動学システムにおける S･P 安定性について

村　田　省　三

Abstract

In this paper, we consider some sufficient conditions under which 2n-square matrix J is s.p stable. We verify one theorem which relates to the eigenvalues of 2n-square matrix and it is used to prove the local stability of dynamical systems. Conditions in this theorem hold in many dynamical economic models. Trajectories near the equilibrium of these dynamical systems where current value Hamiltonian satisfies the sufficient conditions of Kamien and Schwartz (1971) follows s･p stability.

Keywords: optimal control problem, saddle point stability, current value Hamiltonian

1　はじめに

本稿モデルでは、すべての行列は実行列であるとする。行列 M の転置行列を M^T とする。慣習に従って、n 正方行列 A のすべての固有値の実部が負値であるとき、この正方行列 A は安定であるという。また、同様に、2n 正方行列の 2n 個の固有値のうち、n 個の固有値が負値の実部を持ち、残る n 個の固有値が正値の実部をもつとき、この行列を s･p 安定であるという。

本稿では、2n 正方行列 J が s･p 安定であるための、いくつかの十分条件を構築する。次節では、2n 正方行列の固有値に関連する定理１を証明する。この定理は動学システムの局所安定性を証明するさいに活用される。定理１

における仮定群は極端なものではない。ほとんどすべての動学的経済モデルにおいて、これらの仮定は当然に満たされる。均衡点の近くにおける、この動学システムの解軌道は、現在値ハミルトニアンが Kamien and Schwartz（1971）における条件を満たすときには、s•p 安定である。

2　S•P 安定性な行列

ここでは、一般に、2n-正方行列が s•p 安定となるための十分条件を検討する。

定理１ (a) $\lambda i (i=1,2,\dots, n)$を行列 $J=\begin{bmatrix} A & D \\ C & B \end{bmatrix}$ の固有値とする。. A, B, C and D がすべて n 正方行列であるとする。また、$AB=BA$，$BC=CB$ および $AC=CA$ であるとする。このとき、以下が成立する。

$$\det\begin{bmatrix} A-\lambda I_n & D \\ C & B-\lambda I_n \end{bmatrix}=\det\begin{bmatrix} A-\Lambda & D \\ C & B-\Lambda \end{bmatrix}$$

ここで，$\Lambda\equiv A+B-\lambda I_n$.

(b) $J=\begin{bmatrix} A & D \\ C & B \end{bmatrix}$ とする。また，$AB=BA$，$BC=CB$ および $AC=CA$ であるとする。また，$A+B=\alpha I_n$ とする。ここで，α は実数値とする。このとき，$AB-CD$ が安定行列であれば，$J=\begin{bmatrix} A & D \\ C & B \end{bmatrix}$ は S•P 安定である。

(c) $J=\begin{bmatrix} \delta_1 I_n & D \\ C & \delta_2 I_n \end{bmatrix}$ が正則かつ対称な 2n-正方行列とする。このとき，$-CD$ が安定であれば，2n 個の固有値のうち，n 個の固有値の実部は正値（$R(\lambda_i)>0$）であり，残りの n 個の固有値の実部は負値（$R(\lambda_i)<0$）である。

証明． (a)Let $\tilde{\Lambda}$ be $\lambda I_n-(A+B)/2$. Then

$$\det\begin{bmatrix} A-\lambda I_n & D \\ C & B-\lambda I_n \end{bmatrix} = \det\left[\left(\frac{A-B}{2}-\tilde{\Lambda}\right)\left(\frac{B-A}{2}-\tilde{\Lambda}\right)-CD\right]$$

$$=\det\begin{bmatrix} A-\Lambda & D \\ C & B-\Lambda \end{bmatrix}$$

(b)　λが行列Jの固有値であるとする。このとき，以下が成立する。

$$\det[J-\lambda I_{2n}]=\det[AB-CD-(\alpha-\lambda)\lambda I_n]$$

行列$AB-CD$が安定であるという仮定より，以下が成立する。

$$0>R(\alpha\lambda-\lambda^2)\geqq R(\lambda)(\alpha-R(\lambda)).$$

ここでαは固有値λの実部である。したがって，以下が成立する。

$$R(\lambda)>\max(0,\alpha)\ or\ R(\lambda)<\min(0,\alpha).$$

この定理の仮定(a)の成立は自明であるから，λが行列Jの固有値であり，$R(\lambda)>0$であれば，$\alpha-\lambda$もまた行列Jの固有値であり，$R(\lambda)<0$である。

(c)　λが行列Jの固有値であるとする。このとき，以下が成立する。

$$\det[J-\lambda I_{2n}]=\det[-CD-(\lambda-\delta_1)(\delta_2-\lambda)I_n]$$

仮定より，行列$-CD$は安定であるから，以下が成立する。

$$0>R((\lambda-\delta_1)(\delta_2-\lambda))\geqq.(\delta_1-R(\lambda))(R(\lambda)-\delta_2)$$

したがって，以下が成立する。

$$R(\lambda)>\max(\delta_1,\delta_2)\ \ or\ \ R(\lambda)<\min(\delta_1,\delta_2).$$

定理1(b)の証明により，$\delta_1+\delta_2-\lambda$もまた行列$J$の固有値になる。■

$n=1$のとき，この定理1は，よく知られた2×2 行列Jのs•p安定性にな

る。それは，すなわち，$\det J<0$。

3　最適制御問題における最適の十分条件

いま，次のような最適制御問題を考える。

$$Max \quad \int_{t_0}^{t_1} f_0(x(t), u(t))e^{-\rho t}dt$$

$$s.t \quad \dot{x}=f(x(t), u(t)) \tag{1}$$

$$x(t_0)=x_0 \tag{2}$$

ここで，$x(t)\in R^n$，$u(t)\in R^r$ であり，$f_0(x, u): R^{n+r}\to R$ および $f(x, u): R^{n+r}\to R^n$ は，(x, u)に関して２階連続微分可能関数であるとする。(1)および(2)を満たす$(x(t), u(t))$を，admissible pair という。

定理２は，Leitman＝Stalford（1971）における定理の拡張である。

定理２　$(x^*(t), u^*(t))$を admissible pair とする。$t\in(t_0, \infty)$で定義された実関数$\lambda(t)$が存在して，以下の条件(3)を満たし，

$$\lim_{t\to\infty}\lambda(t)x^*(t)=0 \tag{3}$$

以下の条件(4)が，すべての $t\in(t_0, \infty)$およびすべての admissible pair $(x(t), u(t))$にたいして成立するならば，$(x^*(t), u^*(t))$は optimal pair である。

$$(H(x(t), u(t), \lambda(t))-H(x^*(t), u^*(t), \lambda(t)))\leqq-\dot{\lambda}(t)(x(t)-x^*(t)) \tag{4}$$

ここで，$H(x, u, \lambda)$は，以下に定義される現在価値ハミルトニアンである。

$$H(x(t), u(t), \lambda(t))=f_0(x(t), u(t))+\lambda(t)f(x(t), u(t))$$

証明．(1)，(2)および(4)から，すべての admissible pair $(x(t), u(t))$に対して，次の不等式が成立する。

$$\int_{t_0}^{\infty} f_0(x^*(t),u^*(t))e^{-\rho t}dt - \int_{t_0}^{\infty} f_0(x(t),u(t))e^{-\rho t}dt$$

$$= \int_{t_0}^{\infty} (H(x^*(t),u^*(t),\lambda(t)) - H(x(t),u(t),\lambda(t)) + \lambda(t)(\dot{x}(t)-\dot{x}^*(t)))e^{-\rho t}dt$$

$$\geqq \int_{t_0}^{\infty} ((\dot{\lambda}(t)(x(t)-x^*(t)) + \lambda(t)(\dot{x}(t)-\dot{x}^*(t)))e^{-\rho t}dt$$

$$=0$$

■

Kamien＝Schwartz（1971）は，Leitman＝Stalford（1971）で提示された条件を満たすためのひとつの十分条件を提示した。次の定理３は，Kamien＝Schwartz（1971）で示されたその条件を満たすための十分条件である。

定理３（a），(b)および(c)が，すべての $t \in (t_0, t_1)$ に対して成立するとき，admissible pair $(x^*(t),u^*(t))$ は optimal pair である。

(a) $\underset{u}{Max}\, H(x(t),u,\lambda(t))$ は，x について２階連続微分可能な凹関数である。

(b) $H(x,U(x,\lambda t)),\lambda(t)) \equiv \underset{u}{Max} H(x(t),u,\lambda(t))$ および $u^*(t)=U(x^*(t),\lambda(t))$ を満たす関数 $U(x,\lambda(t))$ が存在する。

$(c) -\dot{\lambda}(t) = Hx(x^*(t),u^*(t),\lambda(t))$

証明． これらの条件は，すべての admissible pair $(x(t),u(t))$ にたいして，以下の不等式の成立を保障する。

$$H(x(t),u(t),\lambda(t)) - H(x^*(t),u^*(t),\lambda(t))$$
$$\leqq H(x(t),U(x(t),\lambda(t)),\lambda(t)) - H(x^*(t),U(x^*(t),\lambda(t)),\lambda(t))$$
$$\leqq (H_x(x^*(t),u^*(t),\lambda(t)) - H_u(x^*(t),u^*(t),\lambda(t)) \cdot U_x(x^*(t),\lambda(t))) \cdot (x(t)-x^*(t))$$
$$= -\dot{\lambda}(t) \cdot (x(t)-x^*(t))$$

■

4　最適制御問題における最適の十分条件とS・P安定性

Kamien＝Schwartz（1971）において提示された条件がことごとく満たされるとするとき，最適制御問題におけるoptimal pairは，動学システム(5) and (6)に従う。ここで，n正方行列H_{xx}は負定値である。

$$\dot{\lambda}_i = \rho\lambda_i - \frac{\partial H(x, U(x, \lambda(t)), \lambda(t))}{\partial x_j} \qquad j=1, \ldots\ldots, n \tag{5}$$

$$\dot{x} = \frac{\partial H(x, U(x, \lambda(t)), \lambda(t))}{\partial \lambda_i} \qquad j=1, \ldots\ldots, n \tag{6}$$

このシステムのJacobian行列は以下のようになる。

$$\tilde{J} = \begin{bmatrix} \rho I_n - H_{x\lambda} & -H_{xx} \\ H_{\lambda\lambda} & H_{\lambda x} \end{bmatrix}$$

ユニタリー変換によって，行列$\tilde{J}$は以下のように書くことができる。ここで，n正方行列$\tilde{H}_{xx}$は負定値である。

$$J = \begin{bmatrix} \rho I_n - \delta I_n & -\tilde{H}_{xx} \\ \tilde{H}_{\lambda\lambda} & \delta I_n \end{bmatrix}$$

定理１より，$R(\lambda) > \max(\rho - \delta, \delta)$あるいは$R(\lambda) < \min(\rho - \delta, \delta)$が成立することは自明である。したがって，仮にすべての行列が実対象行列であり，この動学システムの均衡が存在するならば，また同時に，$(\rho - \delta)\delta < 0$であり，$\tilde{H}_{\lambda\lambda}$が正定値またはゼロ行列であるときには，この均衡は局所的にs・p安定である。

参　考　文　献

[1] Kamien, M.I. and N.L. Schwartz, " Suffient Conditions in Optimal Control Theory, " *Journal of Economic Theory*, June. 1971.

[2] Leitman, G. and H. Stalford, " A Sufficiency Theorem for Optimal Control Theory, " *Journal of Optimization Theory and Applications*, September, 1971.