

流体の回転運動と非回転運動

松原 茂*・武政 剛弘*
薦田 広章*

Rotational and Irrotational Motions of the Fluid

by

Shigeru MATSUBARA

(Civil Engineering)

Takehiro TAKEMASA

(Civil Engineering)

Hiroaki KOMODA

(Civil Engineering)

The fluid deformation due to changes in relative configuration of the particles of the fluid is very complicated.

A sphere of unit radius in the unformed state is transformed into the strain ellipsoid by the deformation.

It is found that in general there is only set of three mutually perpendicular directions in the unstrained state (the principal axes of strain) which remain mutually perpendicular after straining.

If the initial and final positions of this set are the same, the fluid is irrotational; if not, they can be made to coincide by a finite rotation about some axes.

The fluid deformation can be expressed as combinations of a pure strain (which is specified by the shape of the strain ellipsoid) and the rotation which brings the principal axes of strain from their initial to their final positions.

In this paper we will throw light on these physical meanings about free and forced vortex in the combined vortex flow.

And then we will consider the contrast between Airy and trochoidal waves from the viewpoint of the rotation.

[1] まえがき

流体の運動は回転する運動と回転しない運動の二つに分類することができる。そしてそれに基づいてそれぞれの理論が展開されている。しかしながら従来流体の運動については運動している流体の微小素片を微視

的にみると、その内部の微粒子間に相対的速度差があるためにその素片は全体的な移動と同時に変形と回転をともなっていると説明されている。しかもこの変形と回転をひずみテンソルと回転ベクトルで表示し、各々の成分を別個に取り出してそれぞれについての幾

昭和56年4月28日受理

*長崎大学工学部土木工学科

何学的な意義を説明している。回転についてはひずみ成分をすべて零として、微小素片が剛体のように回転して回転の際には微小素片に変形は少しもおこらないと述べている。しかし実際の流体は運動にともない時々刻々変形しているため、流体の回転といっても流体のどの部分が剛体のような回転をしていると定義できるのか曖昧である。従って流体の回転は固体の回転のように判り易いものでない。そこで筆者らはこの問題をより判り易くするために流体力学的によく知られた複合渦を例に取り上げ、回転に対してひずみ楕円による微小部分の一次変位の立場からの議論を進めた。これを複合渦における強制渦と自由渦運動に適用し、その物理的内容を明らかにすることを試みた。さらに進んで無渦深海波と渦度が存在するトロコイド波にこの理論を適用し、具体的な数値を与え回転、非回転の区別を明らかにした。

[2] 流体の変形

二次元流について考察を進める。流体内の一点 $P(x, y)$ における微小実質部分の速度成分を (u, v) とする。つまり単位時間の変位量でここでは単位時間を乗じており変位の次元をもつ。点 P に極めて近い他の任意の点 $Q(x+dx, y+dy)$ における微小実質部分の速度を $(u+du, v+dv)$ とする。 dx, dy を一次の微小量として二次の微小量を捨てた無限小変位を考えると、次式が得られると一般の教科書では記載されている。

$$\left. \begin{aligned} du &= \varepsilon_x dx + \frac{1}{2} \gamma_{xy} dy - \omega dy \\ dv &= \frac{1}{2} \gamma_{xy} dx + \varepsilon_y dy + \omega dx \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1)$$

$$\text{ここに } \left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} & \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2)$$

$$\omega = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \dots\dots\dots (3)$$

とされている。そして(1)の各項の意味を説明するに当たり、(2)において ε は伸縮の変形、 γ はせん断変形として物体の変形に関与し、(3)は剛体として全体が反時計方向に回転したものであると結んでいる。これでは(1)が全体としてどのような変形を示しているかは明確になる筈もない。それはさておきここで問題にしている流体微小部分の回転速度 ω が(3)で表現され(1)の中で変形に陽に関係している。そこで(3)の意味を考えてみる。Fig1に示すように Q 点の P 点に対する相対的な単位時間における変形を考える時、 P 点のまわりの Q 点の回転速度は相対的変位量 du, dv を PQ に垂直な方向に投影した量を $PQ = r$ で割った値として定義される。

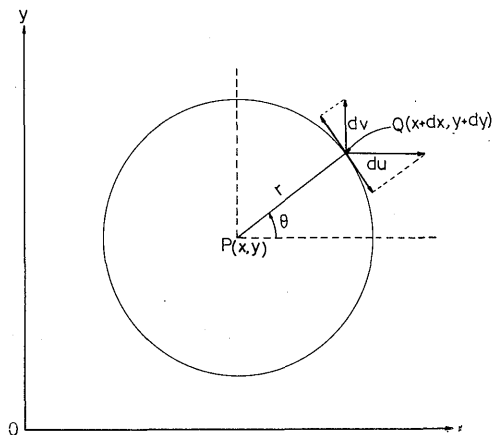


Fig.1 A circle of neighboring particles.

すなわち反時計回りを正として極座標をとると、 $dx = r \cos \theta$, $dy = r \sin \theta$ とおけるので P 点のまわりの Q 点の回転速度 ω は次式となる。

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{1}{r} (-du \sin \theta + dv \cos \theta) \\ &= \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) \cos^2 \theta - \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) \sin^2 \theta \\ &\quad + \left(\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x} \right) \sin \theta \cos \theta \dots\dots\dots (4) \end{aligned}$$

この ω の値は角度 θ に従属しているので θ による平均を考える。そして $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial y}$ の個々の値は P 点に対して評価される値ゆえ積分においては一定として取り扱うことが出来る。ゆえに P 点のまわりのすべての PQ の回転速度の平均 $\bar{\omega}$ は

$$\begin{aligned} \bar{\omega} &= \frac{1}{2\pi} \left\{ \frac{\partial v}{\partial x} \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta - \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta d\theta \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x} \right) \int_0^{2\pi} \sin \theta \cos \theta d\theta \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \dots\dots\dots (5) \end{aligned}$$

で示される。(4)で θ と $\theta + \frac{\pi}{2}$ (一般の教科書では $\theta = 0$ と $\theta = \frac{\pi}{2}$) の値を入れて平均値をとると、とりも直さず(5)の値が得られる。つまり二次元の場合直交する2軸の回転の値の平均値は不変量の如き観を呈している。そこで見方を変えてこの直交する2軸に注目して議論を展開してみる。いま前述の(1)の表示を形を変えて次のように表現する。

$$\left. \begin{aligned} du + dx &= \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right) dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy \\ dv + dy &= \frac{\partial v}{\partial x} dx + \left(1 + \frac{\partial v}{\partial y} \right) dy \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (6)$$

ここに新たに

$$\left. \begin{aligned} dx=x, \quad dy=y, \quad du+dx=x', \quad dv+dy=y' \\ 1+\frac{\partial u}{\partial x}=m, \quad \frac{\partial u}{\partial y}=n, \quad \frac{\partial v}{\partial x}=p, \\ 1+\frac{\partial v}{\partial y}=q \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

とおくと(6)は次式となる

$$\left. \begin{aligned} x' &= mx + ny \\ y' &= px + qy \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (8)$$

(8)はP(x,y)点を原点P(0,0)と考えてこの点に対してごく近傍の点Q(x,y)が単位時間に原点に相対的な変位をうけ点Q'(x',y')に移ることを示している。この変形は原点を通る互に直角に交わる特殊な二直線に特徴づけられる。この直交する二直線は変形をうけた後においても互に直角に交わっているという特性をもち主軸と呼ばれる。そして変形は第一段階として座標原点を中心とする単純な回転により上述の直交二直線を新方向に持ち来らし、第二段階として回転した直交二直線の方法を変えない一種の一次変状であると考えられる。この第二段階の変状を互に直角な二方向への伸張と名付ける。

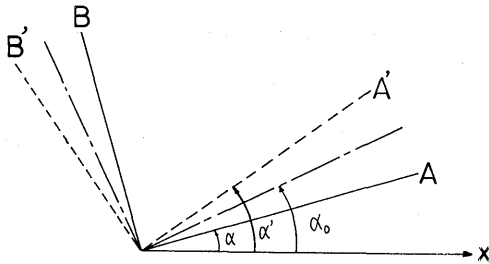


Fig.2 Directions of the initial and final principal axes of strain.

いまFig.2に示すように初めの主軸と変形をうけて回転した主軸、つまり後の主軸の方向のx軸となす角をそれぞれ α, α' とすると

$$\tan(\alpha' + \alpha) = (p+n)/(m-q) \dots\dots\dots (9)$$

$$\tan(\alpha' - \alpha) = (p-n)/(m+q) \dots\dots\dots (10)$$

で与えられる。そこで流体の回転とは変形前の主軸の方向 α が変形後の主軸の方向 α' に向きをかえる時(10)で与えられる角 $(\alpha' - \alpha)$ の値に与えられた名称であると定義できる。以上述べた変形の際、原点を中心とする単位円は長軸A、短軸Bの長さのひずみ楕円に変形する。一次変状をうけて単位円になるものは相反ひずみ楕円とよばれ、その長軸は $1/B$ 、短軸は $1/A$ の長さである。このA、Bは次式より求められる。

$$\left. \begin{aligned} (A+B)^2 &= (m+q)^2 + (n-p)^2 \\ (A-B)^2 &= (m-q)^2 + (n+p)^2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (11)$$

(9), (10)より求められた α' 、 α がひずみ楕円、相反ひずみ楕円の長軸に対するものか短軸に対するものかは次式で決定される。

$$\tan \alpha' = \frac{\frac{mp+nq}{h^4}}{\frac{m^2+n^2}{h^4} - \frac{1}{R^2}} = \frac{\frac{p^2+q^2}{h^4} - \frac{1}{R^2}}{\frac{mp+nq}{h^4}} \quad (12)$$

$$\tan \alpha = -\frac{\frac{mn+pq}{n^2+q^2 - \frac{1}{R'^2}}}{\frac{m^2+p^2 - \frac{1}{R'^2}}{mn+pq}} \quad (13)$$

ここに $h^4 = mq - np$ である。(12)で $R=A$ とおくと変形後の主軸の長軸、 $R=B$ とおくと短軸のそれぞれ方向 α' が算出される。変形前の主軸の長軸の方向を求めたいときは(13)で $R'=1/A$ 、短軸に対しては $R'=1/A$ とおくとそれぞれの軸の方向 α が求められる。勿論以上のような主軸の概念を用いると(1)において(3)の如く表現される ω は、(1)を(6)のように変形を一次変状の形でみると主軸の回転として(10)より得られるものに一致している。

[3] 応用例に対する計算

ここでは回転と非回転が同時に見られる台風の風速分布を最も単純化した場合の複合渦と、非回転性の深海波および回転性のトロコイド波の場合を取り上げる。まず複合渦の場合、台風内域に相当する半径Rなる部分は到る処同一回転速度 ω を有する一本の渦管より成り、渦管の外部は無渦空間である。この場合その速度分布はそれぞれの領域において次式で与えられる。

$$u = -\omega y \quad v = \omega x \quad 0 < r \leq R \quad \dots\dots\dots (14)$$

$$u = -\omega R^2 y/r^2 \quad v = \omega R^2 x/r^2 \quad R \leq r \quad \dots\dots\dots (15)$$

従って渦の内外の二領域に前節の一次変状の理論を適用することから始める。

3-1) 渦領域内 (強制渦)

この場合は(14)を(7)に適用することにより次の値を得る。すなわち $m=1, n=-\omega, p=\omega, q=1$ 従って(9), (10)より

$$\tan(\alpha' + \alpha) = 0/0 \quad \dots\dots\dots (16)$$

$$\tan(\alpha' - \alpha) = \omega \quad \dots\dots\dots (17)$$

(11)より

$$(A+B)^2 = 4(1+\omega^2) \quad (A-B)^2 = 0$$

従って

$$A=B=\sqrt{1+\omega^2} \quad \dots\dots\dots (18)$$

回転角は(17)より与えられひずみ楕円の長軸と短軸は(18)より同長になっている。すなわちひずみ前の単位

円はひずみ後には半径が $\sqrt{1+\omega^2}$ の円に変形している。またこれと(16)を勘案すると何れの方法も主軸になっている。そして ω が無小であると考えたと

$$\alpha' - \alpha = \omega \quad \dots\dots\dots(17)$$

$$A = B = 1 \quad \dots\dots\dots(18)$$

となり回転角は ω で単位円はそのまま変形していないことを示している。

3-2)無渦領域(自由渦) (15)を用いて(3-1)の場合と同様にして

$$\left. \begin{aligned} m &= 1 + 2\zeta xy / (x^2 + y^2)^2 \\ n &= \zeta(y^2 - x^2) / (x^2 + y^2)^2 \\ p &= \zeta(y^2 - x^2) / (x^2 + y^2)^2 \\ q &= 1 - 2\zeta xy / (x^2 + y^2)^2 \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots(19)$$

ここに $\zeta = \omega R^2$ である。いま $\zeta > 0$ の場合を考える。

(10)より

$$\tan(\alpha' - \alpha) = 0 \quad \text{これより} \quad \alpha' = \alpha \quad \dots\dots\dots(20)$$

が得られる。すなわち回転はない。(11)よりA, Bの値は次のようになる。

$$A = 1 + \zeta / (x^2 + y^2) \quad B = 1 - \zeta / (x^2 + y^2) \quad (21)$$

このA, Bの値を(12)に代入すると次式が得られる。

R=Aに対して

$$\tan \alpha' = \frac{\frac{y}{x} - 1}{\frac{y}{x} + 1} = \frac{\tan \theta - 1}{\tan \theta + 1} = \tan(\theta - \frac{\pi}{4})$$

従って

$$\alpha' = \theta - \frac{\pi}{4} \quad \dots\dots\dots(22)$$

R=Bに対して

$$\tan \alpha' = \frac{1 + \frac{y}{x}}{1 - \frac{y}{x}} = \frac{1 + \tan \theta}{1 - \tan \theta} = \tan(\frac{\pi}{4} + \theta)$$

従って

$$\alpha' = \frac{\pi}{4} + \theta \quad \dots\dots\dots(23)$$

ここに(21)で与えられるA, Bは $\zeta > 0$ のときはひずみ楕円の長軸, 短軸を示し, $\zeta < 0$ のときはA, Bは逆に短軸, 長軸を示すことになる。

3-3)トロコイド波

今波の進行方向にx軸, 鉛直上向きにy軸をとり任意時刻tにおける水分子の座標をP(x,y)とし, この水分子の軌道の中心をO(a, -c)とする。このトロコイド波においてkを波数, σ を角周波数, tを時間とすると次式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} x &= a - r_0 e^{-kc} \sin \theta_1 \\ y &= -c + r_0 e^{-kc} \cos \theta_1 \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots(24)$$

ここに $\theta_1 = ka - \sigma t$ である。そして r_0 はx軸を水面の波形を形成する水粒子の円軌道の半径として定義されている。(24)より(7)を算出すると次式を得る。

$$\left. \begin{aligned} m &= \frac{1}{D} \{ k^2 r_0^2 e^{-2kc} - 1 + \sigma k r_0 e^{-kc} \sin \theta_1 \} \\ n &= \frac{1}{D} \{ \sigma k^2 r_0^2 e^{-2kc} - \sigma k r_0 e^{-kc} \cos \theta_1 \} \\ p &= \frac{1}{D} \{ -\sigma k^2 r_0^2 e^{-2kc} - \sigma k r_0 e^{-kc} \sin \theta_1 \} \\ q &= \frac{1}{D} \{ k^2 r_0^2 e^{-2kc} - 1 - \sigma k r_0 e^{-kc} \sin \theta_1 \} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots(25)$$

ここに $D = k^2 r_0^2 e^{-2kc} - 1$ である。さらに(25)を用いて(9), (10), (11)を算出すると次式が得られる。

$$\tan(\alpha' + \alpha) = -\cot \theta_1 \quad \dots\dots\dots(26)$$

$$\tan(\alpha' - \alpha) = -\sigma r_0^2 k^2 e^{-2kc} / D \quad \dots\dots\dots(27)$$

$$(A+B)^2 = 4 \{ 1 - 2 k^2 r_0^2 e^{-2kc} + k^4 r_0^4 \cdot (1 + \sigma^2) e^{-4kc} \} / D^2 \quad \dots\dots\dots(28)$$

$$(A-B)^2 = 4 \sigma^2 r_0^2 k^2 e^{-2kc} / D^2 \quad \dots\dots\dots(29)$$

3-4)深海波

x軸を静水面上で波の伝播方向にy軸を鉛直上方向にとる。時刻tにおける波形が余弦進行波として次式で与えられるとする。

$$\eta = a \cos(kx - \sigma t) = a \cos \theta_2 \quad \dots\dots\dots(30)$$

ここに $\theta_2 = kx - \sigma t$ $\dots\dots\dots(31)$

とすると微小振幅の深海波の速度ポテンシャル ϕ および速度U, Vは次式で与えられる。

$$\phi = -\frac{ag}{\sigma} e^{ky} \sin \theta_2 \quad \dots\dots\dots(32)$$

gは重力加速度である。

$$\left. \begin{aligned} U &= \frac{agk}{\sigma} e^{ky} \cos \theta_2 \\ V &= \frac{agk}{\sigma} e^{ky} \sin \theta_2 \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots(33)$$

そして同様にして(7)を算出すると次式を得る。

$$\left. \begin{aligned} m &= 1 - \frac{agk^2}{\sigma} e^{ky} \sin \theta_2 & n &= \frac{agk^2}{\sigma} e^{ky} \cos \theta_2 \\ p &= \frac{agk^2}{\sigma} e^{ky} \cos \theta_2 & q &= 1 + \frac{agk^2}{\sigma} e^{ky} \sin \theta_2 \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

さらに(34)を用いて(10)より

$$\tan(\alpha' - \alpha) = 0, \quad \text{従って} \quad \alpha' = \alpha \quad \dots\dots\dots(35)$$

すなわち流体は非回転運動である。そして(11)よりA, Bが算出される。

$$A = 1 + \frac{agk^2}{\sigma} e^{ky} \quad B = 1 - \frac{agk^2}{\sigma} e^{ky} \quad \dots\dots\dots(35)$$

(12)よりひずみ楕円の長軸Aの方向 α'_A 短軸Bの方向 α'_B は(35)を用いて次式で与えられる。

$$\tan \alpha'_A = \frac{\cos \theta_2}{1 - \sin \theta_2} \quad \text{これより}$$

$$\alpha'_A = \frac{\theta_2}{2} + \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} (kx - \sigma t) + \frac{\pi}{4} \quad \dots\dots\dots(36)$$

$$\tan \alpha'_B = \frac{\cos \theta_2}{1 + \sin \theta_2} \quad \text{これより}$$

$$\alpha'_B = \frac{\theta_2}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} (kx - \sigma t) - \frac{\pi}{4} \quad \dots\dots\dots(37)$$

[4] 計算結果への考案

4-1) 渦領域内 (強制渦)

前節の計算順に従って考察を進める。先づ複合渦の場合、流体は渦管の内部、外部に原点を中心とした円周上を絶えず循環している。そして回転速度は内域の渦管内では (17) で与えられる値をもつけれども、渦管外では到る処で (20) に示すように零である。そこで渦管内域より考察を始める。この場合は (3-1) で述べているように循環のいずれの位置でも流体の微小部分の直角な二方向はいつも主伸張軸になっている。そして普通回転速度 ω は無限小であると考えられるけれど、事態を明確にするために有限であると考えると、流体微小部分が回転を伴って循環している場合、Fig.3 に示すように循環の各位置において主軸 (この場合は微小部分の中心を通るいずれの軸も主軸) のまわりに単位時間に $\alpha' - \alpha = \tan^{-1} \omega$ だけまわり、単位円は半径 $\sqrt{1 + \omega^2}$ の円に変形する。

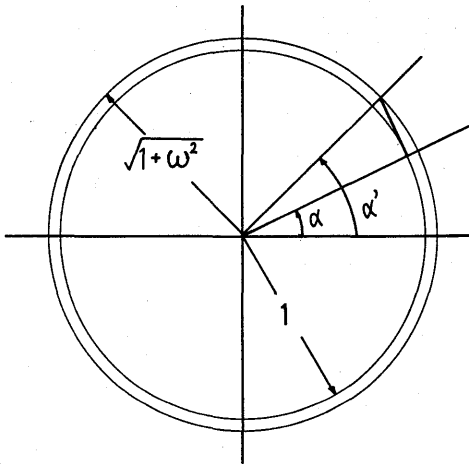
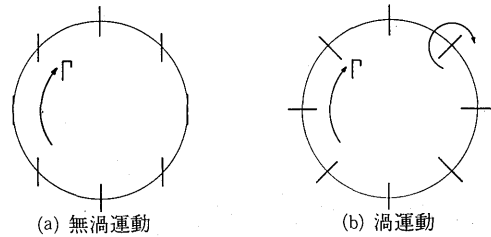


Fig.3 Deformation of particle in the forced vortex.

普通のように回転速度 ω を無限小量と考えると単位時間に流体微小部分の回転速度 ω は (14) により循環の角速度に等しく、伸張を無視すると微粒子の変形はなく、しかも微小部分の中心を通るいずれの直線も主軸であることを考え合わせると、渦領域内は原点を中心とする Fig.4 の (a), (a') のような剛体の回転運動と見なすことが出来る。

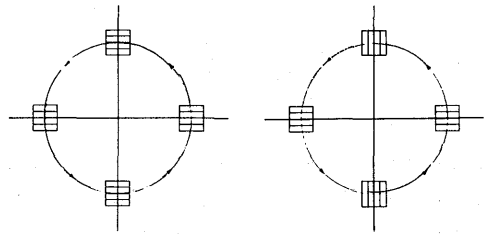
4-2) 無渦領域 (自由渦)

ここでは流体は前述のように到る処で回転速度は常に零である。しかし流体は絶えず輪状帯内を循環している。この内容は見掛上迷理の様に考えられるが流体は固体の如く回転するのではなく、運動の間に (19) に示



中心のまわりを回る木片の運動による回転流と非回転流の説明

室田 明; 応用流体力学 19頁



(a') $\omega = 0$

本間 仁, 安芸敏一

(b') $\omega \approx 0$

物部水理学 433頁

Fig.4

すような係数をもつ (8) の一次変形を受けていると考えれば氷解するであろう。すなわち循環の速度が (15) に示されているように回転軸 (原点) からの距離の一乗に逆比例しているからである。循環の角速度と回転の角速度とは判然と区別すべきである。前者は流体微小部分の軌道の曲率半径で定められ、後者はこれとは全然無関係に流体粒子微小部分の回転で定められるからである。尚回転速度が零であるからと言って Fig.4 の (a), (a') のように流体微小部分が常に平行に動いている様に思ってはならない。或る微小部分の回転速度の成分とはその微小部分の向きを定める角度の時間に関する微分係数と言ったようなものではないのである。もしこのようなものであるとしたならば、回転速度の零なときはこのような角が一定であると Fig.4 の (a), (a') のように結論しなければならなくなる。しかし実際において回転速度の無いときに少しも方向の変化を伴わない直線はただその微小部分の伸張主軸のみであって、微小部分内の他のすべての直線は明らかに転向している。そして主伸張軸は (22), (23) から Fig.5 に示すように循環につれて各位置で方向が変化し回転しているように見える。

しかし循環の各位置で主軸を構成している物質線はそれぞれの位置で異っているので流体粒子微小部分が回転しているとは言い難い。回転とはあくまで循環の各位置での微小部分の変形前後のひずみの主軸に回転が

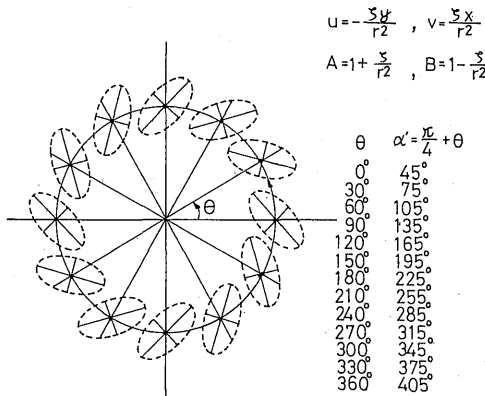


Fig.5 Variations of direction of the principal axes of strain by positions of a circulation.

あるかどうかで決められる。この場合はこの回転速度が零なのである。なおFig.5において循環による任意の回転角 θ の処における主伸張軸の長軸，短軸の方向の詳細をFig.6に示す。

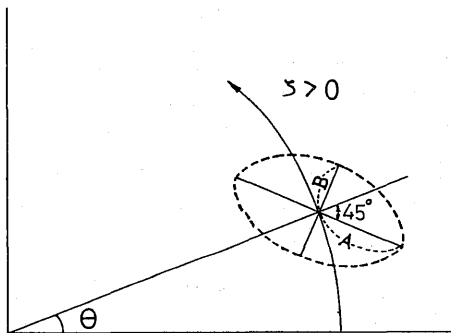


Fig.6 Relationship between the principal axes of strain and any circulating angle θ .

以上述べた内容をより具体的に知り得るために回転性の波トロイド波の場合に適用して，実際の数値例を用いて考察を進める。

4-3) トロコイド波

いま $c=0$ の表面の波で $a=0$ の原点での水粒子の回転を考える。周期 $2\pi/\sigma=9.8\text{sec}$ ，波長 $\lambda=150\text{m}$ ， $r_0=5\text{m}$ とする。そして循環円運動の周期を T で示すと(26)，(27)より

$$\alpha = \frac{\pi}{4} - \frac{\sigma t}{2} - 51^\circ = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \frac{2\pi}{T} t - 51^\circ \quad (38)$$

$$\alpha' = \frac{\pi}{4} - \frac{\sigma t}{2} + 51^\circ = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \frac{2\pi}{T} t + 51^\circ \quad (39)$$

$$\text{従って } \alpha' - \alpha = 1^\circ 42' \quad \dots\dots\dots (40)$$

つまり変形前後の主軸の方向が $1^\circ 42'$ 回転する。すな

わち円軌道を循環しながら循環によって位置した点でひずみの主軸が(40)の値だけ回転するのである。(38)と(39)より α と α' の平均値を α_0 とすると

$$\alpha_0 = \frac{\alpha + \alpha'}{2} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \frac{2\pi}{T} t \quad \dots\dots\dots (41)$$

(28)，(29)よりひずみ楕円の長軸 A ，短軸 B はそれぞれ次の値をとる。

$$A = 1.14 \quad B = 0.86 \quad \dots\dots\dots (42)$$

そこで $c=0$ ， $a=0$ の粒子の $t=0$ のときの長軸 A の値を(12)に代入するとこの値は(39)で $t=0$ といった値に一致する。従って(39)の α' はひずみ楕円の長軸の方向を示すことが判る。Fig.7に $t=T/6$ における

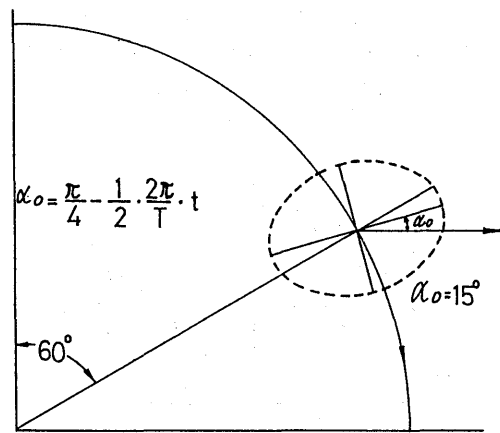


Fig.7 Direction α_0 of the principal axes of strain at $t=T/6$ of Airy and trochoidal waves.

主軸の平均値 α_0 の方向に長軸をもつようにひずみ楕円を画いてある。この位置における変形前の主軸の方向は(38)から α_0 より 51° 小さい方向にあり，変形後は(39)から 51° 大きい方向にある。すなわちこの位置で α_0 を中心にして(40)の値だけ主軸が回転するのである。さらに循環に判なう水粒子の時間とともに占める位置での主軸の方向を α_0 でもって示したものがFig.8である。

これによると循環について各位置での α_0 の方向は異なり一見これを回転と考えがちであるが，これは複合渦の考察で述べたと同様，循環の各位置での主軸の物質線はそれぞれの位置で異なる物質粒子よりできているためこれは回転と異なるものである。相反ひずみ楕円の短軸 $1/A$ の方向 α は(13)に $R'=1/A$ を代入して求めた値が，(38)で $t=0$ といった値に一致することも考

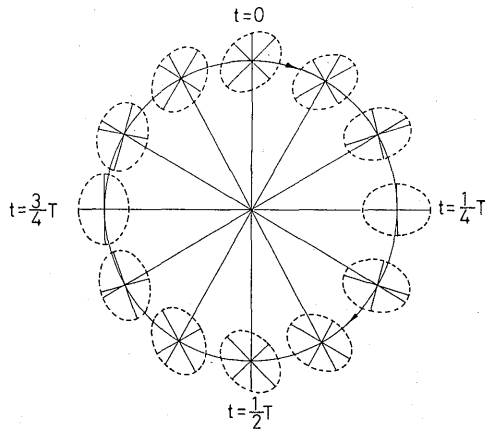


Fig.8 Variations of directions of the principal axes of strain in positions at an interval $t=T/12$ of Airy and trochoidal waves.

え合せると、初めの短主軸から変形後の長主軸への回転は $1^{\circ}42'$ で α_0 は両軸の二等分線になっている。この角は大きいので有限回転をしていると言える。しかしながら無限小変形の時にはFig.2に示すように初めの主軸と変形後の主軸の二等分線 α_0 をもって主軸の位置を示し、回転角は小さくとも省略しない。トロコイド波の場合は以上のように一次変状として近似的に取り扱っている。

4-4) 深海波

この場合も $y=0$ の表面の波で $x=0$ の点での水粒子の循環上の各位置における主軸の方向は、(36)で $x=0$ と置いて得られる α_A でありこれは(41)の α_0 に等しくなっている。長短主軸の長さは勿論トロコイド波の場合と異なるけれど、主軸の方向についてはFig.7の α_0 に一致しており、循環するにつれ主軸の方向が変化する様子もFig.8に示すとうりである。すなわち主軸の方向が循環するにつれて外見上回転しているように思われるが、前述のようにあくまでも回転とは循環によって位置した各点で変形前後の主軸に回転があるか否かで決まるもので、この場合は(35)により流体微小部分の回転はない。

[5] 結び

流体内部の任意の二点間の速度差により流体は変形する。この変形は一次変状に属し、互に直角に交わる特殊な二直線に特徴づけられる。この直交する二直線は変形後も直角に交わるという特性を持ち主軸と呼ばれる。変形前後でこの主軸の回転の有無が流体の渦運動（回転）、無渦運動（非回転）を区別し剛体の回転

とはいささか趣を異にしている。ここでは複合渦を例にとり、渦運動と無渦運動の物理的内容を明らかにした。さらにこの理論を回転性のトロコイド波と非回転性の深海波に適用して数値計算を行なった。複合渦の場合、渦管内域では流体微小部分は原点を中心とする円軌道を循環しているが、微小部分の単位円は一次変状では二次の量を省略すると伸張はなく単位円にとどまる。円の中心を通るいずれの軸も、変形前後の主軸になり得るが、渦の回転速度 ω と同じだけ変形の前後に回転する。したがって流体は回転運動をしていることになる。この際は単位円の中心を通るどの軸も長さに変化はなく、単位時間に ω だけ回転し、この値は循環の角速度 ω と等しく渦管内は全く剛体として回転していることになる。渦管外域でも原点を中心とする円軌道を流体粒子は循環しているが、速度の分布が渦管内と異なるために循環の各位置で変形前後のひずみの主軸に回転がなく、流体の運動は非回転である。循環の各位置での主軸の方向をおってゆくと循環につれて回転しているように見える（Fig.5参照）が、循環の各位置で主軸を構成している物質粒子は異なっている。従って回転しているとは言えない。しかも微小部分内の一定の方向の物質線は循環の各点でも同じ方向を保持している（Fig.4(a)(a')参照）ように考えがちであるがこのようなことはない。同様なことがトロコイド波と深海波についても得られた。すなわち深海波においては変形前後の主軸には回転はなく、トロコイド波では変形前後に主軸の回転が見られることを示した。しかも深海波の主軸の方向はトロコイド波の変形前後の主軸を二等分している。そして複合渦の渦管外域と同様に深海波においても循環につれて主軸の方向が外見上回転しているが流体は非回転である。トロコイド波においては循環の各位置で主軸が回転し流体は回転している。さらに循環につれて主軸の方向も回転している。（Fig.8参照）いずれの場合も再三述べているように循環の各位置で主軸の物質線が異なっていることに注意すると、循環につれて微小部分が回転しているとは言えないのである。終りに本研究に対し本間仁氏より御教示いただいたことに深く感謝いたします。

[6] 参考文献

1) J.C.Jaeger: Elasticity, Fracture and Flow. 1961 Methuen P.25-30.

ジェーガ著 飯田波事訳: “弾性、破壊、流動論。昭和43.10.1 共立出版

- 2) John G. Ramsay: Folding and fracturing of rocks. 1967 McGRAW-HILL BOOK COMPANY. p.85
の(3-68)式を一般化する
- 3) Dr. Max Plank: Einführung in die Mechanik defomierbarer Körper. 1922 Verlag von S. Hirzel in Leipzig P.161.
マックスプランク著, 寺沢寛一, 野田哲夫訳 “変形する物体の力学” 昭和9.11.20. 裳華房 p.222~223.
- 4) 友近晋. 流体力学. 昭和47.6.1 文献社 p.284
- 5) 永井莊七郎: 水理学 昭和47.4.25 コロナ社 p.329
- 6) Tamaru Takuro: RIKIGAKU II 昭和23.3.20 岩波書店 p139
- 7) Pau-Chang Lu : Introduction to the Mechanics of Viscous Fluids. 1977 McGRAW-HILL p.23-25.
- 8) 谷一郎. 流れ学. 改訂版. 1966.5.10. 岩波書店 p.59~60
- 9) 池森亀鶴. 水力学. 昭和44.6.30. コロナ社 p85
- 10) 室田明. 応用流体力学. 昭和44.3.10. 共立出版 p.18~19
- 11) 本間仁. 安芸皎一編. 物部水理学. 1962.7.30 岩波書店 p433
- 12) 松原茂, 薦田広章. 流体の回転運動と非回転運動 (I) 複合渦の場合
昭和54.11. 第54回農業土木学会九州支部講演集
- 13) 松原茂, 武政剛弘. 流体の回転運動と非回転運動 (II) トロコイド波と深海波の場合
昭和54.11. 第54回農業土木学会九州支部講演集