Nash の Bargaining 問題と その複占への応用

是　枝　正　啓

序

Nash〔3〕は，二人の player が交渉を行うことによってお互いに達成できる効用の集合の中から，どの点を交渉解として選ぶべきかを検討した。彼はこの解を決定するための条件として，6つの仮定を設け，これらの仮定のもとで両者の効用の積を最大にするような解が一意に存在することを示した。

しかし，これらの仮定の中で，特に，assumption of irrelevant alternatives（関係ない結果からの独立性の仮定）によって，二つの集合におけるそれぞれの解を比較した場合，2人のplayer のうち少なくとも1人が同意し難い結果が生じることが，Kalai and Smorodinsky〔1〕によって示された。そこで彼らは，この仮定に替えて assumption of monotonicity（単調性の仮定）を導入し，この仮定のもとで，Nash の解と異なる一意的な解が存在することを示したのである。

ところが，Kalai and Smorodinsky は，解決定にあたって最も大きな要因となる威嚇点（threat point）について不自然な仮定をおいている。というのは，彼らは，威嚇点は効用の集合が異なっても同じ点としているが，威嚇点は，一般に，集合が同じでないかぎり異なっていると考えられるからである。

われわれは，本稿で，集合と威嚇点の関係を公理のかたちで導入し，この公理のもとにで一意的な解が存在することを示すとともに，この交渉解の決定が，複占へ応用されうる例を考えてみたい。

I　Nash 解と Kalai and Smorodinsky 解

われわれは，2人の player の交渉問題を次のように定式化しよう。ま

ず，S_1 を２人の player 到達可能な集合とし，R^2 の部分集合で，compact，convex とする。この S_1 のある点を交渉によって選択するには，まず交渉にあたる２人の player の立場を表わす点を指定しなければならないが，この点を S_1 の内点 a^1 で表わし，a^1 を威嚇点（threat point）と呼ぶことにしよう。威嚇点は，一般に，player 1 および２が互いに威嚇することによって，威嚇される人に比べて，威嚇する人の立場が改善される点ということができる。このように，集合 S_1 と威嚇点 $a^1 \in S_1$ が与えられたとき，組（a^1，S_1）を bargaining pair と呼ぶ。Bargaining pair の集合をＵで表わし，Ｕから R^2 への写像をｆで表わす。

Nash は，$f(a^1, S_1)=(\overline{u}, \overline{v}) \in S_1$ が次の５つの仮定 N1～N5 をみたすとき，この写像を bargaining solution（交渉解）と呼んだ。

N1．$(\overline{u}, \overline{v}) \geqq (a^1_1, a^1_2)$ (personal rationality)

N2．$(u, v) \geqq (a^1_1, a^1_2)$ となる $(u, v) \in S_1$ が少なくとも一つ存在する。

N3．すべての $(u, v) \in S_1$ に対して，$y \geq f(a^1, S_1)$ となる $y \in S_1$ は存在しない。(Pareto optimality)

N4．Ｔが S_1 からの一次変換

$$\begin{aligned} u' &= \alpha_1 u + \beta_1 \\ v' &= \alpha_2 v + \beta_2 \end{aligned} \qquad (\alpha_1 > 0,\ \alpha_2 > 0)$$

によって得られたものとする。このとき $f(a^1, S_1) = (\overline{u}, \overline{v})$ ならば，

$$f(\alpha_1 a^1_1 + \beta_1,\ \alpha_2 a^1_2 + \beta_2,\ T) = (\alpha_1 \overline{u} + \beta_1,\ \alpha_2 \overline{v} + \beta_2)$$

(invariance with respect to utility transformation)

N5．すべての $(u, v) \in S_1$ について，

$$(u, v) \in S_1 \longleftrightarrow (v, u) \in S_1$$

であり，しかも $a^1_1 = a^1_2$，$f(a^1, S_1) = (\overline{u}, \overline{v})$ ならば

$\overline{u} = \overline{v}$　　　　(symmetry)

Nash は上の５つの仮定に加えて，次の仮定を追加した。

N6．(a^1, S_1) と (a^1, T) が $S_1 \subset T$，$f(a^1, T) \in S_1$ となるような bargaining pair ならば，$f(a^1, T) = f(a^1, S_1)$ (independence of irrelevant alterratives)

そして，Nash は，これらの仮定をみたし，しかも，すべての $(x^1_1, x^1_2) \in S_1$ に対して，$(x^1_1 - a^1_1) \cdot (x^1_2 - a^1_2)$ を最大にする一意的な解 $\eta(a^1, S_1)$ が存在することを示した。

しかし，Kalai and Smorodinsky によっ，上の N6 のもとでは，図 I．1 のような不合理な解が存在しうる可能性があることが明らかにされた[1)]。つまり，図 I．1 でみるように，威嚇点が同じである２つの集合 S_1，S_2 $(S_1 \subset S_2)$の交渉解 $(\frac{3}{4}, \frac{3}{4})$，(1 ,0.7) を比較すると，player 2 の効用水準は，Player 1 のすべての効用水準に対して増加しているにもかかわらず，集合 S_2 における交渉解の値は，集合 S_1 におけるそれよりも小さくなっている。このような結果に player 2 はとうてい同意できないであろう。

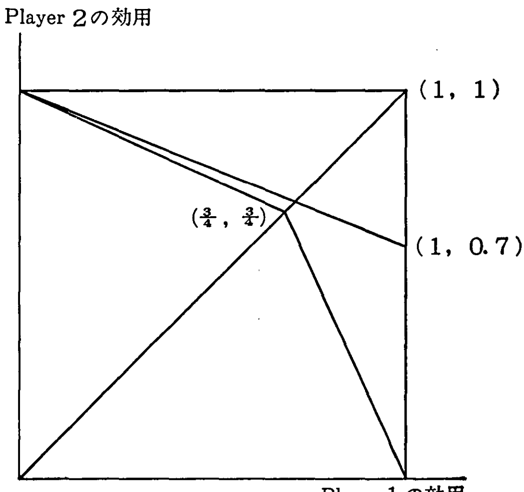


図 I、1

そこで，Kalai and Smorodinsky はこのような不合理な解決定をさけるために，N 6 に替えて次の仮定を導入した。

1) N6は Luce and Raiffa〔2〕からも批判を受けた。彼らは，$S_1 \subset S_2$ となる集合 S_1，S_2 の解をη_1，η_2 とするとき，必ずしも $\eta_1 \leq \eta_2$ とならない場合を図示することによって，N 6 と Pareto optimality の仮定が矛盾することを示した。しかし，Nash の Pareto optimality 条件は，ある１つの集合における解がみたさなければならない条件であって，他の集合における解との比較の条件ではない。一般に，集合が異なれば，Player 間の立場および関係も変わるので，ある集合の Nash 解とそれを含む集合の Nash 解との間に，Pareto optimality の仮定をおくことは必ずしも適当とはいえない。

Assumption of monotonicity (a^1, S_1), (a^1, S_2) が bargaining pair であり，しかも $b_1(S_1) = b_1(S_2)$, $gs_1 \leqq gs_2$ ならば，$f_2(a^1, S_1) \leqq f_2(a^1, S_2)$ $(f(a^1, S_1) = (f_1(a^1, S_1), f_2(a^1, S_1)))$。

ここで

$b_1(S_1) = \sup \{x \in R : \text{for some } y \in R\ (x, y) \in S_1\}$

$b_2(S_1) = \sup \{y \in R : \text{for some } x \in R\ (x, y) \in S_1\}$

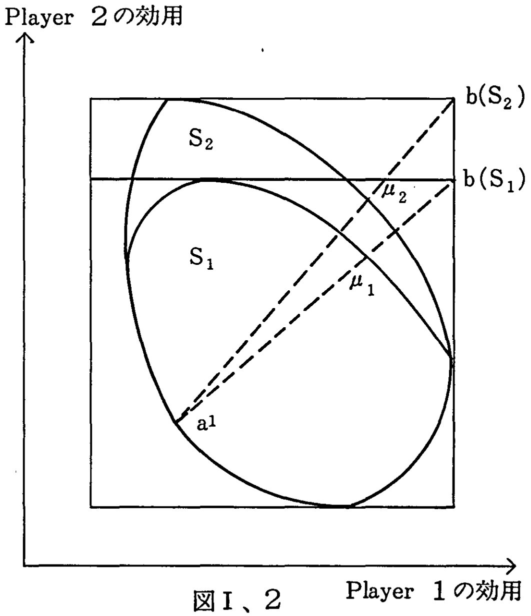
$x \leqq b_1(S_1)$ に対して

$$gs_1(x) = \begin{cases} y \text{ if } (x, y) \text{ is the Pareto of } (a^1, S_1) \\ b_2(S_1) \text{ if there is no such } y \end{cases}$$

である。

この assumption of monotonicty は，player 1 のすべての効用水準に対して，player 2 の効用水準が増加すれば，player 2 の交渉解として受けとる効用水準は増加しなければならないことを意味している。

以上のN1〜N5 および assumption of monotonicity のもとで，Kalai and Smorodinsky はこのゲームには一意的な交渉解が存在することを示した。彼らの解は幾何学的に次の図I.2のように示すことができる。すなわち，威嚇点 a^1 と $b(S_1)$ を結んだ直線が集合 S_1 の境界と交わる点 μ_1 がそれである。ただ，彼らの解が，Nash 解で起りうる不合理性を排除することができるのは，集合が同じでなく



図I、2

ても威嚇点は同じであることを仮定しているからにほかならない。

しかしながら，集合が異なれば，player 間の関係，とくに相対的な力関係は異なると考える方が一般的であろう。当然それによって威嚇点も異なるであろう。そこで，われわれは，威嚇点は集合に依存すると考え，威嚇点と集合との関係を次の2つの公理によって規定しよう。

A1．(a^1, S_1) をUの任意の bargaining pair とする。そのとき，

$b_1(S_1) = b_2(S_1) \longrightarrow a^1_2 = a^1_1$

A2．(a^1, S_1)，(a^2, S_2) を bargaining pair とする。

もし，$S_1 \subset S_2$，$b_1(S_1) = b_1(S_2)$ および $gs_1(x) \leqq gs_2(x)$，$a^1_2/a^1_1 \leqq b_2(S_1)/b_1(S_1)$ ならば，

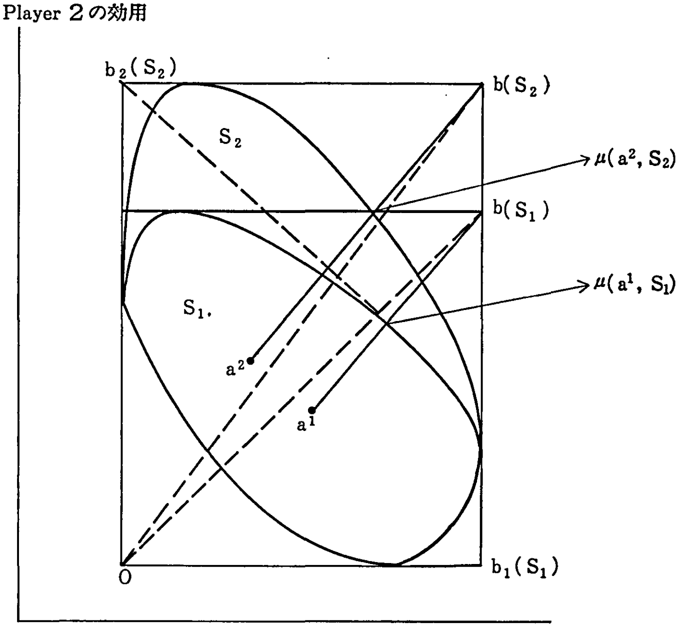
$a^1_2/a^1_1 \leqq a^2_2/a^2_1$

A1 は次のことを意味する。もし，player 1 と player 2 の最大効用水準が等しいならば，威嚇値は等しい。また，A2 は，S_1 における威嚇値の比が最大利潤の比以下であり，また，player 1 のすべての効用水準に対して，player 2 の効用水準が増加するならば，威嚇値の比は大きくなることを意味する。このことは，player 間の力関係が実際の効用水準において有利になる以上に相対的により有利になることを意味するといってもよい。

II 定理とその証明

定理 威嚇点が一意ならば，公理A1，A2 のもとで，仮定N1～N5および assumption of monotonicity をみたす一意的な解が存在する。この解 μ は次のように示される。ある bargaining pair (a, S) に対して，a と b (S) を結ぶ直線を L (a, b (S)) とすれば，この直線とSの境界点との交点 μ がそれである。

（証明）μ はよく定義されたものである。N1，N2 は自明。N3 は，直線 L(a, b (S)) 上の点は全順序であり，μ はSの境界点であることからいえる。N4 は，アフィン変換は直線に変換し，順序を保つことからいえる。N5 をみたすことは次のように示される。Sは対称であるから，$b_1(S) = b_2(S)$。よって A1 より $a_1 = a_2$。したがって，L(a,b (S)) 上の点である $\mu = (\mu_1, \mu_2)$



図II、1

は $\mu_1=\mu_2$ となっている。assumption of monotonicity は次のようにして示すことができる。図II.1より $b_2(S_1) \leqq b_2(S_2)$ であるから，A2 より a^2 は，a^1 と原点を結ぶ直線よりも上方にある。そこで，集合 S_1 と点 $(c_1(S_1).\ b_2(S_2))$ $(c_1(S_1) = \inf\{x \in R : \text{for some } y \in R\ (x, y) \in S_1\}$, $c_2(S_1) = \inf\{y \in R : \text{for some } x \in R\ (x, y) \in S_1\})$を含む凸集合を考える。この凸集合が最小になるのは $(c_1(S_1), b_2(S_2))$ と $\mu(a^1, S_1)$ を結ぶ直線が，S_1 の $\mu(a, S_1)$ における接線となる場合である。（図II.1は $c(S_1) = (c_1(S_1), c_2(S_\cdot)) = (0, 0)$が描かれている）よって，この場合だけを考えれば十分である。幾何学的に明らかに，$\mu(a^1, S_1)$ と $(c_1(S_1), b_2(S_2))$ を結ぶ直線と直線 $L(a^2, b_2(S_2))$ の交点は $\mu(a^1, S_1)$ の上方にある。

最後に一意性の証明は，Kalai and Smorodinsky のそれと全く同様にして導くことができる。（証終）

III　Nash 解の複占への応用

価格が固定されているとき，同種の財を生産する二つの企業が協力して，産出量（＝販売量）を調整し，パレート最適な利潤分配点を見い出す問題を考える。

（i）いま，企業1および2の産出量を x_1, x_2 とし，価格を p，需要量を k とし，$p=k$（k は定数）とする。また，企業1，2の利潤 π_1, π_2 は収入一費用として

$$\pi_1 = px_1 - C_1(x_1)$$

$$\pi_2 = px_2 - C_2(x_2)$$

と定義する。ここで，$C_1(x_1)$，$C_2(x_2)$ はそれぞれ，企業1，2の費用関数である。この利潤関数 π_1，π_2 に対して次の条件を付ける。

$\dfrac{d\pi_1}{dx_1} = \dfrac{d\pi_2}{dx_2} = 0$ となる x_1，x_2 に対して

$$\pi_1(x_1 - \triangle x_1) \geqq \pi_1(x_1 + \triangle x_1) \qquad (\triangle x_1 > 0) \tag{1}$$

$$\pi_2(x_2 - \triangle x_2) \geqq \pi_2(x_2 + \triangle x_2) \qquad (\triangle x_2 > 0) \tag{2}$$

また，費用関数については次の3つの条件を付ける。(1)両企業とも限界費用は逓増する。(2)企業2の限界費用は，同じ産出量に対して，企業1のそれよりも小さい。(3)産出量がゼロのとき，両企業の費用はゼロである。これらの条件を式であらわせば次のようになる。

$$\frac{d^2}{dx_1^2} C_1(x_1) \geqq 0, \ \frac{d^2}{dx_2^2} C_2(x_2) \geqq 0 \tag{3}$$

$$\frac{d}{dx_1} C_1(x_1) \geqq \frac{d}{dx_2} C_2(x_2) > 0 \qquad (x_1 = x_2) \tag{4}$$

$$C_1(0) = C_2(0) = 0 \tag{5}$$

以上の定義と条件より，利潤関数 π_1，π_2 は凹関数になるから，$\overline{\pi}_1$（$\pi \geqq \overline{\pi}_1 \geqq 0$）と $\overline{\pi}_2$（$\pi_2 \geqq \overline{\pi}_2 \geqq 0$）の組（$\overline{\pi}_1$, $\overline{\pi}_2$）の集合は凸である[2)]。また，compact であることも容易に導かれる。したがって，この集合は前章の集合の条件をみたしていることに注意しよう。そこでわれわれは，このように定

2）二階堂〔5〕p. 200 参照。

義された集合の中から，Nash 解を見い出す問題を考えていくことにする。

まず，両企業の利潤最大化条件を求めてみよう。それは，

$$\frac{d\pi_1}{dx_1}=p-\frac{d}{dx_1}C_1(x_1)=0 \tag{6}$$

$$\frac{d\pi_2}{dx_2}=p-\frac{d}{dx_2}C_2(x_2)=0 \tag{7}$$

と書きあらわすことができる。この(6)，(7)をみたす産出量を $\overline{x}_1$，$\overline{x}_2$ と書く。ただし，この $\overline{x}_1$ と $\overline{x}_2$ の和が需要量 k 以下であるときにのみ，両企業とも利潤最大化を達成することに注意しなければならない。そこで，いま，$\overline{x}_1$ と $\overline{x}_2$ の和がちょうど k に等しくなっているとしよう。すなわち

$$k=\overline{x}_1+\overline{x}_2$$

としよう。このときは，お互いに最大利潤を獲得できるから，交渉あるいは協力する必要はない。

(ii) ところが，いま，企業２の費用および限界費用がすべての x_2 に対して低下したとしよう。つまり，企業２の費用関数が右方にシフトしたとしよう。そして，このときの費用関数を $C'(x_2)$ とあらわせば，利潤は

$$\pi_2=x_2p-C_2'(x_2)$$

$$C_2(x_2)\geqq C_2'(x_2),\ \frac{d}{dx_2}C_2(x_2)\geqq\frac{d}{dx_2}C_2'(x_2)\geqq 0,\ \frac{d^2}{dx_2}C_2'(x_2)>0 \tag{8}$$

となり，利潤最大化の条件は

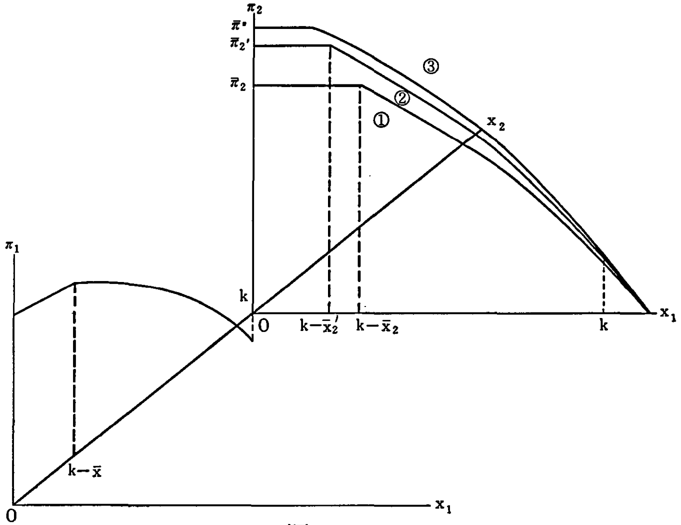
$$\frac{d\pi_2}{dx_2}=p-\frac{d}{dx_2}C_2'(x_2)=0 \tag{9}$$

となる。この(9)をみたす x_2 の値を $\overline{x}_2'$ $(\leqq k)$ とすれば，(7)，(8)，(9)より，

$\overline{x}_2'\geqq\overline{x}_2$ となる。したがって，

$$k\leqq\overline{x}_1+\overline{x}_2'$$

となるから，少なくとも一方の企業は最大利潤を得ることはできない。この場合は，利潤は相手企業の産出量に依存することになる。これを図で示せば，図 Ⅲ. 1 のようになる。そこでは，$\pi_1=kp-C_1(k)<0$，$\pi_2=kp-C_2'(k)>0$ の場合が描かれている。企業１は，企業２の産出量が $k-\overline{x}_1$ 以下であれば，利潤を最大にすることができる。企業２は，(i) において



図Ⅲ、1

は企業1の産出量が $k-\bar{x}_2$ 以下であったため，利潤最大化を実現することができたが，費用関数がシフトしたことにより，利潤を最大にする産出量が上昇したので，企業2の利潤は，企業1のすべての産出量に対して上昇するが，利潤を最大にする産出量の範囲は $k-\bar{x}_2$ から $k-\bar{x}_2'$ へと狭くなっている。図Ⅲ．1では，企業2の利潤線は，費用が低下する以前の場合が①，低下した場合が②で示されている。

次に威嚇点はどのようになるであろうか。威嚇点は，$x_1+x_2=k$ の条件のもとで企業1にとっては $\pi_1-\pi_2'$ を最大にし，企業2にとっては $\pi_1-\pi_2'$ を最小にする点として求められる。すなわち，

$$\frac{d}{dx_1}(\pi_1-\pi_2')=\frac{d}{dx_1}(x_1-x_2)p-\frac{d}{dx_1}C_1(x_1)+\frac{d}{dx_1}C_2'(x_2)$$

$$=\frac{d}{dx_1}(2x_1-k)p-\frac{d}{dx_1}C_1(x_1)+\frac{d}{dx_1}C_2'(k-x_1)$$

$$=0 \tag{10}$$

$$\frac{d}{dx_2}(\pi_1-\pi_2')=\frac{d}{dx_2}(x_1-x_2)p-\frac{d}{dx_2}C_1(x_1)+\frac{d}{dx_2}C_2'(x\ )$$

$$=\frac{d}{dx_2}(k-2x_2)p-\frac{d}{dx_2}C_1(k-x_2)+\frac{d}{dx_2}C_2'(x_2)$$
$$=0 \tag{11}$$

をみたす $\overline{\overline{x}}_1'$, $\overline{\overline{x}}_2'$ における利潤値として求められる。(10), (11)は次のように書き改められる。

$$2p-\frac{d}{dx_1}C_1(x_1)+\frac{d}{dx_1}C_2'(k-x_1)=0 \tag{12}$$

$$-2p-\frac{d}{dx_2}C_1(k-x_2)+\frac{d}{dx_2}C_2'(x_2)=0 \tag{13}$$

(i) の場合の威嚇値は,

$$\frac{d}{dx_1}(\pi_1-\pi_2)=2p-\frac{d}{dx_1}C_1(x_1)+\frac{d}{dx_1}C_2(k-x_1)=0 \tag{14}$$

$$\frac{d}{dx_2}(\pi_1-\pi_2)=-2p-\frac{d}{dx_2}C_1(k-x_2)+\frac{d}{dx_2}C_2(x_2)=0 \tag{15}$$

をみたす $\overline{\overline{x}}_1$, $\overline{\overline{x}}_2$ における利潤値となる。そこで(i)と(ii)の場合の威嚇値を比較すると, 企業1のそれは減少していることがわかる。なぜなら, 企業1の場合は, (12)と(14)を比べれば, (3), (4), (8)から,

$$2p-\frac{d}{dx_1}C_1(x_1)+\frac{d}{dx_1}C_2'(k-x_1) \tag{12'}$$

$$2p-\frac{d}{dx_1}C_1(x_1)+\frac{d}{dx_1}C_2(k-x_1) \tag{14'}$$

はいずれも x_1 に関して減少関数であり, しかも(12)′は(14)′よりもつねに大きいから, (14)′, (12)′をゼロにする値をそれぞれ $\overline{\overline{x}}_1$, $\overline{\overline{x}}_1'$ とすれば, $\overline{\overline{x}}_1\leqq\overline{\overline{x}}_1'$ となるからである。

ところで, (i) の場合は, $k=\overline{x}_1+\overline{x}_2$ であり, 両企業とも利潤最大化を達成しているので, 協力して生産調整を行い利潤を分配する必要はない。したがって, 企業1および2の威嚇値は, 計算からわかるように, 利潤最大値と一致している。それゆえ,

$$\overline{x}_1=\overline{\overline{x}}_1,\quad \overline{x}_2=\overline{\overline{x}}_2 \tag{16}$$

したがって, $\overline{\overline{x}}_1\leqq\overline{\overline{x}}_1'$ ということは, 企業1については, (i) と (ii) の場合の威嚇値をそれぞれ $\overline{\overline{\pi}}_1$, $\overline{\overline{\pi}}'$ とすれば,

$$\overline{\overline{\pi}}_1=\overline{\overline{x}}_1p-C_1(\overline{\overline{x}}_1)\geqq\overline{\overline{\pi}}_1'=\overline{\overline{x}}_1'p-C_1(\overline{\overline{x}}_1') \tag{17}$$

が成り立つことをも意味する。

次に，両企業の威嚇値の比をみよう。(i)の場合は

$$\frac{\bar{\bar{\pi}}_2}{\bar{\bar{\pi}}_1} = \frac{\bar{\bar{x}}_2 p - C_2(\bar{\bar{x}}_2)}{\bar{\bar{x}}_1 p - C_1(\bar{\bar{x}}_1)} = \frac{\bar{x}_2 p - C_2(\bar{x}_2)}{\bar{x}_1 p - C_1(\bar{x}_1)} = \frac{\bar{\pi}_2}{\bar{\pi}_1} \tag{18}$$

であり，(ii) の場合は，

$$\frac{\bar{\bar{\pi}}_2'}{\bar{\bar{\pi}}'} = \frac{\bar{\bar{x}}_2' p - C_2'(\bar{\bar{x}}_2')}{\bar{\bar{x}}_1' p - C_1\ (\bar{\bar{x}}_1')}$$

である。そこで，$\bar{x}_2 - \bar{\bar{x}}_2' = \bar{\bar{x}}_1' - \bar{\bar{x}}_1$，$C_2(x_2) \geqq C_2'(x_2) > 0$ $(x_2 \in [\bar{\bar{x}}_2',\ \bar{x}_2])$ および(1)，(2)，(3)，(6)，(17)を考慮すると，

$$\frac{\bar{x}_2 p - C_2(\bar{x}_2)}{\bar{x}_1 p - C\ (\bar{x}_1)} \leqq \frac{\bar{\bar{x}}_2' p - C_2(\bar{\bar{x}}_2')}{\bar{\bar{x}}_1' p - C_1(\bar{\bar{x}}_1')} \leqq \frac{\bar{\bar{x}}_2' p - C_2'(\bar{\bar{x}}_2')}{\bar{\bar{x}}_1' p - C_1(\bar{\bar{x}}_1')} \tag{19}$$

となる。つまり，

$$\frac{\bar{\bar{\pi}}_2}{\bar{\bar{\pi}}_1} \leqq \frac{\bar{\bar{\pi}}_2'}{\bar{\bar{\pi}}'}$$

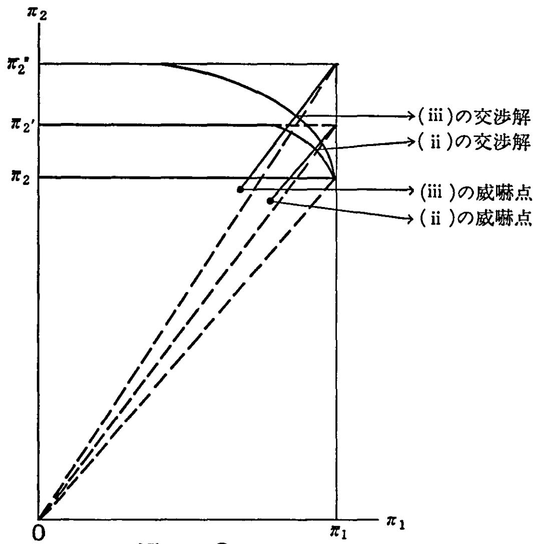
が導かれる。また，(3)，(4)，(6)，(7)から，$C_1(x_1) = C_2(x_2)$ $(x_1 = x_2)$ ならば，利潤最大値は等しくなり，その結果(18)より両企業の威嚇値は等しくなることがわかる。このことと，(3)，(4)，(5)，(6)，(8)，(18)，(19)を考え合わせることによって，以上考察してきた利潤分配問題が公理A 1，A 2をみたすことが示される。よって，この問題は，公理A 1，A 2のもとで，パレート最適な利潤分配点を見い出し得る可能性が与えられた。

(iii)　次に，企業2の費用がさらに減少した場合を考えよう。すなわち，そのときの費用関数を$C_2''(x_2)$として，

$$C_2'(x_2) \geqq C_2''(x_2),\quad \frac{d}{dx_2} C_2'(x_2) \geqq \frac{d}{dx_2} C_2''(x_2) > 0$$

が成り立つ場合を考えよう。このときも，威嚇値の両企業の比は大きくなり，そのときの最大利潤の比よりも大きいか等しいことが示される。

以上，(i)，(ii)，(iii)の場合の企業1，2の到達可能利潤範囲と威嚇点，および，それぞれの交渉解は図Ⅲ.2のように示される。



図III、2

参考文献

〔1〕 Kalai, E., and M. Smorodinsky., "Other Solutiou to Nash's Bargaining Problem," *Econometrica*, Vol. 43, 1975.

〔2〕 Luce, R. D., and H,Raiffa., *Game and Decisions*. New York: Wiley, 1957.

〔3〕 Nash, J. F., "The Bargaining Problem," *Econometrica*, Vol. 18, 1950.

〔4〕 Owen, G., *Game Theory*. W, B, Saunders Co., philadelphia, 1968 宮沢光一訳, 東洋経済新報社 1972.

〔5〕 二階堂副包『現代経済学の数学的方法』岩波書店, 1960年.

〔6〕 鈴木光男編『競争社会のゲームの理論』勁草書房, 1970年.