Bulletin of Faculty of Education, Nagasaki University: Curriculum and Teaching 1989, No.12, 15-25

倍数の判定法について

——整除性の特性から——

三　野　榮　治*

(昭和63年10月31日受理)

Rethinking the Divisibility Tests

Eiji MINO

(Received October 31, 1988)

I. はじめに

二つの自然数 a, b ($b \neq 0$) に対して

$$a=bq+r,\ 0 \leqq r < b$$

をみたす自然数 q, r が存在する（ユークリッドの除法)。

つまり, a を b で割ると, 商 q, 余り r を得る。

このことから

(1) na, nb (n は自然数) について

$$na=nb \times q+nr,\ 0 \leqq nr < nb$$

すなわち, na を nb で割ると, a を b で割るときに比べて, 商は q で変らず, 余りが n 倍になること。

(2) m が a, b の公約数であるとき, 自然数 $\frac{a}{m}$, $\frac{b}{m}$ に対して

$$\frac{a}{m}=\frac{b}{m}\times q+\frac{r}{m},\ \frac{r}{m} \text{ は自然数で, } 0 \leqq \frac{r}{m} < \frac{b}{m}$$

したがって, $\frac{a}{m}$ を $\frac{b}{m}$ で割ると, a を b で割るときに比べて, 商は q で変らないが, 余りは $\frac{r}{m}$ で小さくなること。ただし, $m \neq 1$

(3) $a-nb=b(q-n)+r,\ 0 \leqq r < b$

$a+nb=b(q+n)+r,\ 0 \leqq r < b$

したがって, $a-nb$ (また, $a+nb$) を b で割って得られる余りは, a を b で割って得られる余りと変らないこと。

---

*長崎大学教育学部数学教室

などの学習内容は，具体的数値における事例研究としては小学校で，簡単な理由を加えながらの研究であるなら中学校において，「整除性」の特性の理解を深めるために十分に導入されうるものであり，また大事な学習材でもある。この学習系列の中に，引き続き特別な場合として，約数──倍数 の概念が存在しているから，「2による整除性」，「3による整除性」等々が取り扱われるなら，自然数のもつ特性がなお一層深められ，有機的なつながりをもっての興味も増す。2による整除性，3による整除性等々における倍数の判定法の原理の学習や認識に，より初等的取り扱いであって，しかも首尾一貫したものが学習者に読みとれるなら，なお一層，教材としてふさわしいといえよう。

II．わが国における倍数の判定法の取り扱い

わが国ではすでに，寺尾寿：中等教育 算術教科書（明治21年）において，『剰余ノ理論』の中で，2，5，4，25，9，3，11の各数について，この順に，これらの数の倍数であるか否かを知る方法が述べられている〔1〕。

その数学的原理として，剰余が等しい── $a=bq+r$ と $a-nb=b(q-n)+r$ ──が用いられている。

さらにその後の進んだ著書，寺尾寿•藤野了祐：理論応用 算術講義（大正6年）においても，同じ数学的原理を用いて，2，5，4，25，8，125，9，3，11の各数について，これらの数の倍数であるか否かを判定する方法が示されている〔2〕。

一方，日本の算数・数学教育に直接的に大きな影響を及ぼし方向づけをした藤沢利喜太郎は，その著，算術教科書 上（明治29年）において，『二ツノ数ノ公約数ハ亦此レ等ノ数ノ和及差ノ公約数ナリ』によって，2，4，8，5，9，3，6，11なる約数について，この順に，割り切れる場合を説明している〔3〕。

現在のわが国の中学校第1学年の教科書においては，この藤沢流の視点に立って，約数を倍数の立場に置き換えたところの『整数aの倍数どおしの和は，aの倍数である』を用いることにより，しかし多くの教科書ではその原理を明示することもなく，しかも整除性の特性を深めるという一貫した思想においてではなく，系統的にでもなく，単にクイズ的に〝倍数早見法〟という立場で教科書の本文からは切り離されて取り扱われている〔4〕。クイズ的であっても，教科書に掲載されているのは6社中4社である。教科書ではなく教師用指導書の中で触れているものもある。

通常認められる簡単な数の倍数の判定法は，次のものであろう。要点を掲げれば

- 2の倍数：一の位の数が2の倍数
- 3の倍数：各位の数の和が3の倍数
- 4の倍数：最後の2けたが4の倍数
- 5の倍数：一の位の数が5の倍数
- 6の倍数：各位の数の和が3の倍数であって，一の位の数が2の倍数
- 8の倍数：最後の3けたが8の倍数
- 9の倍数：各位の数の和が9の倍数
- 11の倍数：一の位からはじめて一つおきの各位の数の和と，十の位からはじめて一つおきの各位の数の和との差が11の倍数
- また，一の位から3けた毎に区切り，下位から奇数番目の区切りの数の和と，下位

から偶数番目の区切りの数の和との差が，11，13の倍数であるなら，その数はそれぞれ11，13の倍数である，という判定法もおなじみである。

・さらに，７の倍数の判定に，上の方法が用いられるのはよく知られているところである。

なお，７の倍数の別な判定法については，中学校第１学年教科書１社のみにおいて，それもアルゴリズムだけが例示されているにすぎないが，それは次のものである。この判定法は，たとえば，フランスの教科書，Collection Durrande Mathématiques 5ᵉ (1982)〔５〕にもみられるなど，実用的であるがゆえに，しばしば目にする方法である。

念のために，たとえば自然数 $\overline{abcde}$ について述べると

$$N=\overline{abcde}=10^4a+10^3b+10^2c+10d+e$$
$$=10\{10^3a+10^2b+10c+d-2e\}+21e$$

上式で，$21e$ は７の倍数である。

したがって，$N_1=(10^3a+10^2b+10c+d)-2e$ が７の倍数であれば，Nは７の倍数である。

という原理に基づく方法である。

すなわち，Nを一の位とその他に区切り，１けた小さい数 N_1 に置き換えて判定する方法である。N_1 について判定するのがむずかしければ，N_1 に同じ操作を行ってさらに１けた小さい数にし，以下この操作をくり返して，視察によって判定できるところまで進める。

$$\overline{a\ b\ c\ d \vdots e} \Rightarrow \begin{array}{r} \overline{a\ b\ c\ d} \\ -\qquad 2e \\ \hline N_1 \end{array}$$

N_1 が位取り記数で $N_1=10^3a'+10^2b'+10c'+d'$ であれば

$$N_1=10\{10^2a'+10b'+c'-2d'\}+21d'$$

したがって，$N_2=(10^2a'+10b'+c')-2d'$ が７の倍数であれば，N_1 は７の倍数であり，ゆえにNは７の倍数である。

以下，同じ操作をくり返しても理由が成り立つことは明らかである。

以上のよく知られているこれらの倍数判定法は，結果として，一位に着目したり，あるいは各位を表す数の和を求めてみたり，最後の２けたに着目したり，…… と認識面において一貫性に読みとり難いところがある。

III．除法における余りの特性

二つの自然数 a，b $(b\neq 0)$ の除法 $a\div b$ について，小学校第３学年でユークリッドの除法が取り扱われ，小学校第４学年では商を小数において求めることを学習する。それはユークリッドの除法から有理数の世界における演算へと拡張される場面である。といっても，その除法アルゴリズムは，基本的に，既習のユークリッドの除法の形式をくり返し用いるに過ぎない。すなわち $a\div b$ $(0<a<b)$ において

先ず，$a=b\times 0+r_1$，$0<r_1(=a)<b$

$0<10r_1<10b$ から $10r_1=b\times q_1+r_2$，$0\leqq q_1\leqq 9$，$0\leqq r_2<b$

$$\therefore\ \frac{a}{b}=0+\frac{r_1}{b}$$

$$=0+\frac{q_1}{10}+\frac{r_2}{10b}$$

$r_2 \neq 0$ であれば，$0<10r_2<10b$ から $10r_2=b\times q_2+r_3$，$0\leqq q_2\leqq 9$，$0\leqq r_3<b$

$$\therefore\ \frac{a}{b}=0+\frac{q_1}{10}+\frac{q_2}{10^2}+\frac{r_3}{10^2 b}$$

（なお $r_2=0$ の場合も $10r_2=b\times q_2+r_3$，$q_2=0$，$r_3=0$ として上式に含まれ，成り立つ。）

……………………………………………………

この手続きにおける連続する「余り」を r_i，r_{i+1} $(i=1,2,3,\cdots\cdots)$ とおくと

$$10r_i\equiv r_{i+1}\ (\mathrm{mod}\ b)$$

である。これが，商を小数において求める「余り」の特性である。

したがって，除法 $1\div b$（b は 2 以上の自然数）についてみれば，「余り」の間に

$10r_i\equiv r_{i+1}\ (\mathrm{mod}\ b)$，$r_1=1$ ……………………………①

ゆえに，また $10^k\equiv r_{k+1}\ (\mathrm{mod}\ b)$…………………………②

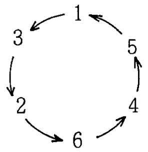
すなわち　$(10^k-r_{k+1})\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ b)$………………………③

という関係が成り立つ。ただし，$k=0,1,2,3,\cdots\cdots$.

$1\div 7$ で例示する。

$0.142857\cdots$	（性質①）	（性質②）	（性質③）
$7\,\overline{)\,10}$	$\cdots 1=7\times 0+1$	$\therefore 1=7\times 0+1$	$\therefore 1-1=7\times 0$
7			
30	$\cdots 10=7\times 1+3$	$\therefore 10=7\times 1+3$	$\therefore 10-3=7\times 1$
28			
20	$\cdots 30=7\times 4+2$	$\therefore 100=7\times 14+2$	$\therefore 10^2-2=7\times 14$
14			
60	$\cdots 20=7\times 2+6$	$\therefore 1000=7\times 142+6$	$\therefore 10^3-6=7\times 142$
56			
40	$\cdots 60=7\times 8+4$	$\therefore 10000=7\times 1428+4$	$\therefore 10^4-4=7\times 1428$
35			
50	$\cdots 40=7\times 5+5$	$\therefore 100000=7\times 14285+5$	$\therefore 10^5-5=7\times 14285$
49			
1	$\cdots 50=7\times 7+1$	$\therefore 1000000=7\times 142857+1$	$\therefore 10^6-1=7\times 142857$
⋮	$\cdots 10=7\times 1+3$	$\therefore 10000000=7\times 1428571+3$	$\therefore \underbrace{10^7-3}_{(7\text{の倍数})}=7\times \underbrace{1428571}_{(\text{商の列})}$
⋮	⋮	⋮	⋮

(「余り」の系列)：



これを用いて，７の倍数の判定法を求める。
たとえば，８けたの自然数 $\overline{abcdefgh}$ を考える（この事例で一般性を失わない)。

$$N=\overline{abcdefgh}=10^7a+10^6b+10^5c+10^4d+\cdots\cdots+10g+h$$
$$=\{(10^7-3)a+(10^6-1)b+(10^5-5)c+\cdots\cdots+(10-3)g+(1-1)h\}$$
$$+\{3a+b+5c+4d+6e+2f+3g+h\}$$

上式の前項は７の倍数である。
したがって，後項が７の倍数であれば，Nは７の倍数である。
すなわち，Nが７の倍数であるかどうかの判定は

$$3a+b+5c+4d+6e+2f+3g+h$$

に着目することによって成り立つ。この後項の式は
『Nを各位毎に区切り(すなわち，１けた毎に区切り)，一の位からの各位の表す数 h，g，f，e，d，c，b，a に対して，1÷7 における「余り」の系列１，３，２，６，４，５，１，３，２，…… を，この順にそれぞれ対応するものに掛けて加えたもの』であることがわかる。

・一の位からの各位の表す数：	h	g	f	e	d	c	b	a	の積和：
	｜	｜	｜	｜	｜	｜	｜	｜	
・１÷７における「余り」の系列：	1	3	2	6	4	5	1	3	

$$\boldsymbol{h+3g+2f+6e+4d+5c+b+3a}$$

なお，上式による値が，視察によって７の倍数であるかどうか判定し難いときは，この値に対して上述の原理――すなわち，積和――をさらに適用すればよいことは言うまでもない。

IV．倍数の判定

１．２の倍数の判定

１÷２を求める。

$$\begin{array}{r} 0.5 \\ 2\,\overline{)\,1\,0} \\ 1\,0 \\ \hline 0 \end{array}$$

	(性質①)	(性質③)
	$\cdots 1=2\times0+1$	$\therefore 1-1=2\times0$
	$\cdots 10=2\times5+0$	$\therefore 10-0=2\times5$
	$0=2\times0+0$	$\therefore 10^2-0=2\times50$
	(以下　０の連続)	$10^3-0=2\times500$
	⋮	⋮

(「余り」の系列)：　$1 \to \circlearrowleft 0$

$\therefore\ N=\{(10^7-0)a+(10^6-0)b+(10^5-0)c+\cdots\cdots+(10-0)g+(1-1)h\}$
$\qquad +(0a+0b+0c+\cdots\cdots+0g+h\}$

この前項は２の倍数である。

したがって，後項――つまり，h――が２の倍数であれば，Nは２の倍数である。

この式hは，次のように，やはり上述の原理に基づいて導かれたものである。

$$\left.\begin{array}{lcccccccc} \text{・一の位からの各位の表す数：} & h & g & f & e & d & c & b & a \\ & | & | & | & | & | & | & | & | \\ \text{・}1\div 2\text{における「余り」の系列：} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right\}\text{の積和：}$$

$\boldsymbol{h}$

なお，この結果は，従来から知られている２の倍数の判定法が，これに一致することを示している。

２．３の倍数の判定

$N=\{10^7-1)a+(10^6-1)b+(10^5-1)c+\cdots\cdots+(10-1)g+(1-1)h\}$
$\qquad +\{a+b+c+d+e+f+g+h\}$

この式の前項は３つの倍数であるから，後項――

$$\boldsymbol{h+g+f+e+d+c+b+a}$$

が３の倍数であれば，Nは３の倍数である。これも

『Nを各位毎（１けた毎）に区切り，一の位からの各位の表す数h，g，f，e，d，c，b，aに対して，$1\div 3$における「余り」の系列１，１，１，１，１，…… を，この順にそれぞれ対応するものに掛けて加えたもの』という上述の原理に従って得られたものである。

なぜなら，$1\div 3$において

$$\begin{array}{r} 0.3\cdots \\ 3\,\overline{)\,1\ 0\ } \\ \underline{9\ } \\ 1\ \end{array}$$

$\cdots 1=3\times 0+1 \qquad \therefore 1-1=3\times 0 \qquad$ (「余り」の系列)：$\circlearrowleft 1$

$\cdots 10=3\times 3+1 \qquad \therefore 10-1=3\times 3$

$\cdots 10=3\times 3+1 \qquad \therefore 10^2-1=3\times 33$

$\vdots$

$\qquad 10^3-1=3\times 333$

$\qquad \vdots$

であるからである。

３の倍数の従来から知られている判定法は，これに一致する。

3．4の倍数の判定

$1 \div 4$については次の通りである。

$$
\begin{array}{r}
0.25 \\
4 \overline{)\,1\,0} \\
\underline{8} \\
20 \\
\underline{20} \\
0
\end{array}
$$

（「余り」の系列）：

$$
\begin{array}{c}
1 \\
\downarrow \\
2 \\
\downarrow \\
0
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l}
\therefore 1-1=4\times 0 \\
10-2=4\times 2 \\
10^2-0=4\times 25 \\
10^3-0=4\times 250 \\
\vdots
\end{array}
$$

$$
\therefore\ N=\{(10^7-0)a+(10^6-0)b+(10^5-0)c+\cdots\cdots+(10-2)g+(1-1)h\} \\
+\{0a+0b+0c+\cdots\cdots+0f+2g+h\}
$$

この前項は4の倍数である。したがって，後項――

$$\boldsymbol{h+2g}$$

が4の倍数であれば，Nは4の倍数である。

この場合も，$1\div 4$における「余り」の系列を掛けて加える，という同じ原理に基づいて得られた。

4．5の倍数の判定

$1\div 5$における「余り」の系列は，1，0，0，0，0，……である。

$$
\therefore\ N=\{(10^7-0)a+(10^6-0)b+(10^5-0)c+\cdots\cdots+(10-0)g+(1-1)h\} \\
+\{h\}
$$

既述の同じ原理に基づいて得られた後項――

$$\boldsymbol{h}$$

に着目して，これが5の倍数であれば，Nは5の倍数であ。

5．6の倍数の判定

$1\div 6$における「余り」の系列は，1，4，4，4，4，……

$$
\therefore\ N=\{(10^7-4)a+(10^6-4)b+(10^5-4)c+\cdots\cdots+(10-4)g+(1-1)h\} \\
+\{4a+4b+4c+\cdots\cdots+4g+h\}
$$

したがって，この場合も，前項が6の倍数であることから，後項――Nを1けた毎に区切り，一の位からの各位の表す数 h，g，f，e，d，c，b，aに対して，$1\div 6$の「余り」の系列1，4，4，4，4，……を，この順にそれぞれ対応するものに掛けて加えたもの――

$$\boldsymbol{h+4g+4f+4e+4d+4c+4b+4a}$$

が6の倍数であるかどうかを判定すればよい。

6．7の倍数の判定

既述の通りである。

7．8の倍数の判定

1÷8における「余り」の系列は，1，2，4，0，0，0，0，……

したがって，Nに対して

$$h+2g+4f$$

が8の倍数であるかどうかを判定すればよいことは明らかである。

8．9の倍数の判定

1÷9における「余り」は，1，1，1，1，……

したがって，Nに対して

$$h+g+f+e+d+c+b+a$$

が9の倍数であれば，Nは9の倍数である。

従来から知られている9の倍数の判定法は，これに一致する。

9．10の倍数の判定

これについても同様である。

1÷10の「余り」の系列は，1，0，0，0，0，……であるから，Nに対して

$$h$$

を対象にすればよい。

ただし，$0 \leqq h \leqq 9$であることから，実際には$h=0$のときに限ってNが10の倍数であることがわかる。

10．11の倍数の判定

1÷11における「余り」の系列は，1，10，1，10，1，10，……である。

$\therefore\ 1-1=11\times 0,\ 10-10=11\times 0,\ 10^2-1=11\times 9,\ 10^3-10=11\times 90,$
$10^4-1=11\times 909,\ \cdots\cdots\cdots$

$$\therefore\ N=\{(10^7-10)a+(10^6-1)b+(10^5-10)c+\cdots\cdots+(10-10)g+(1-1)h\}$$
$$+\{10a+b+10c+d+10e+f+10g+h\}$$

したがって，上式の前項が11の倍数であることから，『一の位からの各位の表す数と，1÷11における「余り」の系列との積和――

$$h+10g+f+10e+d+10c+b+10a$$

が11の倍数であるかどうかを判定すればよい。

なお，11に対する「余り10」については，「余り－1」と考えることができる。したがって，10を掛ける代りに－1を掛けた$h-g+f-e+d-c+b-a$，すなわち

$$(h+f+d+b)-(g+e+c+a)$$

について判定することにすれば，従来から知られている11の倍数の判定法は，これに一致する。

11．12，13，…… の倍数の判定

これらについても，まったく同様に進めて，上述の同じ原理から判定法を得る。

- 12の倍数の判定：$h+10g+4f+4e+4d+4c+4b+4a$が12の倍数．
- 13の倍数の判定：$h+10g+9f+12e+3d+4c+b+10a$が13の倍数．
- ………………………………

このように，いずれの場合においても，与えられた自然数Nに対して，

『その数の一の位からの各位の表す数に対して，$1\div b$における「余り」の系列を，その順にそれぞれ対応するものに掛けて加えたもの（すなわち，積和）』

が「bの倍数」であるかどうか，

を判定することによって，Nのbによる整除性が判定される。（この積和が，視察によって，bの倍数であるかどうかが判定し難いときは，この値に対して，上の原理をさらに適用して判定する。）

これに基づく判定法は，$1\div b$が割り切れる割り切れないの例外なく，bがどんな自然数であってもよく（素数・合成数などに関係なく，10以上の大きな数に対しても），まったく同一の手続きで一貫して取り扱うことができるという特徴をもっている。小学校第4学年で学習する除法$1\div b$における「余り」の系列を用いるだけであるから，その手続きも，理由も，きわめて初等的であり，認識しやすいものである。

V．数の区切り方による倍数判定法の特性――7の倍数の判定を例として――

以上において，$10r_i\equiv r_{i+1}\ (\mathrm{mod}\ b)$，$r_1=1$　したがって$(10^k-r_{k+1})\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ b)$に基づく判定法，つまり1けた区切りによる判定法を示した。

次に，この方法と，一の位から2けた毎に区切る場合，一の位から3けた毎に区切る場合，…… によって判定する方法との関係を調べてみる。

1．一の位から2けた毎に区切る場合：$\overline{a\ b\,|\,c\ d\,|\,e\ f\,|\,g\ h\,|}$

$N=\overline{abcdefgh}=10^6(10a+b)+10^4(10c+d)+10^2(10e+f)+(10g+h)$

$1\div 7$における「余り」の系列において，すでに調べたように

$1-1$，10^2-2，10^4-4，10^6-1，10^8-2，$10^{10}-4$，……

すなわち，$10^{6k}-1$，$10^{6k+2}-2$，$10^{6k+4}-4$　($k=0,1,2,3,\cdots$) は，それぞれ7の倍数である。

$$\therefore\ N=\{(10^6-1)(10a+b)+(10^4-4)(10c+d)+(10^2-2)(10e+f)+(1-1)(10g+h)\}$$
$$+\{(10a+b)+4(10c+d)+2(10e+f)+(10g+h)\}$$

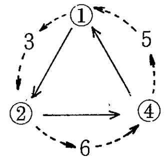
において，前項は7の倍数であるから，後項が7の倍数であれば，Nは7の倍数である。後項は

『一の位からの各区切り（2けた毎の区切り）の表す数に対して，$1\div 7$における「余り」の系列の1からはじめて一つおきの1，2，4，1，2，4，……を，この順にそれぞれ対応するものに掛けて加えたもの，つまり

$(10g+h)+2(10e+f)+4(10c+d)+(10a+b)$』

である。これを判定の対象にすればよい。

（$1\div 7$の「余り」の系列）



2．一の位から3けた毎に区切る場合：$\overline{a\ b\,|\,c\ d\ e\,|\,f\ g\ h\,|}$

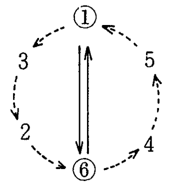
$1\div 7$において$1-1$，10^3-6，10^6-1，10^9-6，……

すなわち，$10^{6k}-1$，$10^{6k+3}-6$　($k=0,1,2,3,\cdots\cdots$) は，それぞれ7の倍数である。

$$\therefore\ N=\{(10^6-1)(10a+b)+(10^3-6)(10^2c+10d+e)+(1-1)(10^2f+10g+h)\}$$

$$+\{(10a+b)+6(10^2c+10d+e)+(10^2f+10g+h)\}$$

（1÷7の「余り」の系列）



したがって，

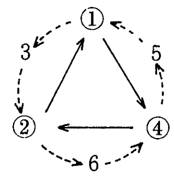
『一の位からの各区切り（3けた毎の区切り）の表す数に対して，1÷7の「余り」の系列の1からはじめて二つおきの1，6，1，6，……を，この順にそれぞれ対応するものに掛けて加えたもの，すなわち

$$(10^2f+10g+h)+6(10^2c+10d+e)+(10a+b)』$$

が7の倍数であるかどうかを判定することによって，Nの7による整除性が求まる。

なお，7に対する「余り6」を「余り－1」と考えて，「余り」の系列を1，－1，1，－1，……として積和を求めれば，従来の知られた判定法がこれに一致することは明らかである。

（1÷7の「余り」の系列）



3．一の位から4けた毎に区切る場合： $\overline{a\ b\ c\ d}\,\overline{e\ f\ g\ h}$

1÷7における「余り」の系列の1からはじめて三つおきの1，4，2，1，4，2，……

を用いれば，次の値

$1-1$，10^4-4，10^8-2，$10^{12}-1$，$10^{16}-4$，……

すなわち，$10^{12k}-1$，$10^{12k+4}-4$，$10^{12k+8}-2$

（$k=0,1,2,3,\cdots$）は7の倍数であるから，

『一の位からの各区切り（4けた毎の区切り）の表す数に，『余り』の上掲の系列を，この順にそれぞれ対応するものに掛けて加えたもの，

$$(10^3e+10^2f+10g+h)+4(10^3a+10^2b+10c+d)』$$

を7の倍数であるかどうかの判定に用いればよいことは言うまでもない。

4．一の位から5けた毎，6けた毎，7けた毎，…… に区切る場合：

これらの場合も，まったく同様に考えることができる。

一の位からのそれぞれの各区切りの表す数に，

・5けた毎に区切る場合は，1÷7の「余り」の1からはじめて四つおきの

　　1，5，4，6，2，3，……

をこの順に，

・6けた毎に区切る場合は，「余り」の五つおきの

　　1，1，1，1，1，……

を，

・7けた毎に区切る場合は，1けた毎に区切る場合と同じ系列であるところの

　　1，3，2，6，4，5，……

をこの順に，

・…………………………………

それぞれ対応するものに掛けて加えたもの，を判定の対象にすればよい（証明は明らかであるから省略する）。

なお，与えられた数の区切り方については，これらに限られるものではない。自由ないろいろな区切り方が可能であり，それぞれに応じて上述の原理に基づく判定法を与え

ることができる。

VI. おわりに

除法 $1 \div b$ における「余り」の系列に着目すれば，b の倍数の判定法のもう一つが考えられ，このほうがむしろ一貫性があって認識しやすいことを示した。しかも，整理した理論的説明を極力控えて一つの原理に基づく操作的・アルゴリズム的な立場と帰納的・発展的な視点から記述した。それは，中学校の生徒のために教材化を図り易くし，また，開発が急がれている〝課題学習〞の事例ともなり得ることを想定してのことである。

整った理論を学習してそれを適用してみる，というのは必要なことであるが，それは受動的になりがちであり，しかも広がりに乏しい。上でみてきたように，一つの素材を観察し，いろいろ感じたり・考えたり・思考実験を行ったりすることからはじめて，探求し，発見し，一歩外に踏み出して予測・推測してみる，そして確かめながら漸進的に図式化し一般化するという〝方法〞を自分で味わうことは，より一層大事な数学的な考え——力強さと機能性を包合した——を学んでいくことであると考える。

伝統的な，定式化された静的で概念ばかりの〝内容（理論）〞の学習——それはしばしばモチベーションに欠けるものである——だけでなく，その以前に（またはそれに並行して）生徒にとって意味と意義ある〝方法〞を学習しておくことは，それ自身のためにも，もちろん〝内容〞の理解のためにも必要なことである。

引用及び参考文献

〔1〕寺尾　寿：中等教育 算術教科書，敬業社，明治21年，pp. 154—170
〔2〕寺尾　寿，藤野了祐：理論応用 算術講義，冨山房，大正6年，pp. 100—110
〔3〕藤沢利喜太郎：算術教科書　上巻，大日本図書，明治29年，pp. 189—194
〔4〕中学校 数学教科書 第1学年，各社，昭和63年度版
〔5〕Such, S. and Borel, J.-C.: Collection Durrande Mathématiques 5^e, Technique & Vulgarisation, 1982, p. 94