

生産要素間の代替可能性の測定^{*)}

細 内 勇

1. 序

企業ないし産業の生産活動の構造を、生産要素間の代替関係を推定することにより明らかにしようとする動きが1970年代になって著しく活発になった。このことは、生産関数と費用関数（或いは利潤関数）との間の経済的な双対性 Duality の解明、及び flexible な関数形の考察によって促進された。生産関数と費用関数（或いは利潤関数）とが、ある一定の条件の下で双対関係にあり、したがって同じ経済的な構造をもつことが、静学的な場合に Diewert, Lau, McFadden 等により¹⁾、又動学的な場合に Epstein, McLaren and Cooper により証明されている。従って、ある一定な条件を満たす生産関数を用いて生産関係のパラメーターを推定する代りに、それと双対関係にある費用関数（或いは利潤関数）を用いて同じ生産関係を示すパラメーターの値を推定することができる。生産の理論を応用し実証分析を行う

^{*)} この論文の中の計算には、長崎大学情報処理センターの FACOM M-180 II AD を利用した。

1) 次の性質をもつ生産関数と費用関数との間には双対関係が成り立つ。

1. 生産関数 f .

- f は上に連続な関数
- f は非減少な関数
- f は準凹 quasi concave な関数

2. 費用関数 c .

- c は非負な関数である。
- c は要素価格に関して、一次同次な、非減少な、連続な凹関数である。
- c は生産額に関して、非減少な、下に連続な関数である。

[Diewert (1982, pp. 537-545)]

但し、トランス・ログ生産関数とトランス・ログ費用関数との間には、一般的には双対関係は成立していない [Burgess (1975)]。又生産関数と利潤関数との間の双対性については Diewert (1982) を参照せよ。

際には、flexible な生産関数の発展が不可欠であった²⁾。関数形を最初から特定な形に固定するのではなく、任意な関数の二次近似をするものに、Christensen, Jorgenson, and Lau による Translog Function, 或いは Diewert による Generalized Linear (Leontief) Function や Generalized Cobb-Douglas Function がある。生産関数或いは費用関数（或いは利潤関数）を推定する目的の一つに、生産要素間の代替関係を明らかにすることがある。Berndt and Christensen (1973) がトランス・ログ Translog 関数を用いて、三つの生産要素（資本設備 Equipment, 構築物 Structure, 労働 Labor）間の代替弾力性の推定及び生産要素間の分離可能性 Separability の検定をして以来、Berndt and Wood, Fuss, Pindyck 等により生産要素間（特にエネルギーと他の生産要素との間）の代替の可能性が測定されている³⁾。

ここでは、トランス・ログ費用関数を用いて、日本の製造業全体の資本、労働、原材料の三つの生産要素間の代替弾力性及び価格弾力性を推定し、これら生産要素間の代替関係を明らかにする。生産関数の代りに費用関数を用いる理由として次のものが挙げられる。1) 費用関数の独立変数として現われる生産要素価格は各産業（或いは各企業）にとって外生変数と考えられるが、生産関数の独立変数として現われる生産要素数量は各産業（或いは各企業）によって決定される数量であり、同時方程式体系の内生変数と考えられるものである。2) 生産関数が一次同次であるということに関係なく、費用関数の生産要素価格に関する一次同次性が成立する⁴⁾。

2. 日本の製造業の生産要素間の代替可能性の測定

トランス・ログ費用関数は次のように書かれる。

2) flexible な関数の定義については、例えば Diewert (1982, p. 574) を参照せよ。

3) エネルギーと他の生産要素との間の代替関係の推定の最近の発展については、Berndt and Field (1981) を見よ。

4) Binswanger (1974) p. 377

$$\begin{aligned} \log C = & \alpha_0 + \alpha_Y \log Y + \frac{1}{2} \gamma_{YY} (\log Y)^2 + \sum_{i=1}^n \alpha_i \log P_i \\ & + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \gamma_{ij} \log P_i \log P_j + \sum_{i=1}^n \gamma_{Yi} \log Y \log P_i \quad (1) \end{aligned}$$

但し、 C = 総費用額

Y = 生産額

P_i = 第 i 生産要素の価格

もし費用関数が、生産要素価格に関して一次同次ならば、次の関係がパラメーター間に成り立つ。

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \alpha_i &= 1, \quad \sum_{i=1}^n \gamma_{Yi} = 0 \\ \sum_{i=1}^n \gamma_{iY} &= 0, \quad \sum_{j=1}^n \gamma_{ij} = 0, \quad \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \gamma_{ij} = 0 \end{aligned}$$

Shephard の補題 Lemma により、第 i 生産要素額の総費用額に対する割合 S_i は次の費用シェア方程式 Cost Share Equation によって表わされる。

$$S_i = \alpha_i + \gamma_{Yi} \log Y + \sum_{j=1}^n \gamma_{ij} \log P_j \quad (2)$$

もし費用関数が Homothetic である場合 $\gamma_{Yi} = 0$ には、費用シェア方程式は次のようになる。

$$S_i = \alpha_i + \sum_{j=1}^n \gamma_{ij} \log P_j \quad (3)$$

もしすべての生産要素間の代替の弾力性が 1 に等しい場合には、更に次の条件がパラメーター間に成り立つ。

$$\gamma_{ij} = 0$$

なお、費用関数が連続な二回微分可能な関数の場合には Young の定理によりパラメーター間に対称性が成り立つ。

$$\gamma_{ij} = \gamma_{ji} \quad i \neq j$$

Allen の代替の弾力性 σ_{ij} は、推定されたパラメーター γ_{ij} と生産要素シェア S_i とにより次の式によって計算される。

$$\sigma_{ij} = \frac{\gamma_{ij} + S_i S_j}{S_i S_j} \quad i \neq j \quad (4)$$

$$\sigma_{ii} = \frac{\gamma_{ii} + S_i (S_i - 1)}{S_i^2} \quad (5)$$

又、第 i 生産要素の自己価格弾力性 η_{ii} 及び交叉価格弾力性 η_{ij} は、推定された代替の弾力性 σ_{ij} と生産要素シェア S_j とにより次の式によって計算される。

$$\eta_{ij} = \sigma_{ij} S_j \quad (6)$$

$$\eta_{ii} = \sigma_{ii} S_i^2 \quad (7)$$

なお、推定の際には Homothetic な費用関数を仮定した。従って、 $\gamma_{11} = 0$ となり、第(3)式の費用シェア方程式に基づいて推定を行った。

生産額、原材料費、労働費用のデータは工業統計表より得た。労働費用は工業統計表の現金給与総額とした。資本サービス費用は、工業統計表の付加価値額から労働費用を差し引いた残額をもって資本サービスの費用とした。総費用額は、原材料費・労働費用・資本サービス費用の総和とした。原材料の価格は卸売物価指数の用途別分類の原材料価格指数を用いた。資本サービスの価格としては卸売物価数の用途別分類の資本財価格指数を用いた。労働サービスの価格は、現金給与総額を Man-Hour (= 就業者数 × 労働時間数) で割った一人当たり賃金率を用いた。観測期間は昭和35年(1960年)から昭和55年(1980年)までの年次系列の21年間である。価格のデータは初年度(1960年)の値が1.0になるよう正規化した後に対数変換を行った。

パラメーターの推定は、制約付の Zellner の Seemingly Unrelated Equation Method で行なった。パラメーター間の一次同次性の制約を考慮して、右辺の独立変数の生産要素価格を、労働賃銀マイナス原材料価格、資本サービス価格マイナス原材料価格の二つに変換した後計算を行った。この際システム全体の式は労働の費用シェアの式と資本の費用シェアの式の二つ

5) これらモデルのスペシフィケーション Specification 及び弾力性の計算については、例えば、Berndt and Wood (1975) を参照せよ。

からなる連立方程式であり、この二つの連立方程式のパラメーターの値（及び標準偏差）を得た後に、これらの値に変換行列を乗ずることによって、三番目の式である原材料の費用シェア方程式のパラメーターの値（及び標準偏差）を得た⁶⁾。表1に推定されたパラメーターの値を示した。括弧の中の値はt検定量の値である。各生産要素について γ_{ii} $i=L, K, M$ は正であり、各々の生産要素価格が上昇すれば各々自己の費用シェアは上昇する。最初の二つの式からなるシステム全体の R_s の値は 0.858 である。対称性の検定統計量 F_s (2.36) は 0.207 であり、対称性の仮説は棄却できない。又固有値は 0.108 と 0.013 で共に正であり、労働及び資本の二つの費用シェア方程式からなるシステムの推定された生産要素価格のパラメーターの行列は正値定符号行列である。

表 1

推定されたパラメーターの値：一次同次性及び対称性の
制約の下でのトランス・ログ費用関数

α_L	0.11789 (48.418)	γ_{LL}	0.01581 (9.646)
α_K	0.21336 (44.979)	γ_{LK}	0.01695 (4.847)
α_M	0.66875 (217.431)	γ_{LM}	-0.03276 (11.320)
		γ_{KK}	0.10469 (8.614)
		γ_{KM}	-0.12163 (9.454)
		γ_{MM}	0.15439 (10.474)

$R_s = 0.858$

$F_s = 0.207$

生産要素間の代替可能性をみるために、第(4)式及び第(5)式に基づき Allen の代替弾力性を1960年から1980年の間の5年ごとに計算し表2に示した。各生産要素の自己の代替弾力性 σ_{LL} , σ_{KK} , σ_{MM} は各々マイナスの正しい符号を示している。 σ_{LL} は比較的大きな値 -4.86 ~ -6.47 を示しており、 σ_{KK} は

6) この変換行列については Theil (1975, pp. 198-199) を参照せよ。

表 2
Allen の代替弾力性：一次同次性及び対称性の制約の
下のトランス・ログ費用関数

	1960	1965	1970	1975	1980
σ_{LL}	-6.47	-5.52	-5.82	-4.86	-5.90
σ_{LK}	1.69	1.59	1.55	1.57	1.63
σ_{LM}	0.58	0.63	0.60	0.67	0.61
σ_{KK}	-1.39	-1.39	-1.35	-1.37	-1.39
σ_{KM}	0.15	0.12	0.20	0.04	0.13
σ_{MM}	-0.15	-0.17	-0.20	-0.17	-0.16

-1.35から-1.39であり、 σ_{MM} は比較的小さな値-0.15~-0.20を示している。資本と労働との間の代替関係は比較的大きく1.55~1.69となっており、労働と原材料との間の代替関係がこれにつき ($\sigma_{LM}=0.58\sim0.67$)、資本と原材料との間の代替関係が一番小さい($\sigma_{KM}=0.04\sim0.20$)。すなわち、一次同次性及び対称性の制約の下で推定された代替弾力性の値によると、他の事情を一定にして原材料価格のみが上昇した場合には、資本と原材料との間及び労働と原材料との間に代替関係が生じるが($\sigma_{KM}>0, \sigma_{LM}>0$)、その程度は労働と原材料との間の代替関係がより大きい($\sigma_{LM}>\sigma_{KM}$)、この意味で資本と原材料は相対的には AES 補完関係 (AES Complements)となっている⁷⁾。

各生産要素の自己価格弾力性及び交叉価格弾力性は、第(6)式及び第(7)式に基づいて計算し表3に示した。なお、パラメーター間の対称性により $\sigma_{ij}=\sigma_{ji}$ が成り立っても、一般に、 $\sigma_{ij}S_j \neq \sigma_{ji}S_i$ となるから、交叉価格弾力性に関しては対称性は成り立たない ($\eta_{ij} \neq \eta_{ji}$)。代替の弾力性でみたように、労働需要の自己価格弾力性が一番大きく ($\eta_{LL}=-0.74\sim-0.75$)、資本需要の自己価格弾力性がこれにつき ($\eta_{KK}=-0.27\sim-0.32$)、原材料需要の自己価格弾力性が一番小さい ($\eta_{MM}=-0.10\sim-0.12$)。又交叉価格弾力性は、資本サービス価格に関する労働需要の弾力性 ($\eta_{LK}=0.30\sim0.36$) 及び原材料価格に関する労働需要の弾力性 ($\eta_{LM}=0.38\sim0.44$) が比較的高い。労働賃銀に関す

表 3

自己及び交叉価格弾力性：一次同次性及び対称性の制約
 の下のトランス・ログ費用関数

	1960	1965	1970	1975	1980
η_{LL}	-0.75	-0.75	-0.75	-0.74	-0.75
η_{LK}	0.36	0.34	0.38	0.30	0.35
η_{LM}	0.39	0.41	0.38	0.44	0.40
η_{KL}	0.19	0.22	0.20	0.24	0.21
η_{KK}	-0.30	-0.29	-0.32	-0.27	-0.30
η_{KM}	0.10	0.08	0.12	0.02	0.09
η_{ML}	0.07	0.09	0.08	0.10	0.08
η_{MK}	0.03	0.03	0.05	0.01	0.03
η_{MM}	-0.10	-0.11	-0.12	-0.11	-0.11

る資本需要の弾力性及び原材料価格に関する資本需要の弾力性は共に小さく ($\eta_{KL}=0.19\sim0.24$, $\eta_{KM}=0.02\sim0.12$)、労働賃銀に関する原材料需要の弾力性及び資本サービス価格に関する原材料需要の弾力性が最も非弾力的である ($\eta_{ML}=0.07\sim1.0$, $\eta_{MK}=0.01\sim0.05$)。Allen の代替弾力性 σ_{ij} は、第(6)式からわかるように、他の生産要素価格を一定としたときの、シェアー S_i でもってウェイトの付けられた、生産要素 i の価格に関する生産要素 j の需要の弾力性を示している。二個の生産要素しかない場合には、生産要素価格比率の変化に対する生産要素数量比率の変化を示す代替弾力性が定義される。しかし、Allen の代替の(偏)弾力性は、この意味での一般化とはなっていない。一般に n 個の生産要素がある場合に、他の生産要素価格(及び産出量)を一定として、当該生産要素価格比率の変化に対する生産要素数量比率の変化を示す代替弾力性は森嶋(1967)及び Kuga and Murota (1972)により提案され、Kang and Brown (1981)により完全代替弾力性 Full Elasticity of Substitution と呼ばれている。森嶋の代替弾力性或いは完全代替弾力性 F_{ij} は、Allen の代替弾力性或いは要素需要の価格弾力性から次式でもって計算される。

表 4

森嶋の代替弾力性：一次同次性及び対称性の制約の下の
トランス・ログ費用関数

	1960	1965	1970	1975	1980
F_{LK}	0.66	0.63	0.70	0.57	0.65
F_{KL}	0.94	0.97	0.95	0.98	0.96
F_{LM}	0.49	0.52	0.50	0.55	0.51
F_{ML}	0.82	0.84	0.83	0.84	0.83
F_{KM}	0.20	0.19	0.24	0.13	0.20
F_{MK}	0.33	0.32	0.37	0.28	0.33

$$F_{ij} = S_j(\sigma_{ij} - \sigma_{jj}) = \eta_{ij} - \eta_{jj}$$

なお、一般に $F_{ij} \asymp F_{ji}$ である。表 4 に森嶋の代替弾力性の値を示した。Allen の代替弾力性と同じく、資本と労働との間の代替弾力性が一番大きく ($F_{LK} = 0.57 \sim 0.70$, $F_{KL} = 0.95 \sim 0.98$), 労働と原材料との間の代替弾力性がこれにつき ($F_{LM} = 0.49 \sim 0.55$, $F_{ML} = 0.82 \sim 0.84$), 資本と原材料との間の代替弾力性が一番小さい ($F_{KM} = 0.13 \sim 0.24$, $F_{MK} = 0.28 \sim 0.37$)。Allen の代替弾力性では労働と資本との間の代替弾力性の値は 1 より大となっているが、森嶋の代替弾力性では労働と資本との間の代替弾力性の値は 1 より小さい。森嶋の代替弾力性或いは完全代替弾力性は、生産要素価格比率の変化率 $d \log \left(\frac{w_j}{w_i} \right)$ と生産要素シェア比率の変化率 $d \log \left(\frac{w_i x_i}{w_j x_j} \right)$ との比と、次の関係が成り立つ⁸⁾。

$$\frac{d \log (w_i x_i / w_j x_j)}{d \log (w_j / w_i)} = -1 + \frac{d \log (x_i / x_j)}{d \log (w_j / w_i)} = -1 + F_{ij}$$

$F_{LK} < 1$ であるので、他の生産要素価格を一定とした場合に、労働賃銀 w_i が資本財価格 w_j に対して相対的に安くなったときに、労働の分け前の資本の分け前に対する比率 $\frac{w_i x_i}{w_j x_j}$ は減少する。

一次同次性及び対称性の制約に加えて、更に労働と資本との間の代替弾力

8) Kang and Brown (1981) p. 86

表 5

労働と資本の間、及び労働と原材料の間の代替弾力性が1という制約の下で推定した各生産要素間の弾力性（一次同次性及び対称性の制約）

	1960	1970	1980		1960	1970	1980
σ_{LL}	-7.66	-6.78	-6.89	η_{LL}	-0.88	-0.87	-0.87
σ_{LK}	1.0	1.0	1.0	η_{LK}	0.21	0.24	0.21
σ_{LM}	1.0	1.0	1.0	η_{LM}	0.67	0.63	0.66
σ_{KK}	-4.09	-3.51	-4.12	η_{KL}	0.12	0.13	0.13
σ_{KM}	1.13	1.13	1.14	η_{KK}	-0.88	-0.84	-0.88
σ_{MM}	-0.53	-0.63	-0.56	η_{KM}	0.76	0.71	0.75
				η_{ML}	0.12	0.13	0.13
				η_{MK}	0.24	0.27	0.24
				η_{MM}	-0.36	-0.40	-0.37

性が1 ($\sigma_{LK} = 1$) 及び労働と原材料との間の代替弾力性が1 ($\sigma_{LM} = 1$) という制約の下で推定された（すなわち $\eta_{LK} = \eta_{LM} = 0$ という制約の下で推定された）、各生産要素間の代替弾力性と自己及び交叉価格弾力性の値を表5に示した⁹⁾。この場合、労働以外の生産要素間、すなわち資本と原材料との間の代替関係がより弾力的となっている。又資本と原材料の各々の自己の弾力性の値 σ_{KK} , σ_{MM} , η_{KK} , η_{MM} の値も大きくなっている。表6には、資本と労働との間の代替弾力性が1 ($\sigma_{LK} = 1$) 及び資本と原材料との間の代替弾力性が1 ($\sigma_{KM} = 1$) という制約（この場合 $\eta_{LK} = \eta_{KM} = 0$ ）を付け加えて推定した場合の各生産要素間の代替弾力性と自己及び交叉価格弾力性の値を示した。表2と比較してみると σ_{LM} , σ_{KK} , σ_{MM} の値が大きくなっている。又価格弾力性の値も η_{LM} , η_{KK} , η_{MM} （そして η_{KM} , η_{MK} ）が大きくなっている。従って、生産要素間の代替弾力性が1という制約（極端な場合は Cobb-Douglas 生産関数に帰着する $\sigma_{LK} = \sigma_{LM} = \sigma_{KM} = 1$ （或いは $\eta_{LK} = \eta_{LM} = \eta_{KM} = 0$ ）という制約）を付け加えて推定した場合には、代替弾力性が1という

9) ここでは、分離可能性 Separability の検定を行わず、生産要素間の代替弾力性が1という制約が付け加わった場合とこの制約がない場合との比較をした。

表 6

資本と労働の間、及び資本と原材料の間の代替弾力性が1という制約の下で推定した各生産要素間の弾力性（一次同次性及び対称性の制約）

	1960	1970	1980		1960	1970	1980
σ_{LL}	-6.68	-5.99	-6.08	η_{LL}	-0.77	-0.77	-0.77
σ_{LK}	1.0	1.0	1.0	η_{LK}	0.21	0.24	0.21
σ_{LM}	0.83	0.84	0.84	η_{LM}	0.56	0.53	0.56
σ_{KK}	-3.67	-3.17	-3.70	η_{KL}	0.12	0.13	0.13
σ_{KM}	1.0	1.0	1.0	η_{KK}	-0.79	-0.76	-0.79
σ_{MM}	-0.46	-0.55	-0.48	η_{KM}	0.67	0.64	0.66
				η_{ML}	0.10	0.11	0.11
				η_{MK}	0.21	0.24	0.21
				η_{MM}	-0.31	-0.35	-0.32

制約のないトランス・ログ関数の推定から得られた値とかなり異なる値を得る。

3. む す び

トランス・ログ費用関数を一次同次性及び対称性の制約の下で推定し、製造業の三つの生産要素（労働、資本、及び原材料）間の代替の弾力性の値を得た。それによると、資本と労働との間の代替関係は比較的大きく、労働と原材料との間の代替関係がこれにつき、資本と原材料との間の代替関係が一番小さい。資本と労働との間の代替弾力性は、Allen の代替弾力性では1より大きい、森嶋の代替弾力性（或いは完全代替弾力性）では1より小さく、他の生産要素価格及び産出量を一定とした場合に、労働賃銀が資本財価格に対して相対的に安くなったときに、労働の分け前の資本の分け前に対する比率は減少する。又需要の価格弾力性によると、原材料需要が最も非弾力的であり、労働需要の価格弾力性の値は比較的高い。

参 考 文 献

1. Berndt, E. R. and L. R. Christensen (1973), "The Translog Function of Equipment, Structures, and Labor in U. S. Manufacturing, 1929-1965," *Journal of Econometrics*, 1, 81-114
2. ——— and B. C. Field eds. (1981), *Modeling and Measuring Natural Resource Substitution*, M. I. T. Press
3. ——— and D. O. Wood (1975), "Technology, Prices, and Derived Demand for Energy," *Review of Economics and Statistics*, 57, 259-268
4. Binswanger, H. P. (1974), "A Cost Function Approach to the Measurement of Elasticities of Factor Demand and Elasticities of Substitution," *American Journal of Agricultural Economics*, 56, 377-386
5. Burgess, D. F. (1975), "Duality Theory and Pitfalls in the Specification Technology," *Journal of Econometrics*, 3, 105-122
6. Diewert, W. E. (1982), "Duality Approaches to Microeconomic Theory," in : K. J. Arrow and M. D. Intriligator eds., *Handbook of Mathematical Economics*, Vol. 2 (North-Holland), 535-599
7. Fuss, M. and D. McFadden eds. (1978), *Production Economics: A Dual Approaches to Theory and Applications*, Vol. 1 (North-Holland)
8. Kang, H. and G. M. Brown (1981), "Partial and Full Elasticities of Substitution and the Energy-Capital Complementarity Controversy," in : E. R. Berndt and B. C. Field eds., *Modelling and Measuring Natural Resource Substitution* (M. I. T. Press), 81-89
9. Kuga, K. and T. Murota (1972), "A Note on Definition of Elasticity of Substitution in Many Input Case," *Metroeconomica*, 24, 285-290
10. Nadiri, M. I. (1982), "Producers Theory," in K. J. Arrow and M. D. Intriligator eds., *Handbook of Mathematical Economics*, Vol. 2 (North-Holland), 431-490
11. Pindyck, R. S. (1979), *The Structure of World Energy Demand*, M. I. T. Press
12. Theil, H. (1975), *Theory and Measurement of Consumer Demand*.

Vol. 1. North-Holland

13. 森嶋通夫 (1967), “弾力性理論に関する二, 三の提案”, 経済評論 12月号, 144
-150
14. 経済企画庁調査局編, 経済変動観測資料年報, 昭和55-57年
15. 通商産業省編, 工業統計表, 昭和35年-55年
16. 日本銀行調査統計局編, 物価指数年報, 昭和57年