

## 磁石と交流電流による弦の共振現象

福山 豊\*・森田まゆみ\*

(平成元年 4 月 5 日受理)

### Resonance Phenomena of a String Driven by a Permanent Magnet and an Alternating Current

Yutaka FUKUYAMA and Mayumi MORITA

(Received, April 5, 1989)

#### 1. はじめに

弦の一端を固定して、他端はおもりを結びつけ滑車にかけて吊し、さらに弦の途中に弦をまたいでU型磁石を置く。この弦の両端に交流電流を流すことによりU型磁石の位置に振動が励起され、それが両端に向かう波となって伝播する(図1)。弦の長さがこの波の半波長の整数倍に等しいとき共振を生じる<sup>1-3)</sup>。この弦の共振の様子は、柱型レンズを用いて振幅を拡大して撮影した実験の写真が久保田により報告されている<sup>4)</sup>。また、この場合の弦の共振現象については、すでに多重波の手法をもちいて理論的考察をおこない弦の変位を表す一般式を導いた<sup>5)</sup>。ここでは、この弦の変位を表す理論式をもとにこの振動の特徴を明らかにするための考察とその結果についてコンピューターによるシミュレーションをおこなった。2では、まず、理論の簡単な要約をおこない、3では、振動の一般式を共振しているとき減衰係数  $a$  を小さいとしたときの近似式を求め、その特徴を議論する。さらに4では、多重波による式をもとにコンピューターによるシミュレーションをおこない目で直接これらの振動を確かめられるように図を描かせた。5はまとめとボーイングについて付言した。

#### 2. 弦の振動を表す多重波理論

両端を固定端とした長さ  $l$  の弦の一端を  $x$  座標の原点  $0$  とし、他端を  $l$  とする。また、U型磁石は原点から  $d$  の距離離れた点に置かれている

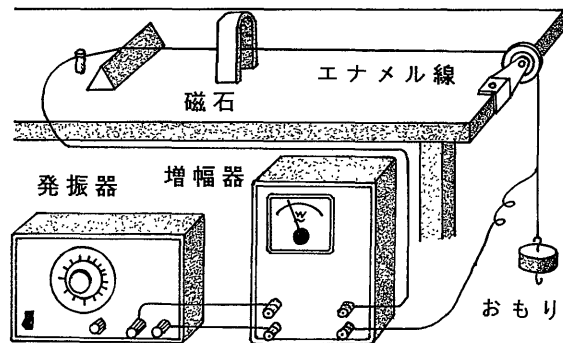


図1 弦の強制振動実験

ものとする。このとき弦の両端に交流電流を流したとき座標  $x$  の位置での弦の振動の様子を調べることにする。U型磁石の位置  $d$  に生じる振動は、時刻を  $t$ 、振幅を  $A$ 、角振動数を  $\omega$  とすると  $A \sin \omega t$  と表される。この振動は両端に向かって速さ  $v$  で伝わる波を生じる。波は固定端で反射されるたびに位相が  $\pi$  ずつ変化する。ここで波の振幅は伝播する距離  $s$  により  $e^{-as}$  倍小さくなるものと仮定した。  $a$  は弦に生じる波の減衰係数である。弦の波による変位の理論式を導くために、  $x$  が  $d$  より小さい (左側) か大きい (右側) かで別々に考察する。

#### A. $0 < x \leq d$ の場合

時刻  $t$  における弦の  $x$  の位置の変位  $y^A(x, t)$  は、U型磁石の位置  $d$  で生じて右側へ伝播する波  $y^A_R(x, t)$  と左側へ伝播する波  $y^A_L(x, t)$  との重ね合わせ

$$y^A(x, t) = y^A_R(x, t) + y^A_L(x, t) \quad (1)$$

で記述できる。

右側へ伝播する波と左側へ伝播する波は、それぞれ、

$$\begin{aligned} y^A_R(x, t) = & Ae^{-a(2\ell-x-d)} \sin [\omega\{t-(2\ell-x-d)/v\} + \pi] \\ & + Ae^{-a(2\ell+x-d)} \sin [\omega\{t-(2\ell+x-d)/v\} + 2\pi] \\ & + Ae^{-a(4\ell-x-d)} \sin [\omega\{t-(4\ell-x-d)/v\} + 3\pi] \\ & + Ae^{-a(4\ell+x-d)} \sin [\omega\{t-(4\ell+x-d)/v\} + 4\pi] \\ & + \dots \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} y^A_L(x, t) = & Ae^{-a(d-x)} \sin [\omega\{t-(d-x)/v\}] \\ & + Ae^{-a(d+x)} \sin [\omega\{t-(d+x)/v\} + \pi] \\ & + Ae^{-a(2\ell+d-x)} \sin [\omega\{t-(2\ell+d-x)/v\} + 2\pi] \\ & + Ae^{-a(2\ell+d+x)} \sin [\omega\{t-(2\ell+d+x)/v\} + 3\pi] \\ & + \dots \end{aligned} \quad (3)$$

で表される。

#### B. $d \leq x \leq \ell$ の場合

$x$  の位置がU型磁石の位置  $d$  より右側にある場合も同様に考察できる。時刻  $t$  のとき  $x$  の位置での弦の変位  $y^B(x, t)$  は、  $d$  の位置から右側へ伝播する波  $y^B_R(x, t)$  と左側へ伝播する波  $y^B_L(x, t)$  の重ね合わせ

$$y^B(x, t) = y^B_R(x, t) + y^B_L(x, t) \quad (4)$$

で記述できる。

右側へ伝播する波と左側へ伝播する波は、それぞれ、

$$\begin{aligned} y^B_R(x, t) = & Ae^{-a(x-d)} \sin [\omega\{t-(x-d)/v\}] \\ & + Ae^{-a(2\ell-x-d)} \sin [\omega\{t-(2\ell-x-d)/v\} + \pi] \\ & + Ae^{-a(2\ell+x-d)} \sin [\omega\{t-(2\ell+x-d)/v\} + 2\pi] \\ & + Ae^{-a(4\ell-x-d)} \sin [\omega\{t-(4\ell-x-d)/v\} + 3\pi] \\ & + \dots \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} y^B_L(x, t) = & Ae^{-a(x+d)} \sin [\omega\{t-(x+d)/v\} + \pi] \\ & + Ae^{-a(2\ell-x+d)} \sin [\omega\{t-(2\ell-x+d)/v\} + 2\pi] \\ & + Ae^{-a(2\ell+x+d)} \sin [\omega\{t-(2\ell+x+d)/v\} + 3\pi] \\ & + Ae^{-a(4\ell-x+d)} \sin [\omega\{t-(4\ell-x+d)/v\} + 4\pi] \end{aligned} \quad (6)$$

+ . . . . .

で表される。

弦の振動による変位  $y^A(x, t)$  と  $y^B(x, t)$  は, (1)~(6)式に三角関数の公式などを持ちいていくらかの計算をおこなうことにより結局

$$y^A(x, t) = A \sqrt{\frac{2\{\cosh 2a(\ell-d) - \cos 2k(\ell-d)\}\{\cosh 2ax - \cos 2kx\}}{\cosh 2a\ell - \cos 2k\ell}} \times \sin\{\omega t - k\ell - \phi + \phi(\ell-d) + \phi(x)\}, \quad (0 < x \leq d), \quad (7)$$

$$y^B(x, t) = A \sqrt{\frac{2\{\cosh 2ad - \cos 2kd\}\{\cosh 2a(\ell-x) - \cos 2k(\ell-x)\}}{\cosh 2a\ell - \cos 2k\ell}} \times \sin\{\omega t - k\ell - \phi + \phi(d) + \phi(\ell-x)\}, \quad (d \leq x \leq \ell) \quad (8)$$

と表現できる。

ただし, 位相を表す  $\phi$  と  $\phi(X)$  は, それぞれ,

$$\tan \phi = \frac{e^{-2a\ell} \sin 2k\ell}{1 - e^{-2a\ell} \cos 2k\ell}, \quad (9)$$

$$\cos \phi(X) = \frac{2 \cos kX \sinh aX}{\sqrt{2\{\cosh 2aX - \cos 2kX\}}}, \quad (10)$$

$$\sin \phi(X) = \frac{2 \sin kX \cosh aX}{\sqrt{2\{\cosh 2aX - \cos 2kX\}}}$$

で決定される。(10)式の  $X$  には  $\ell-d, x, d$  と  $\ell-x$  を代入するものとする。

(7)式と(8)式のなかで  $a$  を零としたときの式を, それぞれ,  $y_0^A(x, t)$  と  $y_0^B(x, t)$  とすると

$$y_0^A(x, t) = 2A \frac{\sin k(\ell-d)}{\sin k\ell} \sin kx \cos \omega t, \quad (0 < x \leq d), \quad (11)$$

$$y_0^B(x, t) = 2A \frac{\sin kd}{\sin k\ell} \sin k(\ell-x) \cos \omega t, \quad (d \leq x \leq \ell) \quad (12)$$

となる。これらは波の振幅に減衰がないと仮定したときに導かれた式と同じ式となる<sup>6)</sup>。

ところが, (11)式と(12)式で共振を示す振動は, これらの分母が極小の値をとるとき, すなわち,  $\sin k\ell = 0$  のときであるが, このときは振幅が無限大となり, 実際の観測結果と定量的に比較をおこなうことができない。

### 3. 共振を示す振動の近似式

次に, 共振の様子を調べるために, 減衰係数  $a$  は十分に小さいが有限の場合を考察する。共振をおこすためには, (7)式と(8)式の平方根のなかの分母が極小値をとることが必要である。この分母の式は

$$\cosh 2a\ell - \cos 2k\ell \approx 2(a^2\ell^2 + \sin^2 k\ell) \quad (13)$$

と近似することができ, 極小値をとる (すなわち共振する) のは

$$\sin k\ell = 0, \text{ すなわち } k\ell = n\pi \quad (n=1, 2, 3, \dots) \quad (14)$$

の関係式が成立するときであることがわかる。そこで(14)式できまる角波数と角振動数を  $k_n$  と  $\omega_n$  として, (7)~(10)式に代入し,  $a_n$  が小さいことを考慮して計算を実行する。その結果は, (7)式と(8)式が同じ式となり

$$y_n(x, t) = 2 \frac{A_n \sin k_n d}{a_n \ell} \sin k_n x \sin \omega_n t, \quad (0 < x \leq \ell) \quad (15)$$

で表される定常波となることが導かれる。ここで  $A$  と  $a$  も  $n$  で区別し  $A_n$  と  $a_n$  と表した。

この式から共振時の定常波の振幅は、減衰係数  $a_n$  と弦の長さ  $\ell$  に反比例し、振動源の位置  $d$  によって決まる  $\sin k_n d$  に比例することがわかる。(以後  $n$  は自然数だけでなく  $n = k\ell/\pi$  の値でも表す)

#### 4. 振動のシミュレーション

以上の理論的結果を視覚化して理解するために、(7)式と(8)式をもちいて、コンピューター・シミュレーションをおこなった。まず最初に、弦の長さを一定 ( $\ell=30\text{cm}$ ) にして、 $d=3.5\text{cm}$  のところに加える振動の振動数を変化させた実験のシミュレーションをおこなってみた。この場合に減衰係数  $a_n$  と振幅  $A_n$  は振動数にどのように依存するかがわからないが、振動数が大きいほど減衰係数は大きくなることが知られているので、ここでは  $a_n$  は振動数の 1 乗,  $3/2$  乗,  $2$  乗に比例するものと仮定し,  $0.0003n\text{cm}^{-1}$  (図 2),  $0.0003n^{3/2}\text{cm}^{-1}$  (図 3),  $0.0003n^2\text{cm}^{-1}$  (図 4) とし, 各図は  $n=1$  の基本振動から  $n=5$  の 5 倍振動までを描かせた。 $A_n$  はすべて一定値  $A$  とし, また縦軸は任意スケールとした。これは久保田の実験の撮影結果と比較できるものであり, その特徴をよく現している<sup>4)</sup>。

図 5 には,  $a_n$  が  $0.0003n^2\text{cm}^{-1}$  の場合で,  $n$  は上から 1, 1.25, 1.5, 1.75, 2, すなわち  $n=1$  の基本振動と,  $n=2$  の 2 倍振動とその中間の振動数の 3 つの振動を描いた。この図では, 基本振動と 2 倍振動だけが大きい振幅であり, それ以外の振動の振幅は前者の振幅に比べて圧倒的に小さいのでどのような形で振動するかわからない。

そこで, 基本振動と 2 倍振動のあいだの振動の形がどのようなになっているかをもっとよく調べるために, 減衰係数を 10 倍大きくしてみる。図 6 には  $a_n$  が  $0.0003n^2\text{cm}^{-1}$  の基本振動と  $0.003n^2\text{cm}^{-1}$  の基本振動とその間の 3 つの同じ値ずつ変化させた減衰係数のときの基本振動の振幅を描いてみた。(15)式から減衰係数が 10 倍になれば, 振動の振幅は  $1/10$  になることが導かれているが, この図から上の結果が示されていることがわかる。

図 7～図 9 では,  $a_n=0.003n\text{cm}^{-1}$ ,  $a_n=0.003n^{3/2}\text{cm}^{-1}$ ,  $a_n=0.003n^2\text{cm}^{-1}$  で  $n=1, 1.25, 1.5, 1.75, 2$  の振動(ただし,  $A$  は 10 倍して)を描いてみた。これらの図から振動源より遠い端側から常に半波長のところに節ができる振動であることがわかる。

次に, 外から加える振動数を一定にして弦の長さを変化させたときの基本振動の長さから 2 倍の弦の長さまで 5 つの振動を描かせた。減衰係数  $a_1$  は  $0.0003\text{cm}^{-1}$  (図 10) と  $0.003\text{cm}^{-1}$  (図 11) とした。さらに図 12 には図 10 の場合の 4 つの共振の振動のみ描かせた。この図から(15)式で導かれたように振動の振幅は長さに反比例することがわかる。

#### 5. おわりに

両端が固定端となった弦の途中を強制振動させた場合の振動を多重波の手法で理論的に解析し, その振動の様子をコンピューターを用いて描かせた。その結果, この共振現象の特徴がかなりよく理解できるようになった。ところで, 弦の強制振動のもう 1 つの興味のある例として, バイオリンなどのボーイングによる振動があり, その振動は  $C$  を定数として

$$Y(x, t) = C \sum_{n=1}^{\infty} (1/n^2) \sin k_n x \sin \omega_n t \quad (16)$$

で表される<sup>7)</sup>。

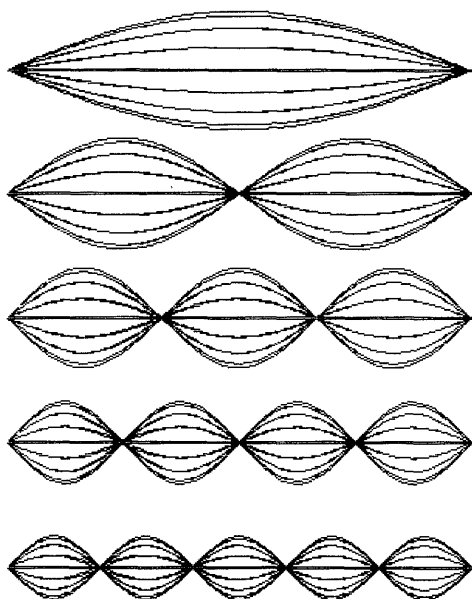


図 2  $a_n=0.0003n\text{cm}^{-1}(n=1\sim 5)$ ,  $\ell=30\text{cm}$ ,  $d=3.5\text{cm}$  の共振

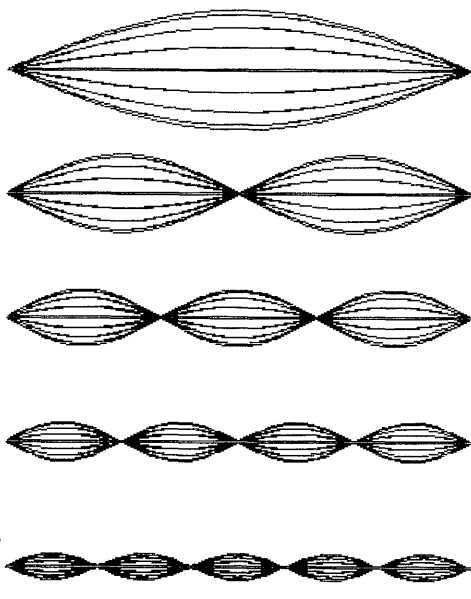


図 3  $a_n=0.0003n^{3/2}\text{cm}^{-1}(n=1\sim 5)$ ,  $\ell=30\text{cm}$ ,  $d=3.5\text{cm}$  の共振

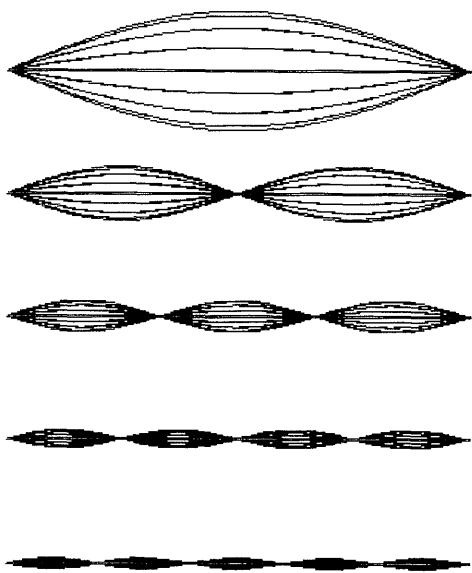


図 4  $a_n=0.0003n^2\text{cm}^{-1}(n=1\sim 5)$ ,  $\ell=30\text{cm}$ ,  $d=3.5\text{cm}$  の共振

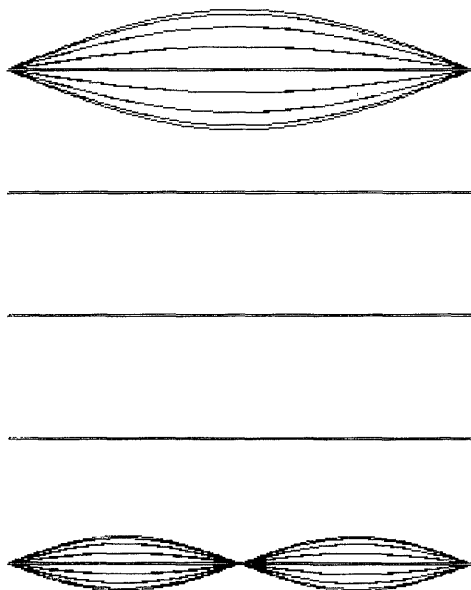


図 5  $a_n=0.0003n^2\text{cm}^{-1}(n=1, 1.25, 1.5, 1.75, 2)$ ,  $\ell=30\text{cm}$ ,  $d=3.5\text{cm}$  の振動

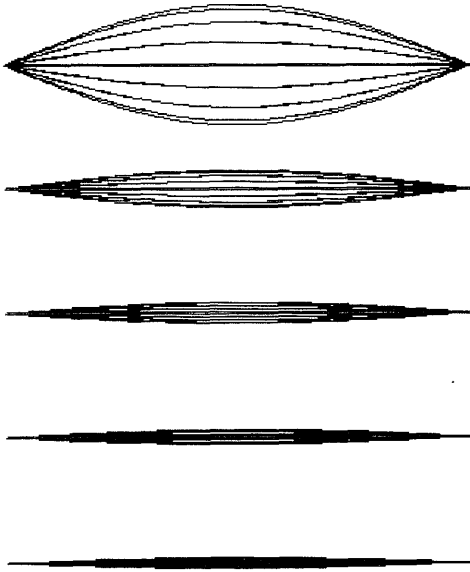


図 6  $a_n=0.0003n^2\text{cm}^{-1}$  と  $0.003n^2\text{cm}^{-1}$  とその中間 3 つの振動の振幅の大きさ

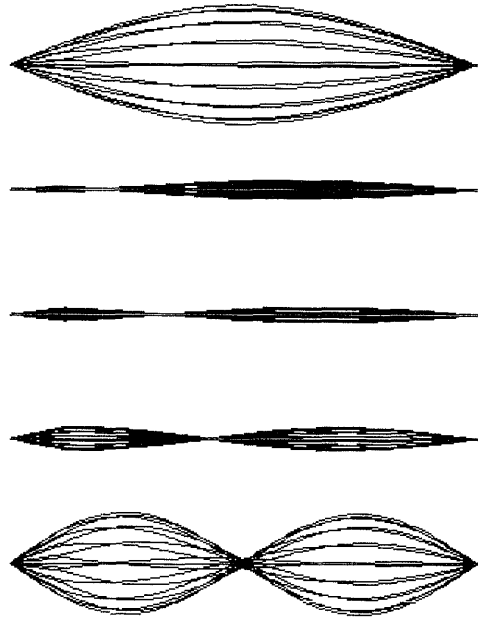


図 7  $a_n=0.003n\text{cm}^{-1}$  ( $n=1, 1.25, 1.5, 1.75, 2$ ),  $\ell=30\text{cm}$ ,  $d=3.5\text{cm}$  の振動

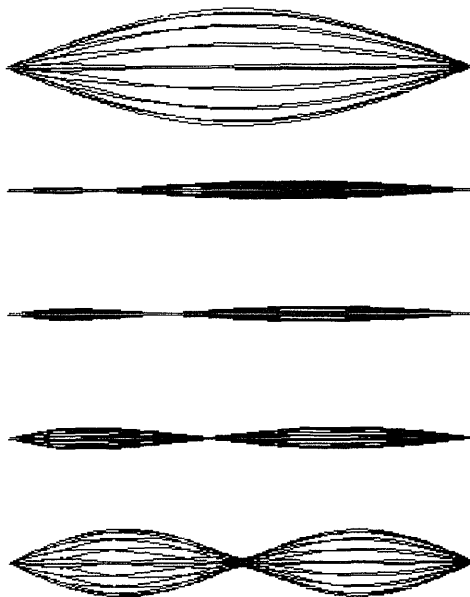


図 8  $a_n=0.003n^{3/2}\text{cm}^{-1}$  ( $n=1, 1.25, 1.5, 1.75, 2$ ),  $\ell=30\text{cm}$ ,  $d=3.5\text{cm}$  の振動

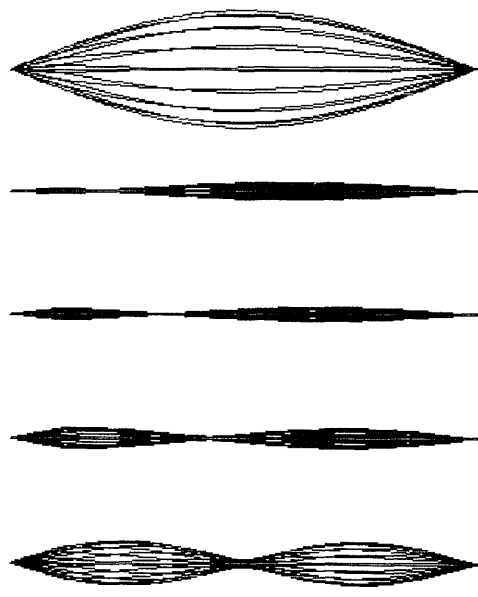


図 9  $a_n=0.003n^2\text{cm}^{-1}$  ( $n=1, 1.25, 1.5, 1.75, 2$ ),  $\ell=30\text{cm}$ ,  $d=3.5\text{cm}$  の振動

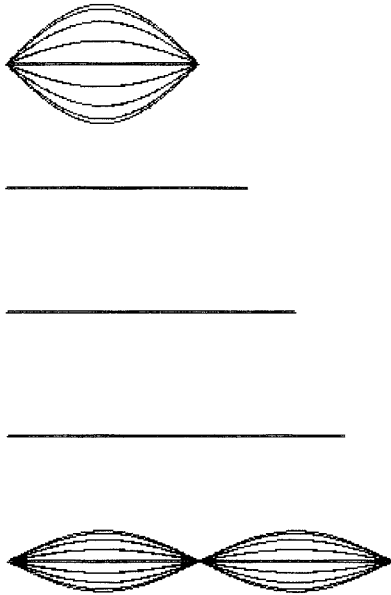


図10  $a=0.0003\text{cm}^{-1}$ ,  $d=3.5\text{cm}$ ,  $\ell=30, 30.5, 45, 52.5, 60\text{cm}$  の振動

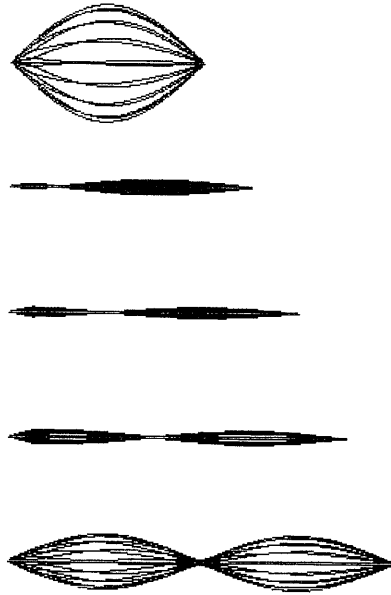


図11  $a=0.003\text{cm}^{-1}$ ,  $d=3.5\text{cm}$ ,  $\ell=30, 37.5, 45, 52.5, 60\text{cm}$  の振動

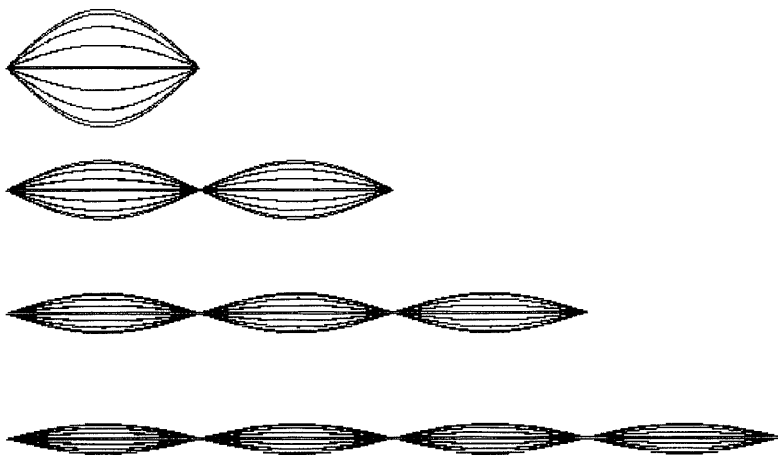


図12  $a=0.0003\text{cm}^{-1}$ ,  $d=3.5\text{cm}$ ,  $\ell=30, 60, 90, 120\text{cm}$  の共振

(15)式で  $a_n$  を  $n^2$  に比例すると仮定すると(16)式は

$$Y(x, t) \propto \sum_{n=1}^{\infty} y_n(x, t) / (A_n \sin k_n d) \quad (17)$$

と表すことができる。このことから、ボーイングによるバイオリンの振動は、弦にすべての共振を同時に生じさせる興味深い振動であることがわかり、ここでとりあつかわれた弦の共振と深い関連があることを示唆している。この現象についての結果は別の機会に報告したい。

## 付 録

ここでは、(15)式の導出をおこなう。

まず、(7)式の分子を考える。ここでは  $a$  を 0 にしても結果に大きく影響を及ぼさないの  
で  $a=0$  とおく。さらに、 $k=k_n=n\pi/\ell$  を代入すると、この分子は

$$\begin{aligned} & 2\sqrt{2} |\sin n\pi(\ell-d)/\ell \cdot \sin n\pi x/\ell| \\ & = 2\sqrt{2} (-1)^{n-1} |\sin n\pi d/\ell \cdot \sin n\pi x/\ell| \end{aligned} \quad (A1)$$

となる。

次に、位相の値を決定しよう。 $\phi$  を決定する(9)式の分子の  $\sin 2k\ell$  は共振するときは  $\sin 2n\pi$ 、すなわち、0 である。他方、分母は常に正の値をとるため  $\phi=0$  となることがわかる。また、 $\phi(X)$ 、( $X=\ell-d, x$ ) については、(10)式から分母で  $a$  が寄与するときは  $\sin kX$  が 0 のときであるが、このときは(7)式の分子が 0 となり振動の振幅が 0 となることを考慮して、 $a$  が 0 の極限を考えると

$$\cos \phi(X) = \pm 0, \quad \sin \phi(X) = \pm 1, \quad (\sin kX \leq 0) \quad (A2)$$

となる。これから

$$\phi(X) = \pm \pi/2, \quad (\sin kX \leq 0) \quad (A3)$$

が導かれる。

(13)式と(14)式、(A1)～(A3)式を考慮すると(7)式は

$$y_n(x, t) = 2 \frac{A_n \sin k_n d}{a_n \ell} \sin k_n x \sin \omega_n t, \quad (0 < x \leq d) \quad (A4)$$

となる。

(8)式についても同様の考察をおこなうと、(A4)式と同じ関係式を求めることができ、その結果(15)式が導かれることになる。

## 参 考 文 献

- 1) 霜田光一他：高等学校物理改定版、(学校図書株式会社, 1988) 102.
- 2) 中村誠太郎監修：物理学実験 (テーマ編) (東海大学出版会, 1982) 21.
- 3) 中込八郎編：最新教育物理実験 (聖文社, 1967) 185.
- 4) K. プルチブラム (江沢洋訳)：波動力学形成史 (みすず書房, 1982) 136.
- 5) 福山豊：長崎大教育自然研報 40 (1989) 13.
- 6) J. W. S. Rayleigh (J. W. Strutt): *The Theory of Sound* Vol. 1 (Dever, New York, 1945) 195.
- 7) 例えば, Lothar Cremer: *The Physics of the Violin* (The MIT Press, 1984) 39.