

数学的活動を取り入れた中学1年における図形領域の授業研究  
—学部と4附属学校園との共同研究プロジェクト（算数・数学部会）—

附属中学校 山下 徹、刈山弘全、中村球平  
山本圭介、中島清志  
教育学部 平岡賢治

## 1 はじめに

本校では、平成13年度から平成15年度までの3か年間、全体研究主題「自己の可能性を広げ、主体的に社会を担うことができる生徒の育成」の下、必修教科における基礎・基本の定着を図る指導と評価の研究に取り組み、平成16年度以降も、各教科においてこの研究を継続している。また、平成15年度から本格的に取り組み始めた「学部と4附属学校園との共同研究プロジェクト—算数・数学部会—」では、特に、図形の領域における小学校とのつながりということから、中学校第1学年の図形の単元で、研究授業に取り組んできた。

本年度は、本校全職員による全体研究授業とタイアップする形で、授業づくりに取り組むことができた。本稿は、この授業実践及び授業研究会の記録としてまとめたものである。

## 2 研究授業

### 1 授業の意図

学習指導要領の改訂に伴い、図形の領域では、柱体・錐体及びそれらの表面積・体積等、多くの内容が第1学年に移行されている。特に、空間図形については内容の削減とも相まって、その概念の形成が困難になっており、小学校における指導の目標や形態、児童の学習状況を十分に理解し、中学校における指導内容や方法を改めて検討する必要がある。そこで、4附属共同研究において、第1学年における図形の指導の在り方を研究したいと考えた。

本校数学科では、「豊かな発想を学び合いに生かし、数学的な思考を深めることができる生徒の育成」を研究主題に掲げ、主に、学び合いを通して、生徒の発想の広がりと思考の深まりを図ることを目指し、研究を行ってきた。また、数学的な活動を推進する数学的な考え方を育成するため、各単元において身につけさせたい数学的な考え方を、年間指導計画に位置づけ、指導の充実を図ってきた。その中で、数学的な活動を意図した題材が具体的な操作にとどまり、学び合いを契機として数学的な概念へ昇華するまでに至らないなどの課題が浮かび上がってきた。これらの課題を解決するには、題材に潜む数学的な考え方を明確にするとともに、生徒が自己の考えを積極的に表現し、学習集団の中で互いの考えを共有し合うことが大切であると考えた。

このようなことから、本時の授業は、次の4点を念頭において構想し、展開した。

- いろいろな正多面体の存在を予想させることで、説明の必要性を感じさせるとともに、前時までに行った立体模型の作成では説明が不十分であることに気づかせることから始める。
- 根拠を確認しながら既知の事項を積み重ね、数学の世界を創造する態度の素地をつくるべく、既知の図形概念を丁寧に振り返り、活動の見通しを与える。
- 自力解決の時間を十分確保し、個々の生徒の考えを大切にするとともに、ペアや班

の活動の際には、できるだけ助言を与えず、学び合う必要性を感じさせる。

○文字を用いた理由等を発表させることで、本時の学習で知らず知らずのうちに用いた数学的な考え方〔抽象化〕，〔一般化〕をクローズアップする。

その他、詳細は、次ページ以降に示す指導案の「単元について」及び「授業の視点」を参照いただきたい。

## 2 学習指導案

# 数学科学習指導案

平成18年2月27日(月) 11:00~11:50  
 第1学年3組 男子22名 女子20名  
 第304番教室(1年3組学級教室)

指導者 山下 徹

### I 単元の学習指導

#### 1 単元名 空間図形

#### 2 単元の目標

- いろいろな立体に関心を持ち、それらの特徴を明らかにしようとする。
- 立体をいろいろな観点から分類・整理することができる。
- いろいろな立体の名称や、空間における直線や平面の位置関係について理解することができる。

#### 3 単元について

本単元は、小学校における図形領域「基本的な立体図形と空間」、量と測定領域「体積」に続く単元である。

これまでに生徒は、いろいろな立体の名称等について学習するとともに、それらの特徴を身の回りの立体や具体的なモデルを使って考察してきた。本単元では、立体模型の作成を通して、立体を構成する面や辺、頂点等の関係についてさらに深く追究し、それらを基により詳しく立体を分類・整理する。また、面や辺の位置関係や面の移動による立体の構成、展開図による平面図形への単純化を学習することで、空間図形概念をより豊かなものとする。さらに、錐体や平面で構成されない立体の表面積や体積などを取り扱うことで、量と測定の範囲を拡張する。空間図形の学習は、中学校では本単元が主であり、日常生活における正しい空間認識を育成する意味で、また、高等学校における「空間座標とベクトル」の基礎を培う意味においても重要である。

#### 4 単元の授業計画(全13時間)

※表中の $\boxed{\text{関}\text{①}}$ 等は、評価基準表の観点と番号を表す。

時間	題材	主な学習活動	主な評価
4 (本時 4 / 4 )	いろいろな立体について調べよう	<ul style="list-style-type: none"> <li>・面の形や辺や頂点の数等から立体を観察し、それらの特徴を基にして仲間分けをする。</li> <li>・面や辺、頂点の数に着目し、その性質について考える。</li> <li>・立体模型を観察しながら、多面体・柱体・錐体等の形について理解するとともに、その違いについて考察する。</li> <li>・正多面体の特徴を調べ、それらが5種類のみである理由を考える。</li> </ul>	$\boxed{\text{関}\text{①}\text{②}}$ $\boxed{\text{考}\text{①}}$ $\boxed{\text{知}\text{①}}$
4	さまざまな見方で立体をとらえよう	<ul style="list-style-type: none"> <li>・面や辺等の立体を構成する要素について、その位置関係を考察する。</li> <li>・立体を面の平行移動や回転移動の結果としてとらえ、柱体や錐体の特徴を見直す。</li> <li>・立体の展開図を理解し、それを利用して、立体のままでは解決の困難な問題に取り組む。</li> </ul>	$\boxed{\text{考}\text{②}}$
3	表面積や体積を求めよう	<ul style="list-style-type: none"> <li>・おうぎ形の面積の求め方を考える。</li> <li>・柱体や錐体の表面積や体積について考える。</li> </ul>	$\boxed{\text{表}\text{①}}$ $\boxed{\text{知}\text{②}}$
2	まとめ	<ul style="list-style-type: none"> <li>・章の問題に取り組み、学習内容の確実な定着を図る。</li> <li>・単元テストに取り組み、理解の不十分な内容を確認する。</li> </ul>	$\boxed{\text{知}\text{①}}$ $\boxed{\text{表}\text{②}}$

5 単元の評価

	評価目標 (評価規準)	評価場面 (評価の方法)	「十分満足できる」生徒の姿	「努力を要する」生徒への手だて
関心・意欲・態度	①正多面体に興味を持ち、その特徴や種類について考えようとする。	・正多面体 (観察・発表) (机間指導)	・正多面体を構成する面が、3種類のみであることに興味を持つ。 ・正多面体が5種類のみであることを説明しようとする。	・正三角形や正方形、正五角形の1つの内角について確認するとともに、頂点にいくつの面が集まるか模型を用いて気づかせる。
	②平面図形を移動させることで、空間図形が構成されることに興味を持つ。	・面の動き (観察・発表)	・平面図形の移動でできる立体について、さまざまな例を挙げ、調べようとする。 ・平面図形を移動させた図を熱心に描いている。	・コインや教科書等を重ねさせて、実感させる。 ・回転体は模型を用いて説明し、身の回りの立体についての学習意欲を高める。
見方や考え方	①柱体や錐体を底面の形に着目して分類することができる。 [抽象化, 統合]	・いろいろな立体 (発表・ノート)	・いろいろな立体を、柱体と錐体に分類整理し、分かりやすくまとめることができる。 ・面の形や数が、立体を決定する有効な情報であることに気づいている。	・立体をよく観察させて、分類の視点に気づかせる。 ・ノートに見取図をすばやくかかせて、立体の考察に利用させる。 ・どの面を底面と考えるかによって立体の見方が変わること気づかせる。
	②空間図形の考察に、展開図を利用することができる。 [記号化, 単純化]	・立体の展開図 (ノート) (定期考査)	・展開図のうち、解決に必要な部分だけをかくいて、問題を解決することができる。 ・いろいろな立体の展開図をかくことができる。	・模型等の具体物を展開させることで、展開図の意味を実感させる。 ・いろいろな展開図があることを示し、面のつながりを考えさせながら、考察に必要な展開図をかかせる。
表現・処理	①立体の表面積を求めることができる。	・表面積 (発表・ノート) (定期考査)	・展開図をかくことなく、表面積を求めることができる。 ・底面の半径と母線の長さだけを基にして、円柱や円錐の表面積を求めることができる。	・具体物や見取図を色分けして、表面、側面、底面などを分かりやすく示し、面の構成を理解させる。 ・おうぎ形の面積を求める練習を繰り返し行い、定着させる。
	②平面図形を基に、その図形の回転体の見取図をかくことができる。また、回転体を基に、その元となった平面図形をかくことができる。	・面の動き (ノート) (机間指導) (定期考査)	・さまざまな立体を回転体としてとらえ、その基となる平面図形をかくことができる。 ・いろいろな平面図形を自分で決めて、その図形を回転させた立体の見取図をかくことができる。	・回転体とその基になった平面図形を比べさせることで、回転軸について左右の関係が線対称になっていることに着目させる。 ・実際に回転させたり、立体を半分に切らせたりして、実感を持たせる。
知識・理解	①直線や平面の位置関係について理解することができる。	・直線や平面の平行と垂直 ・面の動き (ノート) (単元テスト)	・平行や垂直、なす角等について、必要な図をかくいて説明することができる。 ・直方体や三角柱などの立体を用いて分かりやすく説明することができる。	・直方体や三角柱を用いて、直線と平面を示させることによって、位置関係をつかみやすくさせる。 ・直線や平面の平行、垂直等について、ノートにまとめさせることで理解を図る。
	②柱体や錐体の体積の意味やその求め方を理解することができる。	・体積 (発表・ノート) (定期考査)	・球などの他の立体の体積の求め方に興味を持って調べている。 ・面の動きや立体の分類等、視点を変えて、個々に体積の公式を説明することができる。	・柱体は、平面図形を移動してできる立体ととらえさせ、底面積や高さや体積との関連づけを図る。 ・錐体は、実験を通して公式を実感させる。

## II 本時の学習指導

### 1 題 材 いろいろな立体について調べよう

#### 2 授業の視点

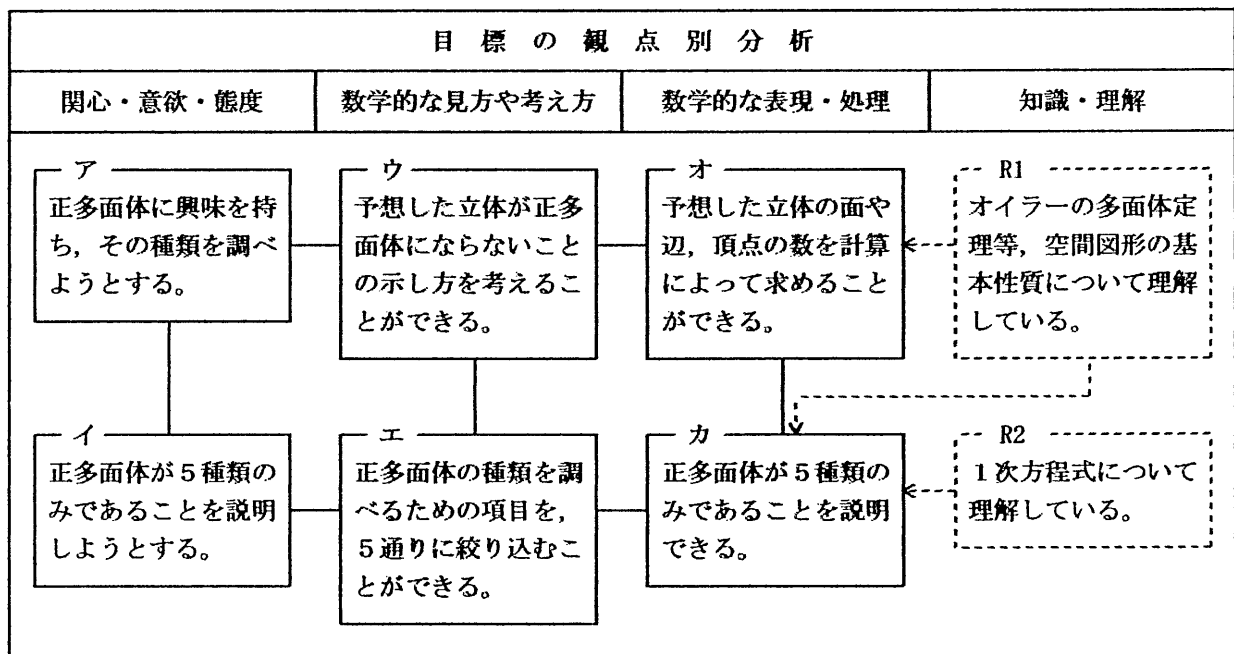
生徒は、小学校において、具体物を観察したり操作したりすることにより、その特徴を明らかにし、面の形に着目することで立体を分類・整理している。そこで、本単元の導入においては、合同な正多角形をつなげて立体を作成することを通して、既習内容を復習させるとともに、面や辺、頂点等の立体の構成要素に注目させて、それらを分類・整理する活動を行った。そこでは、正三角形だけを用いてさまざまな立体が作れること、立体になるには頂点に3つ以上の面が集まる必要があること、作り方によってはへこんだ立体ができることなどを感得しながら、立体のさまざまな概念を学んできた。また、面・辺・頂点の数を調べた表からオイラーの多面体定理を発見したり、バランスのとれた立体を作ることで正多面体の定義に迫ったりするなど、幾何図形が持つ美しさや神秘的な性質を主体的に感じ取ってきている。とりわけ、正多面体の作成においては、「このような美しい立体をもっといろいろと作ろう」とひたむきに取り組む姿が見られた。

そこで本時は、正多面体の種類が5つである理由を考えさせることとした。中学校の図形の学習は、いくつかの定義から始め、証明しながら数学の世界を構築していく幾何学習の入門期に当たる。第2学年以降に本格的な論証を学習するため、第1学年では、根拠を確認しながら既知の事項を積み重ね、数学の世界を創造する態度の素地をつくることが大切である。本題材は、正多面体の種類が5つである理由を考え説明することで、立体の作成を通して得た空間図形概念を整理させるとともに、具体物を用いず抽象的に考えることにより、数学の本質に触れさせるものである。特に、正多面体の種類の考察においては、角度と平面の関係、辺や頂点の数の工夫等の図形概念を振り返る必要があり、操作活動とその数学的な意味とを考える上で有効であると考え。また、本時の活動を支える数学的な考え方は、〔抽象化〕〔具体化〕〔一般化〕であり、これらの考え方を相互に関連させながら徐々に高めることが期待できる題材である。

指導に当たっては、正多角形の1つの内角の角度や1つの頂点に集まる角が $360^\circ$ 以上の場合には立体が構成できないなどの、空間図形の基本性質を全員が想起できるように、導入時の活動は一斉指導の形態で行うこととした。一方、表を作成したり正多面体を絞り込んでいく場面では、オイラーの多面体定理や正多面体を構成できる正多角形の種類等を根拠として説明する必要があるため、少人数でお互いに説明させる。その際、説明の内容をノートにきちんと記述させることで、思考の発散を防ぐとともに、簡単な数学の証明に触れさせたい。特に、正多面体が5種類であることを確かめる場面では、多くの既習事項を用いて説明したり、場合分けをしたりする必要があるため、班ごとに必要な内容を随時与え、見通しを持ちながら学習を進めさせたい。このような指導を通して、活動に内在する数学に目を向けさせ、立体の見方を一層豊かにするとともに、論証の素地を培いたい。

#### 3 目 標

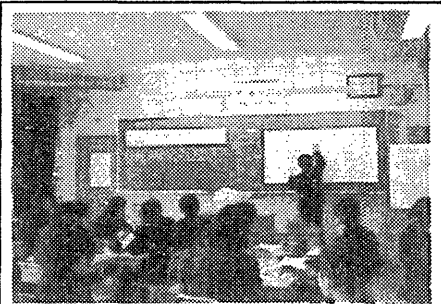
○正多面体が5種類のみである理由を、筋道を立てて考えようとする。



4 過 程

目標	生徒の活動	教師の手だて・評価
R1	1 これまでの学習内容を振り返る。	1 オイラーの多面体定理等を確認し、追究の準備とする。
5 つ 以 外 の 正 多 面 体 を 考 え よ う		
ア ウ オ	2 これまでに学習した5つの正多面体ではない形を考える。 予想される生徒の反応 ・正二十四面体がある。 ・あまり大きな正多面体はつくれない。 ・5つ以外にない。 等	2 できるだけたくさんの正多面体を予想させることで、説明の必要性への布石とする。 また、予想した立体について表を完成させるよう指示することで、これまでの学習内容を想起させる。  3 話し合う場面では、相手を納得させることを主な目的とさせることで、説明の必要性を感じ取らせる。 また、生徒自身の考えや根拠を明確にさせるために、理由を丁寧にノートに書かせる。
正 多 面 体 は 5 種 類 し か な い こ と を 説 明 し よ う		
イ エ R1	4 正多面体の種類が5つしかない理由を、班で検討する。 予想される生徒の考え ・3つの正多角形の1つの内角の角度に注目し、1つの頂点に $360^\circ$ 以上集まることはないことを根拠に説明する。 等	4 1つの頂点に集まる面の数を考えればよいことに気づき始めた段階で、班の活動に移行させる。その際、班内の全員が納得するような説明や質問を積極的に行うようにさせる。 --- 評 価 --- ・正多面体が5種類しかないことを、理由を明らかにして説明しようとしているか。 (観察・発表) 関①  ・解決の糸口が見つからない班には、立体模型を見せて、前時までの学習内容を振り返らせる。
R1 R2 カ	5 正多面体の面の数をどのように決定するか考える。 予想される生徒の考え ・面の数を $x$ とおいて、オイラーの多面体定理を用いて方程式をつくる。 等	5 正多面体の面、頂点、辺の数をまとめた表を用いて、現在分かっていることと、そうでないことを考えさせる。 また、面と頂点、面と辺の関係を確認することで、方程式をつくりやすくする。
	6 本時の活動を振り返り、説明に用いた空間図形の性質や方程式を用いた考え方などについてまとめる。	6 正多面体を実際に作らなくても、表を作成できることを確認し、数学的な考え方のよさを感得させる。

### 3 授業の実際

時間	生徒の活動	教師の活動
	準正多面体（紙の正六角形と正五角形でつくった）を提示し、生徒に渡す	
	<ul style="list-style-type: none"> <li>・正多面体ではない。 ←</li> <li>・正五角形と正六角形が混ざっている。 ←</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>・正多面体かどうかを生徒に確認する。</li> <li>・正多面体ではない理由を尋ねる。</li> </ul>
	正多面体の定義と、5つの正多面体を確認しよう	
6	<ul style="list-style-type: none"> <li>・24, 32, 36, 40, 61, 64面体 ←</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>・5つの正多面体は、以前作って確認したが、ほかにはどんなものがあるか、自由に発言させる。</li> <li>・実際に作らずに正多面体かどうか調べたい。</li> </ul>
	正二十四面体はあるのか調べてみよう	
15 20	<ul style="list-style-type: none"> <li>・1つの頂点に集まる面は、3枚以上。</li> <li>・正三角形は、3, 4, 5枚からできる。</li> <li>・各自で考える。</li> <li>・表を利用して考える。</li> <li>・ないのではないかと理由</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>・1つの面の形、1つの頂点に集まる個数について生徒とのやりとりを行う。</li> <li>・面の形は、正三角形と決めて考えてみよう。</li> <li>・模型を作らずに考えてみよう。</li> <li>・あるかないか発表させる。</li> </ul>
25	<ul style="list-style-type: none"> <li>理由</li> <li>頂点が小数なのはありえない。</li> <li>オイラーの多面体定理に当てはまらない。</li> </ul>	
28	模型を作らずに正多面体の表を作ろう	
38	<ul style="list-style-type: none"> <li>・表の空欄を何とか埋めようとする。</li> <li>・表の空欄をうまく埋められない。</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>・班で考えさせる。</li> <li>・表を配付する。</li> <li>・模型を作らずに表を完成させよう。</li> <li>・1つの頂点に集まる面の数について質問する。</li> </ul>
45	<ul style="list-style-type: none"> <li>・3枚 ←</li> <li>・3枚 ←</li> <li>・3枚, 4枚, 5枚 ←</li> <li>・ない ←</li> <li>・360度になるから。 ←</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>正方形は？</li> <li>正五角形は？</li> <li>・面が三角形で、考えられる頂点の集まり方を考えさせる。</li> <li>・6枚集まることはあるか。</li> <li>・なぜないのか？</li> <li>・方程式を解いたら4になるということは正四面体になる。</li> </ul>
47	<ul style="list-style-type: none"> <li>・生徒：3枚の場合面の数を <math>x</math> とすると頂点の数、辺の数が <math>x</math> を使って表せるからオイラーの多面体定理に当てはめて方程式を解いた。</li> </ul>	
50	<ul style="list-style-type: none"> <li>・ほかの場合を <math>x</math> を使って考え、表を完成させる。</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>・ほかも同じようにできるんじゃないかな？</li> <li>・分担してやったらいいかも。</li> <li>・表を完成させておいて、今、表を作ってみたら5つしかできないので、正多面体は5種類しかないということがわかることを確認する。</li> </ul>
55		
	発表の様子の写真	

### ③ 授業研究会

#### 1 附属中学校における協議〔平成18年2月27日(月) 全体研究授業授業研究会〕

#### 授業者反省

- 柱は大きく2つ ①正二十四面体があるかどうかの確認  
②正多面体が5種類しかないことの説明

- ①では、話し合いや発表など、生徒の活動はよかった。  
②では、しばらく何をしてよいか分からない時間が多かったが、その支援が足りなかった。

↓

授業者としてはむしろその時間を多くとり、  
「 $x$ を用いて考えればどうなるか…」などと考える時間にしたかった。  
しかし、全体的には生徒の「何とかしよう」という思いがうかがえた。

#### 協議

- 全体的に難しかった。
- 生徒は「オイラーの多面体定理」をどの程度理解できているのか？  
→教科書には記載されていないが90%以上の生徒が理解している。
- 授業のどの場面が具体化、抽象化、一般化なのか？  
→正二十四面体を考えることが具体化
- 展開の4と5の活動を変えた理由は？  
→教師が欲張った。5つしかないことを証明することよりも、やっていくうちに5つしかないことが証明されることの方が数学的に難易度が高いから。
- 今日の授業は難しかったので、相談や話し合いをしながら進めていたが、どの程度の生徒が今日の授業を理解できただろうか？  
→1/3程度しか理解できていないだろう。  
正多面体が5つしかないことを数学的に考えることよりも、筋道を立てて考えようとする態度の方を重視したい。特に第1学年では、この感覚を育てたい。
- 筋道を立てて考えるということは、方程式を使って解くことなのか？  
正二十四面体があるのかなという疑問よりも、最初から5つしかことを証明した方がいいのでは？  
最初に「とりあえず5を入れて考えてみよう」とあったが、この活動が分からない。また、具体から抽象、一般という流れがすっきりしない。  
→前時までに多面体の性質について、具体物を用いて理解してきたので、「じゃあ、正二十四面体はあるかな？」と考えさせたことになる。その上で、1つの頂点に集まる辺の数を5を入れて考えさせることで、頂点の数が小数になり、5の場合は成立しないことを理解させたい。  
前時までに、具体化については時間をかけて確認しているので、本時は、具体物を使うことなく、一般化のステージにのせたいと思った。



○なぜ、二十四という数が出てくるのか？

→5つの正多面体が、4、6、8、12、20と増えていくので、4の倍数ではないかな？というふうには生徒が考えるのではないかと思う。

○評価では、関心・意欲が主だが、数学的な見方や考え方を主にしてもよかったのではないか。

○「オイラーの多面体定理」はこれまで聞いたことがないが、どうなのか。教科書に載っていないならば理解できなくてもいいのか。また、本時の内容は、附中の生徒だから、理解できたことなのか。  
→確かに、子どもの実態から考えればそのとおり。今は教科書に載ってはいないが、授業で十分扱える内容であるし、実際に授業でも扱う。この授業を進めるに当たり、理解できない生徒のために、面談や小テストを行うことで、徐々にステージにあげてきたつもりである。

○グループ活動は、他に任せるだけの生徒、じっと考えるだけの生徒、発表を聞いて「あっ、そうか」と理解するだけの生徒がいるので、自己評価とか、班長などの役割を決めて取り組ませる方がいい。

○レディネスとしての、オイラーの多面体定理や頂点、辺に関する式はどうやって指導したのか？  
→授業を展開していく中で、1-3の生徒が気づき、式をつくった。

○本時は、空間図形の学習ではなくて、 $x$ を用いて導き出す方程式の学習ではないか。  
→空間図形も方程式も、数学的な見方や考え方を身につけさせるための道具である。

#### **教頭からの指導助言**

- 本時の内容は2～2.5時間で行ってもいいところ。これを1時間で扱うのは時間的に無理がある。
- 通常は、モデルを用いて気づいたことをまとめていくことで、オイラーの多面体の定理に気づくような展開である。また、1年生では、図形については名称や基本的な性質等を知る段階で終わる。しかし、本時は、その上を目指した授業。ある意味、挑戦的な授業である。
- 中1の段階で、方程式を使って解くのは難しい。それを説明したI君はすごい。また、その説明に歓声を上げて理解した周りの生徒の能力もすごい。
- 具体→抽象→一般 実は双方向に進むものであって、抽象→具体へもう一度かえって、しつこいくらいに振り返らせてもいい。
- 頂点が小数になるから、オイラーの多面体定理に当てはまらないのでならないという論理は、中学1年生の時点では、おかしい。

#### **副校長からの指導助言**

- 全体研究授業の際、先生方は1時間を犠牲にして授業を見に来られている。その点を考えると、模擬授業を何度も行い、研究授業を迎えるべきである。また、模擬授業を行う中で、授業の流れを変えることになったのであれば、その部分だけでも修正案がほしい。
- 本時の授業では、教師と子どもの間に、なめらかな雰囲気があった。これは、授業をするにも、学級経営をするにも大切なことである。空気の作り方を学べ。
- 数学や英語は、教師と子どもの能力の差が大きい。教師は横柄に構えることなく、子どもを大事にして授業を進めていかなければならない。子供たちの目を大事にして、反応をすぐに察知できる教師でありたい。

## 2 算数・数学部会による協議〔平成18年2月28日(火) 共同研究授業研究会〕

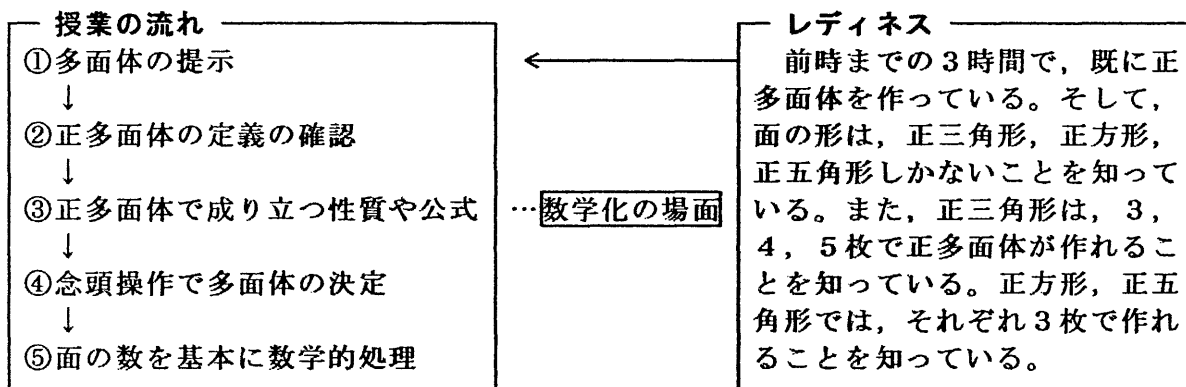
参加者 教育学部：平岡教授， 附属中学校：山下， 刈山， 中村， 山本 各教諭  
 附属小学校：東原， 村瀬， 伊藤 各教諭， 附属幼稚園：福元教諭

### 協議

平岡：授業のねらいと意を授業者から。

山下：これまでに学習した空間図形概念を使って，正多面体が5つしかないことを説明することが一番のねらい。ポリドロンを使ってたくさん遊んだ後，数学化させたいと考えた。授業提案としては，具体物からどのように一般化に移っていくかを，接続時期という面から考えたかった。

平岡：当日の授業の流れの確認



既習事項と数学的な考え方をどのように考えれば，小学校でも行うことができるのか。

東原：中1の生徒がよくしゃべるなど感じた。小学生でも可能かについては，正多面体ができるかという場面で小数が出るから作れないことと，式に当てはめることは，できると考える。何種類できるのかを考えているときの生徒の思考はどうだったのか。試行錯誤か仮説を立てたか。

山下：思考が止まっていたと考える。表を作る作業が突然きたので，どうしていいか分からなくなったと思う。それは予想していて，生徒には，「ではどうしたらいいのか…」と，ぐっと考えてほしかった。が，実際は，その時間はもう少し短くてもよかった。

東原：前時に表を作っていると知らなかったのだから，試行錯誤で当てはめたと考えた。

平岡：あそこが混乱の始まり。61という予想が出た段階で，遊びになった感がある。

東原：ということは，正二十四面体になるのかもしれないと思っていたのですね。

山下：何をしたいか分からない生徒が多かったと思う。表が既にあるから，何から入れているか分からなかった。

平岡：(面の頂点) × …などの式より，もっと単純な式があるはず。

$x$ を当てはめるとき，式を理解していないのでは。

山下：理解していたと思う。これまで何度も使用してきた。

東原：できたのは5種類だね。できないものをさがすのは，どちらがいいのか。

山下：もっと単純な流れを作ると，5種類しかないという結論を示して，それを計算などで確かめていく方がスムーズだと考える。が，生徒の様子を見ていると，欲が出てしまった。

刈山：正二十四面体では確かめられた。同様に，ほかのも調べて，並べてみると，文字を使う発想が出るのではないか。

平岡：14.4を出す方法を共通に確かめなかったのだから，次の活動につながらなかったのでは。

山下：ほとんどの生徒が何度もやっているのだから，理解していると考えた。

平岡：10日前というギャップは大きいと思う。自分が指導したときは，3学期間いっぱい多面体づくりをさせた。

伊藤：正二十四面体があるのかないのかを問うところが，参観側からは突然に見えた。5種類出さなかったところが，複雑に見えた。6年生は，直方体・立方体だけの考察から，中1でこのように複雑な図形を考察するので，小学校ではどこまでどのようなことを身につけさせればいいのかを考えるか。

- 山下：1つめの質問は、みんなのコンセンサスを得てから提示すべきだった。2つめの質問は、三角形、面の形などの名称をきちんと覚えてほしい。というのは、言えない生徒が多く、考察には必要なので、トレーニングしておいてほしいと考える。
- 平岡：「面の数」とは何を指しているかは分かりにくい。
- 東原：具体物を触っていないからだと思う。9歳までが経験的知能とあって、6年生では、念頭操作をしていることが多い。
- 平岡：正二十面体をすぐに作れる生徒は2割くらいではないか。観察させて、言葉を出すまで待てないところがある。本時は、後半の活動だけでいい。そして、考えることを2つ程度に絞っておくと、すっきりするのではないか。
- もう1つの話題は、教師の目標と生徒の目標と2つあるだろうということ。本時は、
- 〔教師：正多面体が5種類であることを等式を用いて確かめる。  
生徒：正多面体について性質を学ぶ。〕
- 教師の目標からすると、始めのサッカーボールや準正多面体の提示は不要だと分かる。では、子供の目標は？このことは、案外曖昧にされているところがあり、これを考えることは、大切だと思う。
- 東原：子供の目標は、「1つずつ具体的に調べるとたいへんだから、方程式などの方法を見つけよう」ではないか。そして、方程式の発想に行くための手だてが必要なのではないか。
- 平岡：表を配られた段階で、思考が止まったと思う。
- 山下：どうしようか。ということから、既習の事項を総動員して解決しよう。というのが、生徒の目標になる。
- 中村：分からない子はそれを比べても分からないと思う。あの例は小数が出るが、整数になるものもある。それを排除する方法もある。判断は、オイラーの多面体定理になる。
- 刈山：表でどこが決まれば全部埋まるかに目をつけさせるとよいのでは。
- 東原：既習のものをつなげられない子供への手だてが思いつかない。
- 平岡：面の形は、正六角形3枚ではなぜできないと生徒は考えるのか。
- 山下：感覚として分かっていると思う。
- 平岡：正三角形6枚で、立体ができていると考えるか、正六角形になるから…と思っているのか。言葉として分かっているといけない。
- ：表のどの部分に入れるのかは絶対的なものがあるのか。面の数を  $x$  とし、次に頂点、辺と入れていくこともできる。やはり、いくつも面の形をいろいろ試していくうちに、文字を使うという発想は出るのではないか。ところで、オイラーの多面体定理はいつ誰が気づいたのか。
- 山下：10人くらいは関係に気づいた。2という数は教師から示した。
- 平岡：この関係を見いだすことは、小3でも可能ではないか。ただ、ポリドロンの弱いところは、辺の数や頂点の数がばらすと見えないこと。さらに、この後どうするかということを考えて。それと、やはり待つということとはとても大事だと思う。
- 平岡： $12 + 9 = 21$ 、 $23 + 9 = 32 \dots$ 。では、なぜ9なのか？
- 東原：小学校では難しくないか。
- 平岡： $54 - 45 = 9$ を考えればよい。さらに、3桁ならどうなるか。  
 $123 + 198 = 321$ 、 $234 + 198 = 432 \dots$ 。では、なぜ98になるのか。  
 $543 - 345 = ?$ ふつうは、10の位から1借りて…  
 しかし、
- |    |   |   |      |
|----|---|---|------|
| 5  | 4 | 3 |      |
| -3 | 4 | 5 |      |
| 2  | 0 | 2 | 足りない |
- という見方をすれば、 $200 - 2 = 198$
- $1234 + 3087 = 4321$ 、 $3456 + 3087 = 6543 \dots$
- 1, 2の例を示すと、先はすぐ予想できる。こんなことを、遊ぶ感覚で考えさせることも大切ではないか。「1つの計算→数学的推論→予想→確かめ」というサイクルの例であり、その際、どのような既習の内容を利用するかということ。
- 正多面体で、幼小中それぞれどんな単元が考えられるだろうか。 $30^\circ$   $60^\circ$   $90^\circ$  の直角三角形の板を使って、どんな授業が展開できるだろうか。同じものを使って、幼小中で考えてみたい。

#### 4 おわりに

本研究は数学的活動を取り入れる授業構成の実践的研究であり、今年度は、附属中学校の山下先生による中学1年生の図形領域の内容の研究授業が行われた。授業内容は多面体を作る操作的活動から数学化を行い、その結果にこれまで学習した数学（方程式）を適用して正多面体が5種類しかないことを考察するものである。

本時までに、生徒達はポリドロン(教具)を用いて、いろいろな多面体を作り、その多面体を考察する方法として、その構成要素（頂点、辺、面）とその数に着目して、

$$\text{オイラーの定理} \quad (\text{面の数}) - (\text{辺の数}) + (\text{頂点の数}) = 2$$

を求めている。

教具を使って多面体を作ることは、今年の附属幼稚園での研究授業でも行われた。園児達は正三角形や正方形、正五角形、正六角形などをいろいろな多面体やコマなどの遊び道具なども創り出していた。また、小学校では、立体図形や平面図形の構成要素について考察することは学習内容の1つである。この観点から、教具を使うことにより、正多面体の性質について考察することは十分可能である。

中学1年では空間図形の学習内容として、点・直線・平面の位置関係、立方体の平面による切断面の形（現行の学習指導要領からは削除されている）の考察、さらに本研究授業で行われた多面体の構成要素（頂点、辺、面）の数の間に成り立つ関係式およびオイラーの公式などが教材として考えられる。特に、空間図形は現行の学習指導要領ではほとんど扱われていない現実であり、数学的感覚を育てるために本時のような授業が行われることが重要である。

ところで、授業には指導者と生徒の2つの目標がある。本時の指導者の目標は、これまでに求めた構成要素の数の間に成り立つ関係式を使って正多面体が5種類しかないことを求めることであり、生徒の目標は、正多面体の構成要素の数の相互関係の中でオイラーの公式に数学（方程式）を利用して正多面体が5種類しかないことを示すことである。

数学的活動の視点から本時を考察すると、生徒達はこれまでに求めた面の数・辺の数・頂点の数とその相互関係およびオイラーの公式の活用方法に戸惑いを感じていた。しかし、生徒のひとりが面の数を未知数として、頂点の数や辺の数を面の数で表し、これをオイラーの公式に代入して方程式を作ることを説明した時、クラス全体に驚きと同時に感動が広がり、生徒の感情が高揚した場面では、指導者の山下先生は我が意を得たりという心境であったであろう。

数学的活動は、算数・数学科の授業ではこれからも重要な活動として位置づけることができる。指導者はそれを子ども達の試行活動を待つことも大変重要である。今後学部と4附属共同研究では、この点に着目し共通の教材を活用し、数学的方法の広がりを体感させる授業研究を進めたいと考えている。

#### 算数・数学科共同研究メンバー

教育学部	平岡賢治				
附属小学校	東原宏章	伊藤裕子	村瀬明久		
附属中学校	山下 徹	刈山弘全	中村球平	山本圭介	中島清志
附属幼稚園	福元みさお				
附属養護学校	岡田健治	岡元和正	遠藤 茂		