

言語活動を重視した数学的活動の授業研究 ～学部・附属共同研究プロジェクト(数学部会)～

附属中学校 山本圭介、江口敬文、中島清志
教育学部 平岡賢治、宮内香織

1 はじめに

1 研究について

今年度の附属中学校との共同研究は、附属中学校の副研究主題である「言語活動を重視した学びの展開」に視点を当て、生徒の言語活動を引き出す授業づくり、およびその実践研究を行った。本稿では、2つの授業実践を提示しているが、ともに導入教材に工夫を行っている。研究授業その1では、方眼紙を活用した線分の分割を、研究授業その2では、1点の周りの長方形の敷き詰めから平面の敷き詰めへの広がり、それぞれ操作活動を伴う思考活動を通して、数学の広がり、楽しさや面白さを体感させる授業づくりを行っている。また、数学における言語活動については、既習内容を生徒たちが自分たちの言葉で数学化し、数学を活用するよさを体感する場面を作るところが重要である。

さて、附属中学校の研究主題と副主題は次のとおりである。

研究主題 数学を活用することの良さや楽しさを実感できる生徒の育成

研究副主題 一般化をキーワードとした授業の展開

一方、数学科においては、本校の生徒は、数学に対する関心が高く、計算などの基礎的・基的な知識や技能については、ほとんどの生徒が十分に満足できる状況にある。また、その知識技能を活用して簡単な問題を解決することもできる。一方で、日常生活に見られる具体的な事を数学的にとらえて考察しようとすることや、自分なりに判断したり他者に説明したりすることに課題が見られる。これは、教育課程実施状況調査、TIMSS や PISA などの国際的な調査の結果から指摘された課題と一致している。

そこで、数量や図形の意味を理解する上で基盤となる学習活動を取り入れて視覚的にとらえさせるなどして、数量や図形の意味を実感できるようにするとともに、学んで身につけたものを用いて問題解決を図ったり、日常生活や他教科等の学習に発展的に活用したりする場を設定することにより、生徒の数学を学ぶ意欲を高めたり、学ぶことの意義や有用性を実感させたりすることができると考え、研究主題を「数学を活用することの良さや楽しさを実感できる生徒の育成」とした。

また、本校数学科では、平成13年度から15年度までの3か年間、「豊かな発想を学び合い生かし、数学的な思考を深めることができる生徒の育成」を研究主題とし、他者とのかわりに重点を置いた学び合いや、生徒の発想を豊かにし、思考を深めさせるための数学的活動の充実を図った研究を進めてきた。この研究

を通して、本校における数学的活動の定義づけを行い、生徒の状態と活動とを関連づけて考えることで、数学的活動で構成された授業観を構築することができたが、一方で、学び合いの中で表現力を高める指導の工夫が課題として残された。

このことを踏まえ、授業設計に当たっては、個々の課題を解決するためだけにとどまらず、一般化の視点で考察し、判断したり説明したりする場を充実させることが重要であると考え、副題を「一般化をキーワードとした授業の展開」と設定した。

これらのことから、授業の中で一般化する学習を重ねることにより、具体的な事象に数学を活用して判断するとともに、数学を活用することの良さや楽しさを実感させることができると考えた。

2 期待する生徒像について

研究主題に掲げた「数学を活用することの良さや楽しさを実感できる生徒の育成」を目指す生徒の姿を期待する生徒像として、次のように設定した。

- 旺盛な好奇心を持ち、黙々と真実を探究する生徒
- 明確な根拠を持って、論理的に考察することができる生徒

3 数学科における言語活動について

生徒が一般化する力を育成するためには、式や図、表、グラフなどの数学特有の言語を正しく理解する学習と、それらを適切に用いて課題を解決する学習とが必要である。特に、後者の学習では、概念を理解した上で、その概念を用いて説明したり、互いの考えを伝え合ったりするなどの言語活動を授業に位置づけることで、生徒は自らの考えを言葉にして表したり、他者の意見に耳を傾けたりするとともに、自らの考えをより深めることができる。このような言語活動を効果的に指導計画や授業に位置づけたいと考えた。

② 研究授業その1 第3学年「相似な図形」

1 授業の意図

今回、本校数学科の目指す「一般化をキーワードとした授業の展開」の一提案として、この授業を計画した。本時の題材である三角形と比の定理は、その後に学習する平行線と比の定理と併せて、線分の長さを求める活動に重点が置かれがちである。しかし、三角形と比の定理を導く過程は、数学的活動を取り入れるよい場面であるにとらえた。「既習事項を用いて図形の性質を見いだす活動」や、「数学的な表現を用いて根拠を明らかにし筋道を立てて説明する活動」を行うことができるだけでなく、この1時間と、その前後との関連性もふまえた活動を仕組むことができる点が、この題材を取り上げた理由である。

I 単元の学習指導

1 単元名 相似な図形

2 単元の目標

- 相似な図形のかき方や性質に興味を持ち、進んで調べようとする。
- 三角形の相似条件や平行線と比の性質等を使って、図形の性質を考察し、それを証明することができる。
- 三角形の相似条件に照らして、相似な三角形を見いだすことができる。
- 三角形の相似条件や三角形と比の性質等を理解することができる。

3 単元について

生徒は、図形領域において、第 1 学年では、平面図計や空間図形について学習し、作図したり立体の見取図や展開図をかいたりすることで、図形に対する理解を深めるとともに、平面上や空間内における直線や面の関係など、図形を直観的にとらえる力を身につけてきた。また、第 2 学年では、平行線の性質や三角形の合同条件などを基にして、三角形や四角形について考察し、それらの図形の性質を証明によって明らかにする力を身につけるなど、論理的に思考する能力を伸ばしてきた。一方、日常生活においては、コピー機を利用して、目的や用途に応じて実物を拡大・縮小したり、写真を撮影する際に、ズーム機能を用いたりするなど、相似の考え方が生かされた機器を使いこなしている。また、社会科の地理的分野において、実際には計測できない 2 地点間距離を、地図上の距離と縮尺を用いて算出できることを理解している。このような生徒に、数学科における学びと日常生活とを結びつけて考えさせることは、学んだことを活用することの良さや楽しさを実感させるとともに、数学を学ぶ意義を感得させることができると考えた。

そこで本単元では、コピー機やカメラ等に应用されている相似の概念を学ばせるとともに、相似な図形の性質や三角形の相似条件を学ぶことにより、相似な図形の性質を活用して課題の解決を図ることができるようになることをねらいとした学習を行う。このことにより、相似の考え方を課題解決に活用する中で、図形中の線分の長さが容易に求められるようになるなど、相似を学ぶ意義や活用方法を実感できるようにさせたい。また、図形の性質を見いだす過程においては、それまでに身につけた図形に関する知識や性質を根拠として、新たな図形の性質を導き出すなど、論理的に思考するとともに、自己の考えを筋道を立てて述べる力を伸ばすことができると考える。

指導に当たっては、まず、日常生活において相似の考えが用いられている例を示したり見つけさせたりして、図形の学習に対する興味や関心を高めさせたい。また、方眼紙や短冊状の紙片などを用いて相似な図形をつくったり、線分を内分する点を作図したりするなどの操作活動に取り組みさせることとする。これは、日常生活において体験的にとらえたことを整理させることにより、自ら図形の性質を見いださせ、数学的な探求心を伸ばすことをねらいとするものである。さらに、見いだした図形の性質が、常に成り立つかどうかについて意見を述べ合う言語活動を通して、一般化する活動に発展させることで、筋道を立てて論証する力や互いの意見が適切であるかを判断する力を伸ばしたい。

このような活動を通して、進んで数学的な考え方を日常生活の中に見いだそうとする姿勢を培うとともに、探究心を持って学習に取り組み、数学の良さや学び合う喜びを実感できる生徒の育成を目指す。

4 単元の授業計画 (全 14 時間)

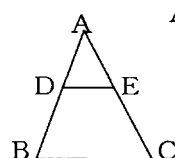
曜日	学習活動	教師の手だて・評価	主な言語活動
3	1 相似の意味を考える。	1 さまざまな形や大きさの図形を分類する活動を通して、相似の意味をつかませるなど、操作活動を取り入れることで、相似な図形について理解を深めさせる。 -- 評価 -- ・相似な図形や相似の位置、相似の中心、相似比の意味を理解できたか。 (ペーパーテスト) 知	
1	2 三角形の相似条件を見いだす。	2 三角形の合同条件と対比させながら考えさせる。 -- 評価 -- ・三角形の相似条件を用い、2つの三角形が相似であることを証明することができたか。 (ペーパーテスト・ノート) 関	

3 目 標

○三角形の相似条件などを使って、三角形の1辺に平行な直線と他の2辺に関する性質を考察し、それを証明することができる。

目標の観点別分析			
関心・意欲・態度	数学的な見方や考え方	表現・処理	知識・理解
ア 線分の中点を、意欲的に見つけようとする。			R1 三角形の合同条件を理解している。
イ 線分の中点が見つけられる理由を、意欲的に見いだそうとする。	ウ 線分の中点や、線分を内分する点が見つけられる理由を、論理的に考えることができる。		R2 三角形の相似条件を理解している。
		エ 「三角形と比の定理」を導くことができる。	

4 過 程

目標	生徒の活動	教師の手だて・評価
	線分を2等分してみよう	
R1 ア	1 方眼紙にいくつかの線分をひき、その中点を、理由を考えながら見つける。 予想される生徒の反応 ・マス目を数える。 ・合同の考えを利用して証明する。 等	1 ひもなどを半分にする方法を考えさせた後、方眼紙を用い、マス目や格子点に着目させながら線分の中点を見つけさせる。
R2 イ ウ	2 格子点を使わずに、線分の中点を見つめる。また、その理由を考える。 予想される生徒の反応 ・合同な三角形を見いだす。 ・相似比が1:2である図形を見いだす。 等	2 相似な図形を見いださせることで、比を調べられることに気づかせ、格子点を使わずに線分の中点が見つけられることを、証明により確認させる。
	線分をいろいろな比に分けてみよう	
R2 ウ	3 等間隔に並んだ平行線を使って、2:3に分けられた線分をひく。また、その理由を考える。 予想される生徒の反応 ・相似比が2:3である図形をかく。 ・平行線に垂直な直線をひき、平行線の間隔を数える。 等	3 等間隔に並んだ平行線の間隔を数えることで、長さが比較できることを確認するとともに、平行線の重要性に気づかせる。 --評価-- ・三角形の相似条件を用いて証明することができたか。 (ノート, 発表) 表
R2 エ	4 m:nに分けられた2本の線分を組み合わせ、「三角形と比の定理」を導き出す。 三角形と比の定理  $AD : AB = AE : AC$ ならば $DE \parallel BC$	4 これまでの活動の中で扱った図と比較することで、図形の性質に気づかせ、証明により確認させる。

2 授業研究会

(1) 授業者より

学習指導案で学習内容や授業展開を見ると、1時間の学習にしては操作活動が多すぎる印象がある。実際、どの学級の授業においても、この内容を1時間で終えることができなかった。

実施した授業では、授業者の発問が生徒の混乱を招き、活動が停滞してしまう結果となってしまった。線分の中点を見つける2回目の活動場面である。1回目は、方眼紙の縦や横、対角線の数に着目して線分の中点を見つけた。2回目は、その後の、等間隔の平行線の中で同じような活動をとおして、一般化を図っていくために、格子点上に線分の両端や線分の中点がないようにして見つけさせようとした。活動内容を確実に把握させられなかったために、この題材のよさをいかし、生徒に数学のよさを十分に感じさせることができなかったという反省が残った。

(2) 参観者より

○線分の中点を探す活動で、「格子点を使わずに」という指示を出したが、どういうことを指していたのか。1:1に分ける点の位置のことなのか、それとも、線分の始点や終点のことであったのか。

→両方である。格子点を使うということは、マス目や正方形の対角線を数えるということであるが、格子点を使わずに見つけてほしかった。

○問題解決において、生徒の活動が止まったときに活動の手助けが必要であり、既習事項に戻るべきだった。また、「一般化」とはどの部分を指すのか。

→本時では、等間隔の平行線を利用して三角形と比の定理を導く活動を行った。定理を導く過程にあって、格子点→平行線→白紙と、少しずつ条件を減らして考えていくところを「一般化」ととらえた。また平行線に交わる2本の線分が、どのような位置関係にあっても、同様のことがいえることが確かめられる点についても「一般化」ととらえた。

○最初の段階で問題を広げすぎてしまったのではないか。目標をもう少し絞っていくと、後半の面白さを感じさせることができたのではないか。

○線分の中点を探す活動で、線分の始点・終点は格子点にあるが、中点が格子点上にない場合をなぜ扱わなかったのか。これを扱うことによって、合同や相似の考えを使って中点が見つけれられた理由を説明できたのではないか。

○授業者が、生徒の意見（平行四辺形を利用して、中点であることを証明）にこだわりすぎたので、生徒の活動が停滞してしまったのではないか。

○言語活動は、書くところから始まるのではないか。今日は、書く生徒が少なかった。

○指導案の後半部分にある、線分を2:3に分ける活動まで行ってほしか

った。そのためにも、省略するところは省略すべき。はじめの線分の中点を探す活動については教師の説明でもよかったのではないか。また、中点であることを確認する場面で、マス目を数えるだけでなく、マス目の縦、横の線分を意識して考えると次につながったのではないか。格子点を使わないのであれば、はじめから白紙でやってみてもよかったのではないか。

→格子を使うことで、合同な三角形や相似な三角形を見つけやすいと考えた。そのことを手がかりに、等間隔な平行線で考える場合、目盛りがない場合と抵抗なく進んでいくことができ、三角形と比の定理にたどり着けるのではないかと考えた。

○1 : 1にこだわったので活動が停滞したように思う。線分を2 : 3に分ける活動にすぐに移ってもよかったように思う。

(3) 指導助言より 長崎大学教育学部 宮内先生

- ・事象を数理的に考察できる、新学習指導要領に即した授業であった。
- ・教師自身の言語を考える必要があった。指示の仕方が適切であったか。また、図にA, B, Cと名前をふって、生徒の言語活動を充実させる工夫も必要であった。
- ・学級全体で課題を共有しているかを確実に把握する。黒板も、共有させるための大事な道具である。図は大きく書き直したり、生徒が書いた図についてどういう図をかいたのか尋ねたりするなど工夫が必要である。
- ・言葉だけでなく、記述ができるようになることも重要である。本時では合同の証明もかかせたいところだった。
- ・本時の授業では、「日常生活の場面→数学の世界での解決→現実場面への適用」という流れがあった。

3 研究授業その2 第2学年「図形の性質」

1 授業の意図

生徒は、これまでに、第1学年で平面図形や空間図形について、その基本的な作図や、平面内や空間内における点と直線の位置関係、直線と直線の位置関係等を学習してきた。これが、第2学年では、図形の性質を調べ、その性質を根拠にしながら新たな図形の性質を見いだすことを学習する。その性質を根拠として説明するためには、図形に関する性質や条件を正しく理解し、それを自分の言葉で分かりやすく他者に伝えなければならない。ここに、今数学科が研究を進めている言語活動に結びつくのではないかと考え、平行四辺形の学習の後に「図形のしきつめ」という内容で、授業を計画することにした。

I 単元の学習指導

1 単元名 図形の性質

2 単元の目標

- 三角形や平行四辺形の性質に関心をもち、それを既習の図形の性質を用いて調べようとする。
- 既習の図形の性質を根拠にしながら、三角形や四角形の性質を見だし、証明することができる。
- 二等辺三角形、平行四辺形に関するいろいろな性質や条件を理解している。

3 単元について(省略)

II 本時の学習指導

1 題材 四角形をしきつめよう

2 授業の視点

生徒は、これまでに、前単元において基本的な図形の性質や三角形の合同条件について学習し、そのことを根拠として論証する学習を進めてきた。学習を始めたころは、形式よりも考え方を重視し、相手に分かりやすく説明することを目標に自由に取り組みさせてきた。その後、問題文が「…ならば…である」という仮定と結論を用いた表現になると、何が等しいのか、何を証明するのが混乱する生徒も見受けられるようになった。そこで、仮定を用いて2つの三角形の合同を示し結論を述べるという証明の手続きについて確認したことにより、形式的に説明することができるようになった。また、本単元では、例えば「二等辺三角形の底角は等しい」等の図形の性質や、「2組の対辺がそれぞれ等しい」図形が平行四辺形といえるのか等の条件について、これまで学習したことを根拠としながら証明をすすめることで、一つ一つ確認し、またそのことを利用して問題の解決を図ってきた。かなりの時間を証明に費やしたことで、「もう、うんざりだ」という声も聞こえてはくるが、以前よりも明らかに見通しを立てて図形を考察し、証明をすることができるようになってきている。

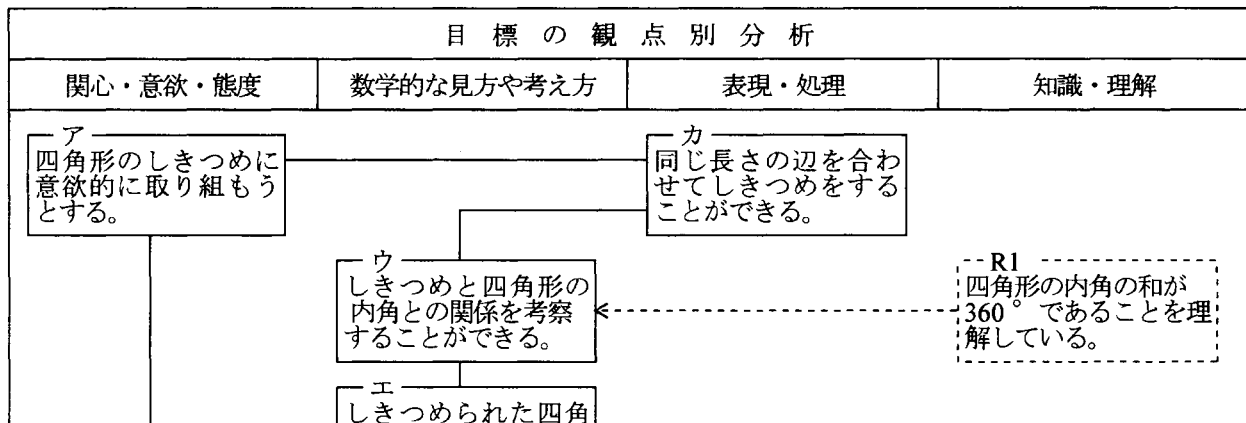
そこで、本時は、これまでの論証のまとめとして、四角形の「しきつめ」を基に図形を考察することとする。長方形や正方形などの特別な四角形のしきつめについては、小学校のときに授業で扱ったことのある生徒もいるだろうし、壁や床に使われるタイル等でそのしきつめられた姿を見たことはあるだろう。しかし、ふつうの四角形は目にする機会がない。なぜしきつめることが可能なのか、しきつめられることと四角形の内角の和との関係に気づかせることができる問題である。さらには、四角形の対辺の midpoint どうしを結んだ線分をかき加えてからしきつめると、その線分により平行四辺形が現れる。なぜそれが平行四辺形といえるのか、また、結んだ線分がなぜ一直線になるのか、もとの四角形と平行四辺形は同じ面積を持つのかを考察することができるなど、この題材は図形の中に何らかの関係を見だして考察することができるものであると考える。

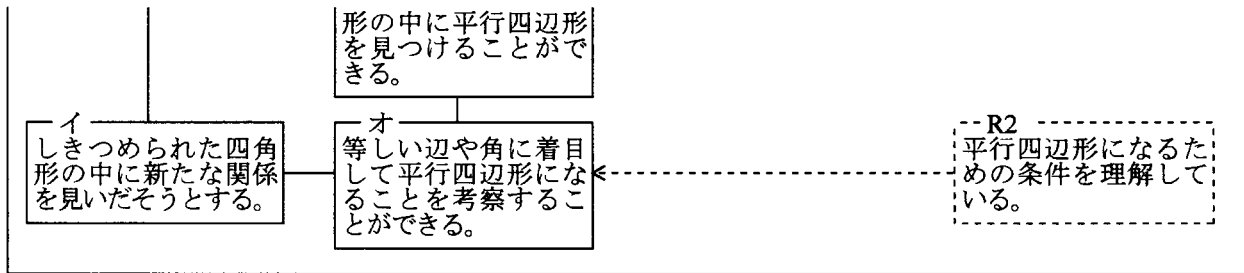
指導に当たっては、まず教師が数枚の長方形をしきつめて見せ、その後、配付した数枚の四角形を、今度は自分でしきつめることとする。ここでは、実際に四角形を手にとってずらしたり回転したりするなどの操作活動に取り組みさせることで、同じ長さの辺どうしを合わせればよいことや、なぜ四角形がしきつめられるのかと問うことで、4つの内角が一つの頂点に集まっていることに気づかせたい。次に、四角形の対辺の midpoint どうしを線分で結び再度しきつめる。囲まれた線分により平行四辺形が現れるが、なぜ平行四辺形になるのかを考察させることとする。線分が加わったことにより、先ほどの操作活動よりも見通しを持って図形を考察させることで、等しい辺や角に着目するなどして筋道を立てて説明したり、互いに意見を述べ合うことでその意見が適切であるかを判断したりする力を伸ばしたい。

このような活動を通して、数学的な考え方を進んで日常生活の中に見いだそうとする姿勢を培うとともに、探究心を持って学習に取り組み、数学のよさを実感できる生徒の育成を目指したい。

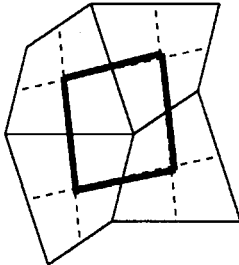
3 目標

- しきつめられた四角形の中に平行四辺形を見つけ、その四角形が平行四辺形になることを証明することができる。





4 過 程

目標	生徒の活動	教師の手だて・評価
	四角形をしきつめてみよう	
アカ	1 四角形をしきつめる。	1 教師のしきつめを見た後で、自分で四角形をしきつめさせる。しきつめるために工夫したをまとめさせておく。
R1ウ	2 なぜしきつめられるのか考察する。 — 予想される生徒の反応 — ・同じ長さの辺どうしを重ねたから。 ・四角形の内角の和は 360° だから。等	2 等しい長さの辺や四角形の内角の和がしきつめと関係していることに気づかせる。
	なぜ平行四辺形になるのか考えよう	
エ	3 四角形の対辺の中点どうしを線分で結び、再度、四角形をしきつめる。	3 中点どうしを結んだ四角形をしきつめていくと、結んだ線分により平行四辺形ができることを見つけさせる。
R2イオ	4 四角で囲んだ四角形がなぜ平行四辺形になるのかを証明する。 — 予想される生徒の反応 —  ・対辺が等しいことに着目 ・対角が等しいことに着目 ・対辺が平行であることに着目 等	4 一つ証明が完成したら、違う視点で平行四辺形になることを証明させる。 — 評価 — ・平行四辺形になることを証明することができたか。(ノート、発表) 考 ・平行四辺形になるための条件を確認し、図の中に等しい辺や角を見つけさせる。

2 授業研究会

(1) 授業者より

本時は、これまでの論証のまとめとしての1時間として位置づけたが、私たち数学科が目指している言語活動とはほど遠いものを感じた。しきつめを通して見いだした平行四辺形になることの証明において、なぜそうなるのかを自分の言葉でまとめたり、それを相手に分かりやすく説明したりすることが不十分であった。

(2) 参観者より

○教材について

「しきつめ」から平行四辺形になるという不思議さはとてもおもしろかった。だからこそもっと時間をかけて、「なぜ？平行四辺形になるの」を生徒に感じさせたかった。

○指導について

聞く姿勢、見る姿勢、伝える姿勢を大事にしたい。教師がしゃべりすぎるが多く、生徒がどれくらい聞こうとしているのか、どれくらい伝えたいと思っているのかを感じさせていない。平行四辺形になるということは生徒にとってとても驚きだったはず。言語活動を考えるのであれば、自分が考えたことを隣の生徒と互いに説明し合うとか、それを今度は教師に伝えるなどし向けることで、自分の理解度を確認できたのではないか。じっくり考えるためのその場面をしっかりと与えることが必要。

生徒の発言を生かそうとするならば、教師がすぐに助け船を出すのではなく、放っておくことも大事。生徒はそのもどかしさを自分の力でなんとかするだろうし、他の生徒が代わりに説明したいという状況も作り出すことになる。

4 まとめ

今年度は2回の研究授業を行ったが、まだまだ納得できる段階ではない。教科の研究主題に掲げた生徒の姿を実現させるために私たちが取り組まなければならないことは、数学特有の言語を適切に用いて課題を解決する学習概念を用いて説明したり、互いの考えを伝え合ったりする学習をとおして、

具体的事象を数学的にとらえ考察しようとする力

数学を用いて適切に判断する力

数学を用いて他者に説明する力

を身につけさせたいと考えている。

そのためにも、今年度は、言語活動が生かされる内容が図形の領域であると考え取り組んできたが、これを他の領域でも生かされるように、今後、教材や指導の研究が必要に感じた。