

ケーブルの三次元非線形振動

Nonlinear Vibrations of Saged Cable in Three Dimensions

高橋 和雄* ・村中 幸治**
永田 正美***

By Kazuo TAKAHASHI, Koji MURANAKA and Masami NAGATA

In this paper, nonlinear vibrations of saged cables in three dimensions are reported. This problem is analyzed by Galerkin method and the harmonic balance method.

Numerical results are presented for nonlinear coupled vibrations between inplane vibrations and out-of-plane vibration under out-of-plane forcing, and nonlinear inplane vibrations which contain out-of-plane vibration through bifurcation under inplane forcing.

1. 緒言

ケーブルはサグを有するために、ケーブルの幾何学的非線形性に基づく支配方程式は、面内振動と面外振動が連成する三次元運動方程式と与えられる¹⁾。したがって、この場合面内加振によって面内振動の他に面外振動が生じ、逆に、面外加振によって面外振動の他に面内振動が生ずることが予想される。これらの面内・面外連成非線形振動に関する研究は山口ら²⁾によって時間応答解析を用いて行われているが、広い振動数領域に及ぶ定量的な取扱いは未だ行われていない。そこで本論文は山口らによって誘導された連続体としての三次元非線形運動方程式を面内非線形振動を取扱った方法³⁾と同じ手法によって解析するものである。本論文では解法の展開ののち、面内加振による面内・面外非線形応答および面内加振による面内振動に伴う面外非線形分岐応答を明らかにするものである。

2. ケーブルの運動方程式

完全可撓性、伸張性を仮定したケーブルの三次元非線形運動方程式は次のように与えられる¹⁾。

$$L_1(u, v, w) = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial s_e} \left\{ \left(c_0 \frac{1}{x_e} + c_1 x_e'^2 \right) \frac{\partial u}{\partial s_e} + c_1 x_e' y_e' \frac{\partial v}{\partial s_e} \right\} - c_1^2 \frac{\partial}{\partial s_e} \left[\left(x_e' \frac{\partial u}{\partial s_e} + y_e' \frac{\partial v}{\partial s_e} \right) \frac{\partial u}{\partial s_e} + \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial s_e} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial s_e} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial s_e} \right)^2 \right\} \left(x_e' + \frac{\partial u}{\partial s_e} \right) \right] - \frac{p_x \cos \Omega t}{\rho_0} = 0 \quad (1)$$

$$L_2(u, v, w) = \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial s_e} \left\{ \left(c_0 \frac{1}{x_e} + c_1 y_e'^2 \right) \frac{\partial v}{\partial s_e} + c_1 x_e' y_e' \frac{\partial u}{\partial s_e} \right\} - c_1^2 \frac{\partial}{\partial s_e} \left[\left(x_e' \frac{\partial u}{\partial s_e} + y_e' \frac{\partial v}{\partial s_e} \right) \frac{\partial v}{\partial s_e} + \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial s_e} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial s_e} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial s_e} \right)^2 \right\} \left(y_e' + \frac{\partial v}{\partial s_e} \right) \right] - \frac{p_y \cos \Omega t}{\rho_0} = 0 \quad (2)$$

$$L_3(u, v, w) = \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial s_e} \left(c_0 \frac{1}{x_e} \frac{\partial w}{\partial s_e} \right) - c_1^2 \frac{\partial}{\partial s_e} \left[\left(x_e' \frac{\partial u}{\partial s_e} + y_e' \frac{\partial v}{\partial s_e} \right) \frac{\partial w}{\partial s_e} + \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial s_e} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial s_e} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial s_e} \right)^2 \right\} \left(\frac{\partial w}{\partial s_e} \right) \right] - \frac{p_z \cos \Omega t}{\rho_0} = 0 \quad (3)$$

昭和56年4月28日受理

* 土木工学科
** 長崎県庁
*** 土木工学科

ここに、 u, v : ケーブルの面内水平および鉛直変位,
 w : ケーブルの面外変位, t : 時間, s_e : ケーブルの
 初期形状に沿う曲線座標, $c_0 = \sqrt{H_0/\rho_0}$: ケーブルの
 横波伝播速度, H_0 : ケーブルの初期水平張力, ρ_0 :
 ケーブルの単位長さ当りの質量, $c_1 = \sqrt{EA/\rho_0}$: ケー
 ブルの縦波伝播速度, E : ヤング率, A : 断面積,
 p_x, p_y, p_z : 荷重強度, Ω : 荷重の円振動数, x'_e, y'_e
 : 初期形状の s_e による常微分を示す。

3. 応答の分類

式(1)のおよび(2)がケーブルの面内振動を, 式(3)が
 ケーブルの面外振動を表わす運動方程式である。非線
 形項を介してすべての変位成分が連成している。

式(1), (2)および(3)に対して面内加振および面外加振
 の各場合の応答の分類を示せば, Fig.1のとおりであ
 る。

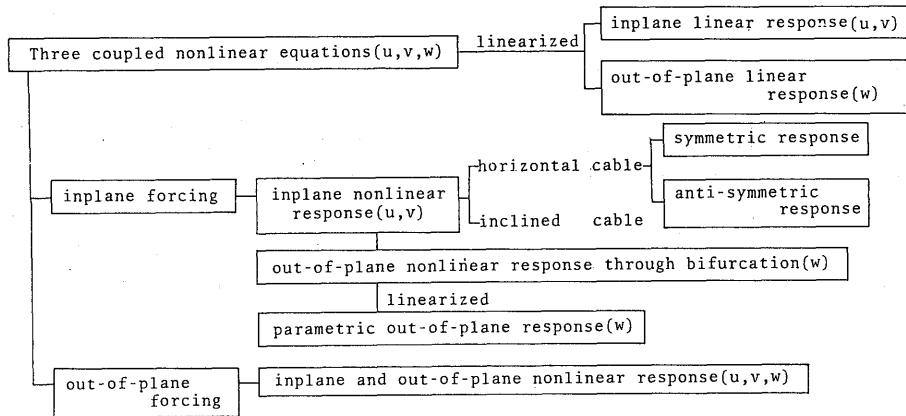


Fig.1 Classifications of nonlinear responses of cable

図のように線形振動の場合には面内応答と面外応答は
 完全に分離されることが知られているが²⁾, 非線形振
 動の場合には完全に分離することが不可能である。

面内加振の場合 ($p_x \neq 0, p_y \neq 0, p_z = 0$) に
 は面内応答 u, v が常に生ずるが, 面外の運動方程式の
 係数項に面内変位 u, v の項が含まれるために, 式(3)は
 係数励振振動形の運動方程式となっている。したがっ
 て, 特定の加振振動数の領域で面外振動が生ずること
 が予想される。この問題は面内加振による面外非線形
 分岐応答として解析すれば, 面外振動が生ずる分岐点
 と分岐後の応答を明らかにすることができる。式(3)の
 面外の非線形運動方程式の非線形項 $(\partial w / \partial s_e)^2$ を無視
 すれば, 線形の係数励振振動の運動方程式がえられる。
 この運動方程式の不安定領域を求めれば, 面外振動が
 生ずる振動数領域がえられる。

これに対して面外加振の場合 ($p_x = p_y = 0, p_z$
 $\neq 0$) には面内の運動方程式の非線形項に面外変位の
 0 次の項, すなわち $(\partial w / \partial s_e)^2 x'_e$ および $(\partial w / \partial s_e)^2 y'_e$

の項がそれぞれ単独項として含まれるから, これらの
 項が面内の運動方程式に付加荷重として作用する。面
 外変位 w が $a \cos \Omega t$ で与えられると, 2 倍角の公式
 $w^2 = a^2 (\cos 2\Omega t + 1) / 2$ から明らかなように面外の 2
 倍の加振振動数をもつ動的付加荷重と静的付加荷重が
 作用するために, 面内変位が付随するいわゆる面内・
 面外非線形連成応答がえられる。

4. 解法

(1) Galerkin 法による時間に関する非線形連立常微分
 方程式の誘導

式(1), (2)および(3)の解を直接求めることは不可能で
 あるから, これらを Galerkin 法を用いて基準座標に関
 する多自由度系の運動方程式に変換する解法を採用す
 る。

$$\begin{aligned} u &= \ell \sum_{k=1}^{\infty} P_k(t) U_k(s_e) \\ v &= \ell \sum_{k=1}^{\infty} P_k(t) V_k(s_e) \\ w &= \ell \sum_{k=1}^{\infty} Q_k(t) W_k(s_e) \end{aligned} \tag{4}$$

ここに、 P_i, Q_i : 未知の時間関数、 l : ケーブルの
支点間水平距離

$$\left. \begin{aligned} U_i(s_e) &= \sum_{m=1}^{\infty} P_{xi}^m \sin \frac{m\pi s_e}{l^*} \\ V_i(s_e) &= \sum_{m=1}^{\infty} P_{yi}^m \sin \frac{m\pi s_e}{l^*} \\ W_i(s_e) &= \sum_{m=1}^{\infty} P_{zi}^m \sin \frac{m\pi s_e}{l^*} \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{面内線形振動の第 } i \text{ 次} \\ \text{固有振動形} \\ \text{面外線形振動の第 } i \text{ 次} \\ \text{固有振動形} \end{array}$$

l^* : 初期ケーブル長

式(4)を式(1), (2)および(3)に代入して, Galerkin法を適用すれば P_i, Q_i に対する次の連立非線形常微分方程式群がえられる。

$$\begin{aligned} m_n^I \ddot{P}_n + k_n^I P_n + k^2 \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} k_{jl}^{In} P_j P_l + \frac{1}{2} k^2 \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} k_{qp}^{In} Q_q Q_p \\ + \frac{1}{2} k^2 \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} k_{jqm}^{In} P_j P_l P_m \\ + \frac{1}{2} k^2 \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{r=1}^{\infty} k_{oqr}^{In} P_o Q_q Q_r = 8\gamma^I f_n^I \cos \omega \tau \\ m_n^O \ddot{Q}_n + k_n^O Q_n + k^2 \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} k_{pl}^{On} Q_p P_l + \frac{1}{2} k^2 \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} k_{plm}^{On} Q_p P_l P_m \\ + \frac{1}{2} k^2 \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{r=1}^{\infty} k_{pqr}^{On} Q_p Q_q Q_l = 8\gamma^O f_n^O \cos \omega \tau \end{aligned} \quad (5)$$

ここに、 $k=c_1/c_0$: ケーブルの縦波-横波伝播速度比、 $\gamma^* = \rho_0 g l / 8H$: ケーブルの初期形状を放物線で近似した場合のサグ比、 g : 重力の加速度、 $m_n^I, k_n^I, k_{ijl}^I, k_{qp}^{In}, \dots, m_n^O, \dots, f_n^O$: Galerkin法による積分項で、初期形状と面内・面外の固有振動形からなる定数, suffix Iは面内を、また, suffix Oは面外を表わす。
 $n=1, 2, \dots$

上式において、時間関数 P_n, Q_n についてはケー

ブルのサグ比 $\gamma = l/\ell$ と同様にケーブルの支点間水平距離 ℓ で無次元化されている。また、時間については傾斜した弦(サグ比 $\gamma = 0$ の場合)の1次の固有円振動数 ω_1 の逆数 $\ell/(\pi c_0 \sqrt{\cos \theta})$ で無次元化されている。また、 ω は加振円振動数 Ω を ω_1 で無次元化したものである。

なお、ケーブルの非線形振動を支配するパラメーターは線形振動の場合と同じ形状パラメーターとしてのサグ比 γ 、傾斜角 θ および材料パラメーターとしての縦波-横波伝播速度比 k の3個である¹⁾。

(2)調和バランス法による連立非線形常微分方程式の解法³⁾

連立非線形常微分方程式を解くにあたっては非線形項が大きくなってでも有効性を失わず、かつ収束の良好な調和バランス法を適用する。式(5)の非線形項に2次および3次の非線形項が含まれるために、 P_n, Q_n の解を次のように仮定する³⁾。

$$\begin{aligned} P_n &= \sum_{e=0}^{\infty} a_e^n \cos e\omega\tau \\ Q_n &= \sum_{e=0}^{\infty} b_e^n \cos e\omega\tau \end{aligned} \quad (6)$$

ここに、 a_e^n, b_e^n : 未定々数

式(6)を式(5)に代入して係数比較(調和バランス法)を行えば、 a_e^n, b_e^n を求めるための連立非線形代数方程式がえられる。

$$\begin{aligned} (k_n^I - m_n^I e^2 \omega^2) a_n^I + k^2 \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} k_{jl}^{In} f_{jl}^I + \frac{1}{2} k^2 \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} k_{qp}^{In} f_{qp}^I \\ + \frac{1}{2} k^2 \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} k_{jqm}^{In} f_{jqm}^I \\ + \frac{1}{2} k^2 \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{r=1}^{\infty} k_{oqr}^{In} f_{oqr}^I = 8\gamma^I f_n^I \delta_{e1} \end{aligned}$$

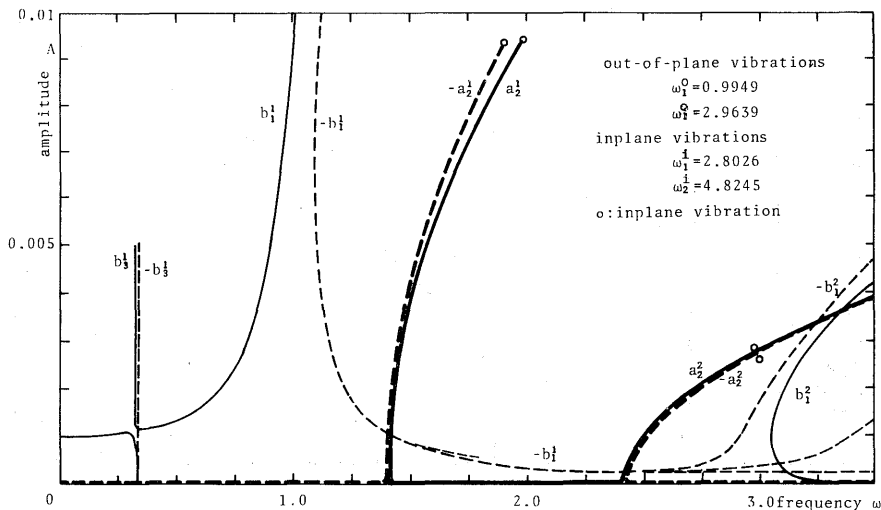


Fig. 2 Amplitude vs frequency for cables with $\gamma=0.1, k=30$ and $\theta=0^\circ$ under out-of-plane forcing

$$(k_n^0 - m_n^0 e^2 \omega^2) b_e^n + k^2 \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} k_{pnl}^0 f_{pl}^e + \frac{1}{2} k^2 \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} k_{plm}^{0n} f_{plm}^e + \frac{1}{2} k^2 \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{r=1}^{\infty} k_{pqr}^{0n} f_{pqr}^e = 8\gamma^* f_n^0 \delta_{e1} \quad (7)$$

ここに、 $e = 0, 1, 2, \dots$ $\delta_{e1} = \begin{cases} 1 & e=1 \\ 0 & e \neq 1 \end{cases}$

$$f_{jl}^e, f_{qp}^e, f_{jlm}^e, \dots, f_{pqr}^e; a_l^i, a_l^j$$

などの関数

本研究の解の決定方程式(7)は連立非線形偏微分方程式(1),(2)および(3)の定常解を空間には基準関数(式(4)), 時間にはFourier級数(式(6))を用いてFourierの展開

係数に関する連立非線形代数方程式としてえられちものである。これを適当な初期値のもとにNewton-Raphson法の繰り返し計算を用いて数値解析すれば、必要な実根を求めることができる。

5. 面外加振による面内・面外非線形連成応答

3. の応答の分類で述べたように面外加振によって面内・面外非線形連成応答が生ずる。ケーブルは面外方向にサブを持たないので、ケーブルの面外の運動方

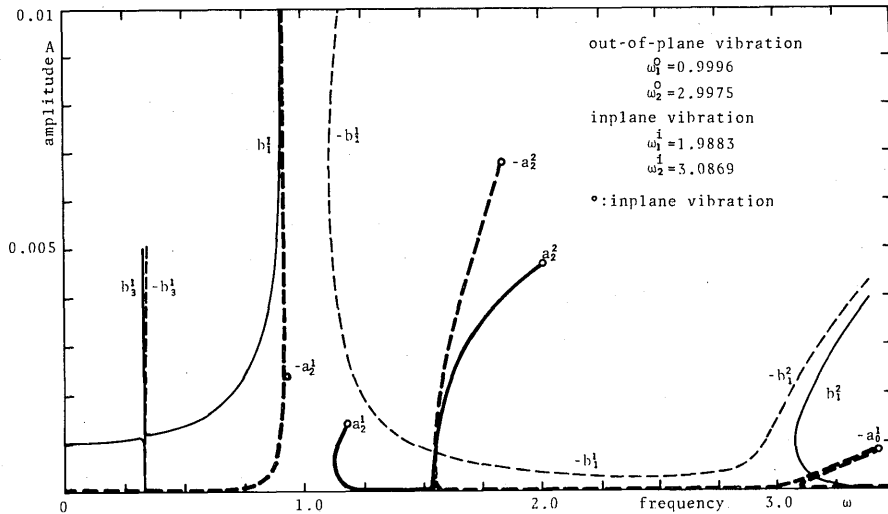


Fig. 3 Amplitude vs frequency for cables with $\gamma=0.026, k=30$ and $\theta=0^\circ$ under out-of-plane forcing

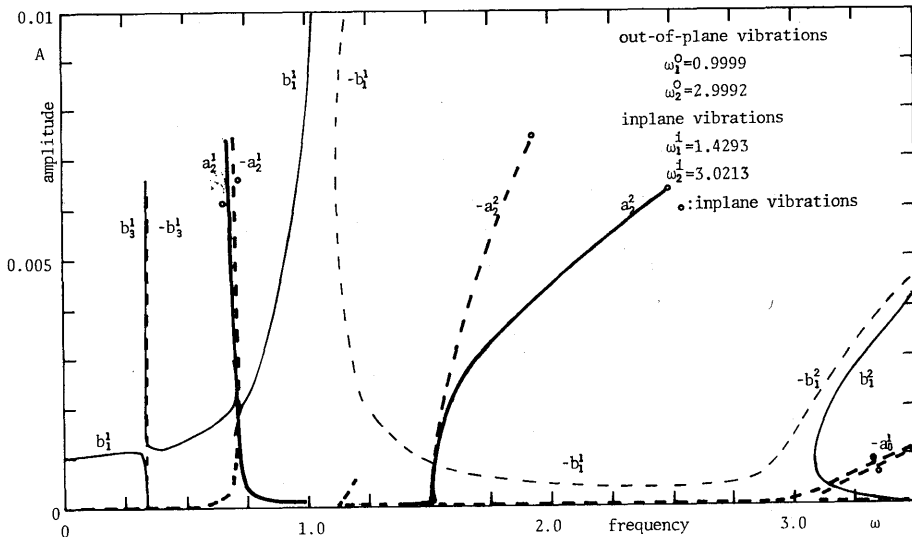


Fig. 4 Amplitude vs frequency for cables with $\gamma=0.05, k=30$ and $\theta=0^\circ$ under out-of-plane forcing

程式に面外変位 w に関して2次の非線形項が含まれない。これより面外加振による面外非線形応答は、弦と同様に3次の非線形項のみが効いているので、面外振動はケーブルの初期状態の面をはさんで対称に生ずる。したがって、面外非線形応答については主共振と3倍の高調波共振が生ずる($b_0^e = 0, b_1^e \neq 0, b_2^e = 0, b_3^e = 0$)。

一方、面内の運動方程式の中に $(\partial w / \partial s_e)^2$ の項が存在するので、これによって付加静的荷重と加振振動数の2倍の高調波振動数を持つ付加的荷重による応答が生ずる($a_0^i \neq 0, a_1^i = 0, a_2^i \neq 0, a_3^i = 0$)。Fig.2,3,4はケーブルの面内および面外の自由度数をそれぞれ2個採用した場合の水平ケーブル($k=30, \theta=0^\circ$)の $\gamma=0.1, 0.026$ および 0.015 の等分布周期荷重(荷重強度 $p=0.0063, 0.192, 0.583$)に対する面内・面外非線形連成応答をそれぞれ示したものである。

図中において、細い方の実線は荷重の時間関数と同位相のケーブル中央点の面外応答を、また、点線は逆位相の面外応答をそれぞれ示すものである。また、○印を付した肉太の実線と点線は面外振動に付随する面内応答の同位相と逆位相のケーブル中央点の応答をそれぞれ示すものである。

これらの図において、ケーブル面外非線形応答の主共振(b_1^e, b_1^e)は $\omega=1.0$ および 3.0 付近で生じている。 $\omega=0.33$ の付近では面外1次振の3倍の高調波共振 b_3^e が生じている。図より明らかなように面外1次振動の振動数比と振幅比との関係は弱い硬化バネ特性を有する。

一方、面内方向には、面外対称非線形応答によって面

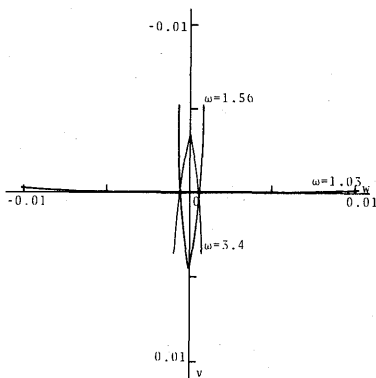


Fig. 5 Lissajous figure at the center of cable with $\gamma=0.1, k=30$ and $\theta=0^\circ$ under out-of-plane forcing

内対称振動形のみが加振され、逆対称振動は加振されない。面内応答は必ず連成するが、共振点近傍を除いては応答振幅は一般に小さい。Fig.2のサグ比 $\gamma=0.1$ の場合には加振振動数比 $\omega=1.4$ および 2.4 付近で面内対称1次および2次の2倍の高調波共振が生じている。これらの振動数領域においては面外応答の振幅が小さいために、面内方向の加振力は小さく、面内応答が生ずる振動数の幅はきわめて狭い。Fig.5に各共振時のケーブル中央点のリサージュ図をプロットしたが、面内・面外非線形応答の連成は小さく、面外もしくは面内の応答がそれぞれほぼ単独に生じている。

サグ比 $\gamma=0.026$ の場合はいわゆる面内の対称および逆対称振動数が交差するcross-over-pointにあたり、しかも面内の対称1次固有振動数 $\omega_1^i = 1.9883$ が面外の対称1次固有振動数 $\omega_1^e = 0.9996$ の2倍に相当する場合である¹⁾。すなわち、面内・面外非線形応答の共振振動数が一致する場合である。したがって、面外振動によって面内の固有振動数の近傍に大きな付加加振力が作用する。このために、面内1次振動の共振 a_2^i が生ずる振動数の幅は広がっている。この結果はすでに山口らによっても指摘されているとおりである²⁾。また、 $\omega=3.0$ 付近では面外2次振動の主共振によって面外1次の固有振動形と同じたわみ形を持つ静的応答が生じている。Fig.6に $\gamma=0.026$ の場合のリサージュ図を描いたが、 $\omega=1.0$ 付近の面内・面外非線形連成応答は面内・面外とも変位が大きいことがわかる。また、 $\omega=3.4$ 付近ではケーブルは静的変位を生じながら、面外振動をしている。また、Fig.7は面内・面外非線形連成応答のケーブル中央点の時間的変動を示したものである。面内応答の振動数は面外応答のその2倍である。

なお、Fig.4サグ比がcross-over-pointより小さい領

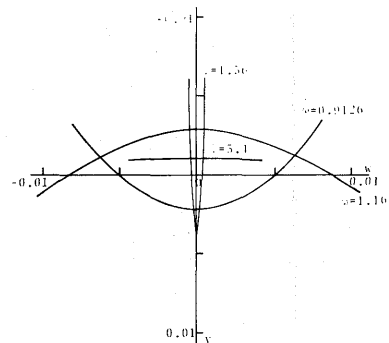


Fig. 6 Lissajous figure at the center of cable with $\gamma=0.026, k=30$ and $\theta=0^\circ$ under out-of-plane forcing

域では面内応答が面外の固有振動数 $\omega = 1.0$ より左にずれるので面内振動の荷重と同位相の振幅が大きくなる。

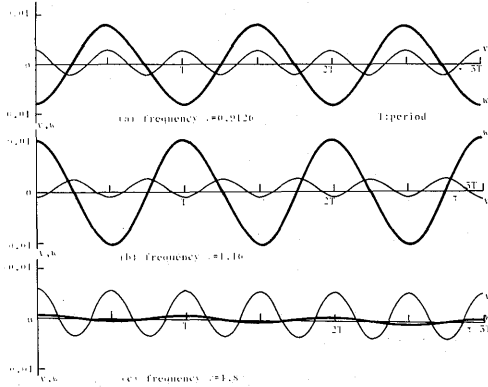


Fig. 7 Time histories at the center of cable with $\gamma=0.026$, $k=30$ and $\theta=0^\circ$ under out-of-plane forcing

6. 面内加振による面外非線形分岐応答

Fig.1に示したように、面内加振によって面内非線形応答が常に生ずるが、面内変位の項が面外の運動方程式の係数項に含まれるので、面外非線形分岐応答が生ずる。この問題は5. の面内・面外非線形連成応答用のプログラムを用いてそのまま解析することができる。すなわち、先ず面外応答の初期値をゼロとおいて、面内非線形応答のみを求める。次いで、面外非線形分岐応答が生ずる可能性がある振動数の領域で、面外の振幅成分にゼロ以外の初期値を設定して連立非線形代

数方程式を解けば面外分岐応答と分岐後の面内応答を明らかにすることができる。

Fig.8はサグ比 $\gamma=0.1$ の場合の中央点集中载荷 ($p=0.025$) による面内非線形応答と面外非線形分岐応答を示したものである。

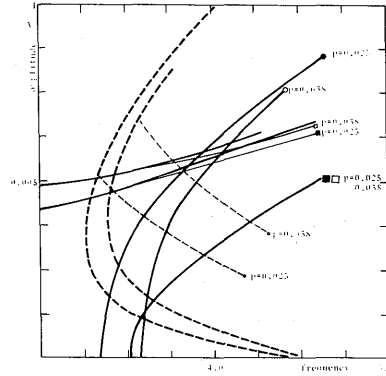


Fig. 8 Amplitude vs frequency for cables with $\gamma=0.1, k=30$ and $\theta=0^\circ$ under inplane forcing

図中において大きい方の○印を付した肉太の実線が面外分岐応答に、小さい方の○印を付した細い実線が面外非線形分岐応答に伴う面内応答にそれぞれ対応するものである。また、○印のない応答は分岐がない場合の面内非線形応答のみを示すものである。

図において、面外1次振動の固有振動数 $\omega_1^0 = 0.9949$ の1倍 ($\omega \doteq 1.0$) および1/2倍 ($\omega \doteq 0.5$) に

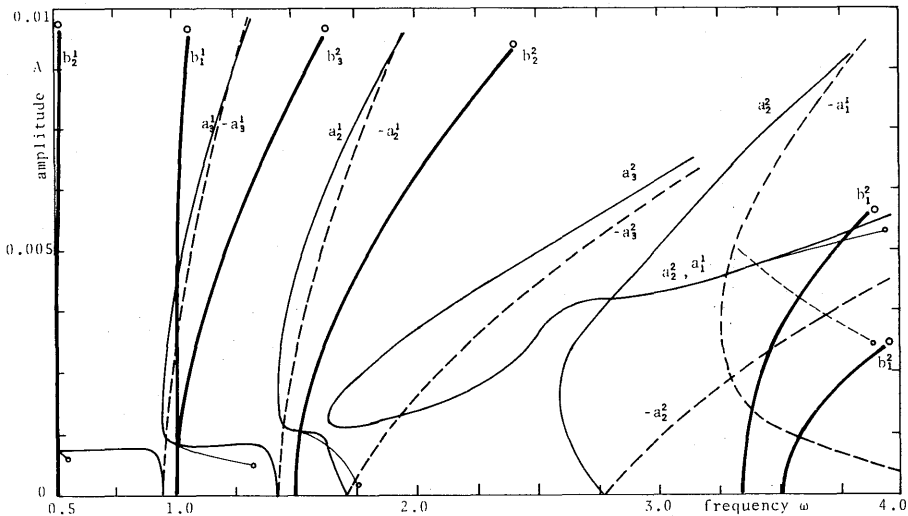


Fig. 9 Amplitude vs frequency for cables with $\gamma=0.1, k=30$ and $\theta=0^\circ$ under inplane forcing

において面外1次振動形を持った分岐応答が生じている。また、面外2次振動の固有振動数 $\omega_2^0 = 2.9639$ の1/2倍($\omega \approx 1.5$)および1/3倍($\omega \approx 1.0$)付近において、面外2次振動の振動形を持った応答が生じている。面外の2次固有振動数 $\omega_2^0 = 2.9639$ 付近に生ずるはずの面外の2次振動の分岐点は $\omega = 3.0$ よりもかなり高い加振振動数の領域で生じている。分岐応答が生ずる振動数領域で複数個の面内応答が存在する場合には、複数個の分岐応答が生じている。

次にFig.9は振動数 $\omega = 3.5$ 付近の分岐応答を荷重強度を変化させて分岐応答を求めたものである。荷重強度によって面内応答の振幅が異なるために、面内応答の振幅が大きい領域で生じた分岐応答は高い加振振動数の領域にずれて生ずる。これより、 $\omega = 3.0$ 付近の振動数の領域では面内非線形応答の振幅が大きいため、面内応答によって面外の剛性が增大することによるものと考えられる。

なお、計算結果より、面外非線形分岐応答の位相は面内応答のそれと 0° または 180° であることが判明した。したがって、面外分岐応答は面外非線形自由振動が生じていることと同じであることが予想される。

次に、面外非線形分岐応答が生じた後の面内非線形応答に注目すれば、面内応答の振幅は通常の内面応答のそれよりも小さい。この原因は面内振動のエネルギーが面外振動のエネルギーに移行することによるものと考えられる。

以上のように面外非線形分岐応答解析によって、面

外非線形分岐応答解析によって、面外分岐応答が生ずる分岐点と分岐後の応答を明らかにすることができる。

一方、面外振動の非線形項を無視した自由振動の運動方程式

$$L_3(u, v, w) = \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial s_e} \left(c_0^2 \frac{1}{x_e} \frac{\partial w}{\partial s_e} \right) - \frac{\partial}{\partial s_e} \left\{ \left(x_e' \frac{\partial u}{\partial s_e} + y_e' \frac{\partial v}{\partial s_e} \right) \frac{\partial w}{\partial s_e} + \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial s_e} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial s_e} \right)^2 \right\} \frac{\partial w}{\partial s_e} \right\} = 0 \quad (8)$$

を取扱えば、線形の係数励振振動問題として取扱うことができる。この場合には式(6)の第1式を式(4)の第1、2式に代入した面内非線形応答 u, v を上式に代入した運動方程式の一般解を式(4)の第3式のように仮定すれば次の連立のHillの方程式がえられる。

$$[A_1] \{ \ddot{Q} \} + ([A_1] + k^2 [D_p^0]) \{ Q \} + k^2 [D_p^1] \cos \omega \tau + [D_p^2] \cos 2\omega \tau + [D_p^3] \cos 3\omega \tau \{ Q \} = \{ 0 \} \quad (9)$$

ここに、 $[A_1]$ 、 $[A_K]$ 、 $[D_p^0]$ 、 $[D_p^1]$ 、 $[D_p^2]$ 、 $[D_p^3]$ ：面内振動および面外振動の係数からなる係数行列

上式の解を次のように仮定する⁹⁾。

$$\{ Q \} = e^{i\lambda \tau} \left[\frac{1}{2} \{ b^0 \} + \{ a_m \} \cos m\omega \tau + \{ b_m \} \cos m\omega \tau \right] \quad (10)$$

ここに、 λ ：未定々数、 $\{ a_m \}$ 、 $\{ b_m \}$ ($m=0, 1, 2$) $\{ a_0 \} = 0$ ：Fourier係数ベクトル

式(10)を式(9)に代入して調和バランス法を適用すれば、次のような同次方程式がえられる。

$$([M_0] - \lambda [M_1] - \lambda^2 [M_2]) X = \{ 0 \} \quad (11)$$

ここに、 $[M_0]$ 、 $[M_1]$ 、 $[M_2]$ ： λ の0、1、2

Table 1 Unstable frequency ranges of out-of-plane vibrations for cables with $\gamma=0.1$, $k=30$ and $\theta=0^\circ$ under inplane forcing

mode No.	order of unstable region	load intensity p	frequency range	amplitude A
first	principal	0.038	$0.9968 < \omega < 1.006$	0.00135
		0.043	$0.9976 < \omega < 1.003$	0.00158
	second	0.10	$0.5069 < \omega < 0.5071$	0.00277
		0.125	$0.5112 < \omega < 0.5115$	0.00327
		0.15	$0.5159 < \omega < 0.5163$	0.00370
second	principal	0.025	$3.500 < \omega$	0.00480
		0.038	$3.507 < \omega$	0.00525
		0.025	$3.344 < \omega$	- 0.00526
	0.038	$3.577 < \omega$	- 0.00677	
	second	0.025	$3.120 < \omega$	0.00559
		0.038	$3.152 < \omega$	0.00608
third	0.025	$1.4881 < \omega < 1.4883$	0.00127	
	0.038	$1.4953 < \omega < 1.4960$	0.00203	
	0.038	$0.9958 < \omega < 0.9964$	0.00159	

次の係数行列

式(11)の固有値 λ を求めれば、解の安定性を直接確かめることができる。サグ比 $\gamma=0.1$ の場合の不安定領域を求めれば、Table 1に示すとおりである。面外1次および2次振動の第1, 第2および第3不安定領域がえられる。

これらの不安定領域はFig.9の分岐応答が生ずる振動数と一致する。線形としての取扱いでは分岐振動が生ずる振動数のみがいられ、分岐後の応答は明らかにされないことがわかる。

7. 結 語

本論文はケーブルの三次元非線形振動を多自由度系の非線形振動に変換して調和バランス法を用いて解析したものである。えられた結果を要約すると

- 1) 面外加振によるケーブルの面内・面外非線形連成応答解析結果より次のことが明らかになった。面外加振によって面外応答の2倍の振動数を持つ付加動的荷重と付加静的荷重が面内方向に作用するために、面内にはこれらの荷重による応答が連成して生ずる。面内振動と面外振動の固有振動数の比が2:1のときに両者の間に強い連成応答が生ずる。(このことは山口らの研究によって知られている²⁾)。また、面外非線形振動の振動数と振幅との関係は弱い硬化バネ特性をもつ。
- 2) 面内加振によって、ケーブルの三次元構造特性から

特定の振動数の領域で面外応答が生ずる面外非線形分岐応答と分岐後の面内応答がえられた。面外分岐応答は面外の固有振動数の整数分の1の近傍で生ずるが、面内応答によって面外剛性が増加するために、面内応答が大きいくところでは分岐応答が固有振動数からずれてくる。面外分岐応答を非線形項を無視した係数励振振動問題として取扱えば、分岐応答が生ずる不安定領域のみがえられる。

最後に、本研究の数値計算には九州大学大型計算機センターのFACOM M-200を使用したことを付記する。

参考文献

- 1) 山口・伊藤：単一ケーブルの三次元線形自由振動，土木学会論文報告集，第286号，1979，pp.29~36
- 2) 山口・宮田・伊藤：幾何学的非線形性に基づくケーブルの面内・面外連成運動，第35回土木学会年次学術講演会講演概要集，第I部，昭和55年，pp.347~348
- 3) 高橋・藤本・戸田：ケーブルの面内非線形振動，長崎大学工学部研究報告第17号，昭和56年7月
- 4) 高橋・河原・山辺：はりおよび薄板の非線形振動のGalerkin法による解の収束性および安定性について，土木学会論文報告集，第293号，1980，pp.9~22