 固有円振動数の 1/2 付近に生ずる分岐調波成分。

また、式(2)は次式のように書き換えられる。

$$P = \frac{c_0}{2} + A_{1/2} \cos \left(\frac{\omega\tau}{2} - \varphi_{1/2} \right) + A_1 \cos(\omega\tau - \varphi_1) + A_2 \cos(2\omega\tau - \varphi_2) \quad (3)$$

ここに、 $A_1 = \sqrt{c_1^2 + s_1^2}$: 付随応答成分、 $A_{1/2} = \sqrt{c_{1/2}^2 + s_{1/2}^2}$ 、 $A_2 = \sqrt{c_2^2 + s_2^2}$: 分岐応答成分、 $\varphi_{1/2} = \tan^{-1}(s_{1/2}/c_{1/2})$ 、 $\varphi_1 = \tan^{-1}(s_1/c_1)$ 、 $\varphi_2 = \tan^{-1}(s_2/c_2)$: 位相差。

式(2)を式(1)に代入して、平均法を適用すれば、7 個の平均化方程式が得られる。

$$\frac{dc_0}{d\tau} + \frac{1}{2}\omega_1^2 c_0 + \frac{1}{2}\bar{H}_t c_2 + f_1(c_0, c_{1/2}, s_{1/2}, c_1, s_1, c_2, s_2) = 0 \quad (4)$$

$$\frac{dc_{1/2}}{d\tau} + h\omega_1 \bar{\omega} c_{1/2} + \frac{1}{2}\bar{H}_t s_{1/2} + \frac{1}{4}(\bar{\omega}^2 - 4\omega_1^2) s_{1/2} + f_2(c_0, c_{1/2}, s_{1/2}, c_1, s_1, c_2, s_2) = 0 \quad (5)$$

$$\frac{ds_{1/2}}{d\tau} + h\omega_1 \bar{\omega} s_{1/2} + \frac{1}{2}\bar{H}_t c_{1/2} - \frac{1}{4}(\bar{\omega}^2 - 4\omega_1^2) c_{1/2} + f_3(c_0, c_{1/2}, s_{1/2}, c_1, s_1, c_2, s_2) = 0 \quad (6)$$

$$\frac{dc_1}{d\tau} + 2h\omega_1 \bar{\omega} c_1 + \frac{1}{2}\bar{H}_t s_1 + (\bar{\omega}^2 - \omega_1^2) s_1 + f_4(c_0, c_{1/2}, s_{1/2}, c_1, s_1, c_2, s_2) - \bar{p}_0 \sin \varphi = 0 \quad (7)$$

$$\frac{ds_1}{d\tau} + 2h\omega_1 \bar{\omega} s_1 + \frac{1}{2}\bar{H}_t (c_1 + c_0) - (\bar{\omega}^2 - \omega_1^2) c_1 + f_5(c_0, c_{1/2}, s_{1/2}, c_1, s_1, c_2, s_2) - \bar{p}_0 \cos \varphi = 0 \quad (8)$$

$$\frac{dc_2}{d\tau} + 4h\omega_1 \bar{\omega} c_2 + (4\bar{\omega}^2 - \omega_1^2) s_2 + f_6(c_0, c_{1/2}, s_{1/2}, c_1, s_1, c_2, s_2) = 0 \quad (9)$$

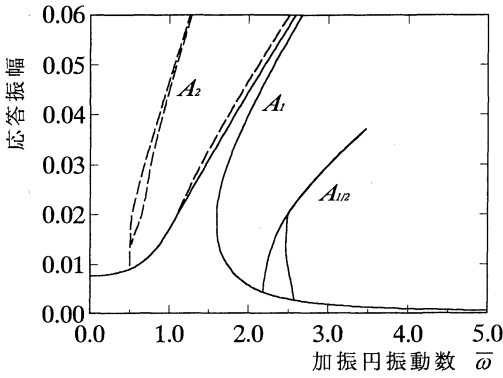


図-1 $\nu=2$ の場合の応答曲線

$$(\gamma=0.01, k=30, \omega_1=1.21, \bar{H}_t=0.6, \bar{p}_0=0.1, \phi=0)$$

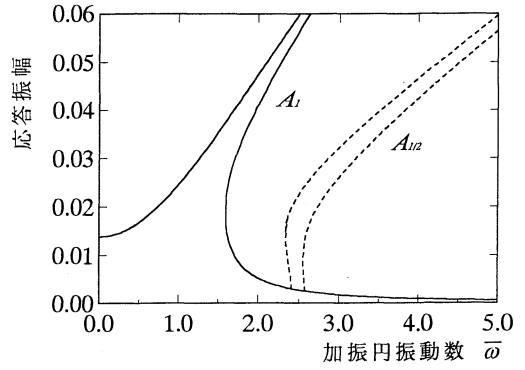


図-2 $\nu=1$ の場合の応答曲線

$$(\gamma=0.01, k=30, \omega_1=1.21, \bar{H}_t=0.6, \bar{p}_0=0.1, \phi=0)$$

$$\begin{aligned} \frac{ds_2}{d\tau} + 4h\omega_1\bar{\omega}s_2 + \frac{1}{2}\bar{H}_t c_0 - (4\bar{\omega}^2 - \omega_1^2)c_2 \\ + f_7(c_0, c_{1/2}, s_{1/2}, c_1, s_1, c_2, s_2) = 0 \end{aligned} \quad (10)$$

ここに、 $f_1 \sim f_7: c_0, c_{1/2}, s_{1/2}, c_1, s_1, c_2$ および s_2 の関数。

過渡振動の応答は、式(4)～式(10)の7個の1階連立非線形方程式に Runge-Kutta-Gill 法を適用し、各振幅成分を求め、これらを式(2)に代入することによって求められる。

また、時間が十分経過した場合の定常解を求める場合には7個の1階連立非線形方程式において、

$$\begin{aligned} \frac{dc_0}{d\tau} = \frac{dc_{1/2}}{d\tau} = \frac{ds_{1/2}}{d\tau} = \frac{dc_1}{d\tau} = \frac{ds_1}{d\tau} \\ = \frac{dc_2}{d\tau} = \frac{ds_2}{d\tau} = 0 \end{aligned} \quad (11)$$

であるから、非線形連立代数方程式となる。これらの式に Newton-Raphson 法を用いて、仮定した初期値のもとに解けば、振幅成分が得られる。

式(1)を直接数値積分するためには、式(1)において、 $P=T_1, \dot{P}=T_2$ とおくと、次式の2元連立の1階非線形常微分方程式に変換することができる。

$$\left. \begin{aligned} \dot{T}_1 &= T_2 \\ \dot{T}_2 &= -2h\omega_1 T_2 - \omega_1^2 T_1 + C_1 \bar{H}_t \cos \bar{\omega} \tau T_1 \\ &\quad - C_2 T_1^2 - C_3 T_1^3 + C_4 \bar{p}_0 \cos(\bar{\omega} \tau + \phi) \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

式(12)に、Runge-Kutta-Gill 法を適用して直接数値積分すれば、時間応答が得られる。初期条件として、初期変位 T_1 および初期速度 T_2 に値を与える。

3. 周期的変動軸力と面内変動荷重が同時に作用する場合の応答特性

(1) 周期的変動軸力と面内周期的変動荷重の加振振動数比の影響

図-1および2は、サグ比 $\gamma=0.01$ の扁平ケーブル（縦波-横波伝播速度比 $k=30$ 、減衰定数 $h=0.005$ ）で周期的変動軸力と面内変動荷重の加振振動数比が1と2の場合（周期的変動軸力の振幅 $\bar{H}_t=0.6$ 、面内周期的変動荷重の振幅 $\bar{p}_0=0.1$ 、位相角 $\phi=0$ ）の応答曲線を示す。縦軸は、無次元応答振幅 $A_1, A_2, A_{1/2}$ で、横軸は、無次元加振円振動数 $\bar{\omega}$ である。図中、破線は周期的変動軸力の影響を受けて増大もしくは発生した分岐応答を示している。 $\nu=1$ の場合には、強制振動によって生ずる $1/2$ 分数調波共振と主不安定領域が同じ固有円振動数の2倍の振動数領域 ($\bar{\omega}=2\omega_1=2.4$ 近傍) で発生する。これに対し、 $\nu=2$ の場合には、 $1/2$ 分数調波共振が単独に生ずる。しかし、主共振領域 ($\bar{\omega}=1.2$ 付近) で主調波応答に加えて、主不安定領域の分岐応答が発生し、また固有円振動数の $1/2$ 付近 ($\bar{\omega}=0.6$ 付近) で副不安定領域が単独に現れる。

図-1および2の比較により、 $\bar{\omega}=2\omega_1$ 付近に生ずる $A_{1/2}$ の応答は係数励振振動の影響が支配的である。これに対して、 $\bar{\omega}=\omega_1$ 付近に生ずる主共振 A_1 については強制振動の影響が $\nu=1, 2$ いずれの場合も支配的である。

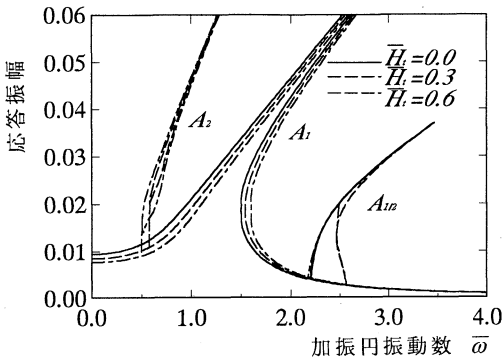


図-3 応答に及ぼす変動軸力の振幅の影響

($\gamma=0.01, k=30, \omega_1=1.21, h=0.005, \bar{p}_0=0.1, \nu=2, \phi=0$)

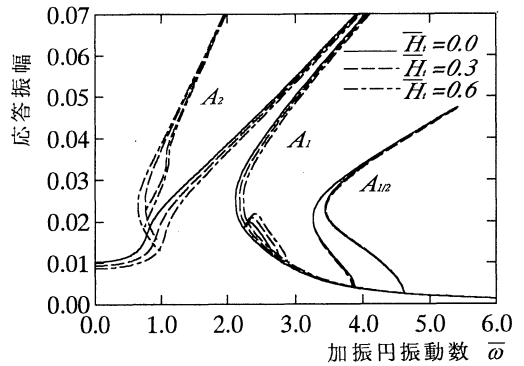


図-4 応答に及ぼす変動軸力の振幅の影響

($\gamma=0.03, k=30, \omega_1=2.18, h=0.005, \bar{p}_0=0.3, \nu=2, \phi=0$)

(2) 周期的変動軸力の振幅の影響

図-3および4は、サグ比 $\gamma=0.01, 0.03$ の偏平ケーブル（縦波・横波伝播速度比 $k=30$ ，減衰定数 $h=0.005$ ）について、周期的変動軸力の振幅を変化させた場合の応答曲線を示す。なお、面内周期的変動荷重（位相角 $\phi=0$ ）の振幅 \bar{p}_0 は各サグ比について静的応答（ $\bar{\omega}=0.0$ の時の応答）がスパン l の1/100程度になるように設定してある。実線、破線および一点破線は、それぞれ、周期的変動軸力の振幅 $\bar{H}_t=0.0, 0.3, 0.6$ の場合の解析解を表す。これらの図より、サグ比の大きさに関わらず変動軸力が大きくなると主調波応答の振幅が減少する。

1/2 分数調波共振については、周期的変動軸力の振幅による影響は現れず、1/2 分数調波共振は係数励振振動と無関係に生じている。また、周期的変動軸力の振幅 \bar{H}_t が大きくなると副不安定領域の幅が広がる。

4. 過渡振動の影響

図-5は、サグ比 $\gamma=0.03$ の偏平ケーブル（縦波・横波伝播速度比 $k=30$ ，減衰定数 $h=0.005$ ）に突然、周期的変動軸力と面内周期的変動荷重が作用した場合（周期的変動軸力の振幅 $\bar{H}_t=0.1$ ，面内周期的変動荷重の振幅 $\bar{p}_0=0.1$ ，加振振動数比 $\nu=1$ ，位相角 $\phi=0$ ）の過渡振動の応答を示している。○，□は、初変位および初速度がともに零のもとに式(4)~(10)の平均化方程式から得られた0~200無次元時間における最大応答である。なお○，□の応答は、それぞれ定常状態となった場合に周期 $T, 2T$ の解に対応する。なお、式(2)に示すように平均法では周期 T と $2T$ の解のみを仮定して

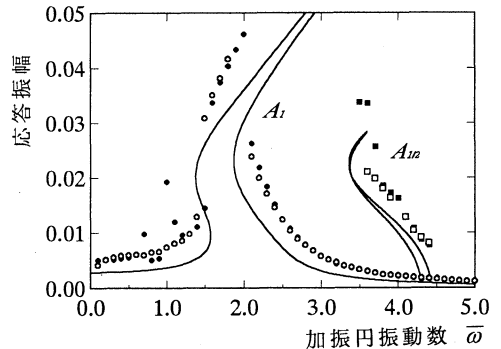


図-5 過渡振動の応答と加振振動数の関係

平均法—○, T, □, 2T, 直接数値積分—●, T, ■, 2T

($\gamma=0.03, k=30, \omega_1=2.18, h=0.005,$

$\bar{H}_t=0.1, \bar{p}_0=0.1, \nu=1, \phi=0$)

いる。一方、●(T)および■(2T)は、直接数値積分して得られた0~200無次元時間における過渡振動の最大応答を示している。なお、平均法も直接数値積分も1/2分数調波共振近傍における過渡振動の最大応答を求めるために、初期値 $T(0)=0.01$ を与えている。また、比較対照のために時間が十分経過した場合の定常解を実線で示す。過渡振動における振幅は定常振動の1.5倍ほどの大きさとなる。

図-6および7は $\bar{\omega}=1.8$ における平均法により求めた0~200無次元時間の過渡振動波形と直接数値積分による過渡振動波形を比較したものである。過渡振動はうなりを伴った波形を示す。両者を比較すると振幅も波形もよく一致する。図-5から明らかのように周期 T の成分が強い主共振近傍や周期 $2T$ の成分が強い1/2分数調波共振近傍では、波形も振幅も直接数値積分による解と一致し、平均法による解の精度は十分

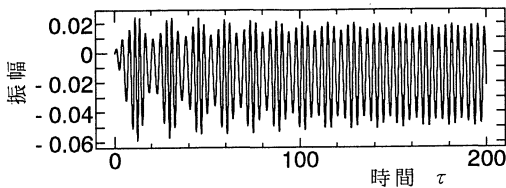


図-6 平均法による過渡振動波形 ($\bar{\omega} = 1.8$)

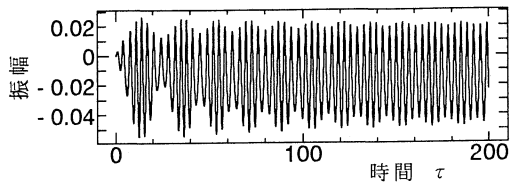


図-7 直接数値積分による過渡振動波形 ($\bar{\omega} = 1.8$)

であると言える。しかし、非線形項が大きく高調波成分が大きくなる場合には、式(2)のみの仮定では高調波共振の過渡解は求められず、より高次の周期 $1/2T$ や $1/3T$ などの解の仮定が必要となる。

5. まとめ

本研究で得られた結果を要約すると、以下の通りである。

周期的変動軸力と面内変動荷重が同時に作用する場合の応答特性について

1. 加振振動数比が1の場合、固有円振動数の2倍付近において、強制振動によって生ずる $1/2$ 分数調波共振と主不安定領域が連成するが、2の場合には連成はなく、 $1/2$ 分数調波共振が単独に生ずる。
2. 加振振動数比が2の場合、変動軸力の影響によって固有円振動数の $1/2$ 付近に、副不安定領域の分岐応答が現れる。
3. 加振振動数比が1, 2のどちらの場合にも主共振領域付近については、強制振動の影響が支配的である。
4. 周期的変動軸力が大きくなると、固有円振動数の $1/2$ 付近に発生する副不安定領域の幅が広がる。また、主調波応答の振幅は小さくなる。

過渡振動の影響について

5. 主調波応答も $1/2$ 分数調波共振の応答も過渡振動における最大振幅は、定常振動における振幅の1.5倍ほどの大きさを示す。
6. 主調波応答および $1/2$ 分数調波共振の応答も、平

均法による解と直接数値積分による解は、よく一致する。したがって、平均法による解析の精度は十分で、非線形過渡振動の解析に活用できる。

なお、計算には長崎大学総合情報処理センターの FACOM V-1200 を使用したことを付記する。

参考文献

- 1) 高橋和雄, 鎌田智之, 花田博史: 係数励振力と周期的変動荷重を受ける偏平ケーブルの非線形振動, 土木学会論文集, No. 549 / I-37, pp. 115~124, 1996. 10.
- 2) 津田吉広, 末岡淳男, 田村英之: 強制係数励振系の応答特性について, 日本機械学会論文集 (C編), 61 巻, 583 号, No. 94-1367, pp. 39~46, 1995. 3.
- 3) 矢ヶ崎一幸: パラメトリックおよび外部励振を受ける Duffing 系のカオス (第1報, 非摂動セパトリックス近傍におけるホモクリニック挙動), 日本機械学会論文集 (C編), 61 巻, 583 号, No. 94-1377, pp. 66~72, 1995. 3.
- 4) Cai, Y. and Chen, S.S.: Nonlinear Dynamics of a Stack / Cable System Subjected to Vortex-Induced Vibration, *Proceedings of International Symposium on Cable Dynamics*, Liege (Belgium), pp. 298~305, 1995. 10.
- 5) Pinto da Costa, A. and Martins, J.A.C.: The Nonlinear Oscillations of Inclined Cables Excited by Periodic Motions of Their Supports, *Proceedings of International Symposium on Cable Dynamics*, Liege (Belgium), pp. 205~212, 1995. 10.

(1996. 9. 11 受付)

SUPPLEMENT ON NONLINEAR VIBRATION OF A SMALL-SAG CABLE SUBJECTED TO AN AXIAL TIME-VARYING LOAD AND TRANSVERSE TIME-VARYING LOAD

Kazuo TAKAHASHI, Hiroshi HANADA, Tomoyuki KAMATA
and Ken-ichi YAMAGUCHI

Nonlinear dynamic response of a suspended small-sag cable driven by harmonic axial load and harmonic transverse load is presented. The effects of driving frequency ratio between the transverse load and axial load are discussed at first. Then, nonlinear transient vibration obtained by averaging method is obtained.