

地表面の被覆の地温に及ぼす影響について

松原 茂*・武政剛弘*・薦田広章*

The Influence of Circular Shade on Bare Ground
Surface on Soil Temperature

by

Sigeru MATSUBARA

(Department of Civil Engineering)

Takehiro TAKEMASA

(Department of Civil Engineering)

Hiroaki KOMODA

(Department of Civil Engineering)

The temperature variation in the soil is different according to the various boundary conditions on the soil surface such as artificially mulched soil in the agriculture.

Being caused by the terrestrial temperature, the temperature in the atmospheric layer near the ground is different corresponding to the surface condition.

In this paper we will introduce a mathematical method to treat the temperature variation in the soil under mulched soil.

1. まえがき

地表面付近の地温変動は、植生とか人工物などの存在による地表面被覆の状況に応じて著しく異なる。それに対応して接地気層内の気温の受ける影響も異なる。このような気温環境の変化は都市計画の面で生活空間における環境問題を考える時に重要である。近年、都市の巨大化とともに都市はコンクリートで覆われ地表面の条件は変貌し、都市における気温は都市周辺の緑地帯の多い農村部とは四季を通じて気温変化に顕著な差異を生じている。また都市内部に限ってみても公園などの緑地帯が存在する場所の周辺では他の部分に比

して快適な気象環境を形成している。これは植生とか人工的な建造物の存在の有無が地温変化に著しい影響を与え、それに応じて接地気層内の気温も変化し、気象環境の変化を惹起しているためである。一方農業面でもマルチ栽培などにより地温を上げ有利な農業を展開している。本論文ではこうした環境並びに農業問題を解決する第一歩として、地面被覆の地温に及ぼす影響を解析した。その際、事柄を単純化して円形の被覆が地表面に存在するときの地中温度を支配する微分方程式を導入し、これを数理的に取扱う方法の一端を示した。

昭和56年10月1日受理

* 長崎大学工学部土木工学科

2. 理論的考察

Fig. 1 に示すように地表面に於いて半径 a なる円領域が被覆されている状況を考える。地表面の円領域の中心を原点とする円筒座標系を考え鉛直下方に z 軸、これに垂直に r 軸をとる。任意の点の温度を θ とするとこれは円周方向には変化がないとして r, z そして時間 t の関数とする。さらに κ を熱拡散係数としてこれは土壤中一定であるとする。と土壤内部に於ける熱伝導の方程式として次式を得る。

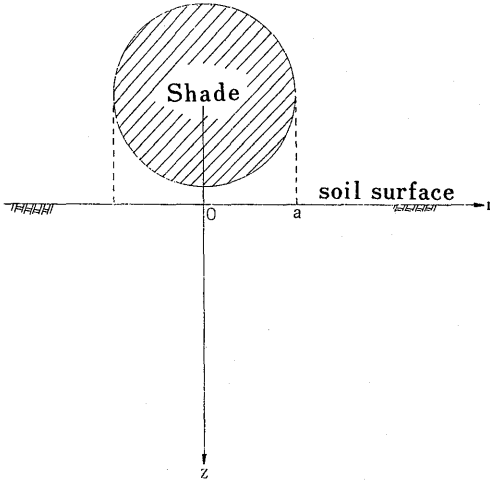


Fig. 1 Model of soil surface condition.

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \kappa \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \theta}{\partial r} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} \right) \quad (1)$$

地表面での被覆した円領域と他の領域における温度変化は太陽による日変化を考え、周期（1日）は二つの領域では同じであるけれど温度振巾は異なるとして境界条件を次のように与える。

$$\left. \begin{aligned} z=0 \text{ に於いて } \theta &= \theta_0 + A \cos \sigma t \quad (r > a) \\ &= \theta_0 + B \cos \sigma t \quad (r < a) \\ z=\infty \text{ に於いて } \theta &= \theta_0 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

但し、 σ, T は角振動数、周期（1日）で $\sigma = 2\pi/T$ である。そして $\theta(t+T) = \theta(t)$ である。(1)の解を(2)の境界条件を用いて求めるために、今 $\theta = \theta_1 + v$ として θ_1, v 両者で(2)の境界条件を満足するように工夫して以下のような表現を行なって解法を行なう。

$$\frac{\partial \theta_1}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial z^2} \quad (3)$$

$$\left. \begin{aligned} z=0 \text{ に於いて } \theta_1 &= \theta_0 + A \cos \sigma t \\ z=\infty \text{ に於いて } \theta_1 &= \theta_0 \\ \theta_1(t+T) &= \theta_1(t) \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

これより得られる解は被覆の無い時の一次元の熱伝導

の式であり、よく知られた解で次式で与えられる。

$$\theta_1 = \theta_0 + A e^{-\sqrt{\frac{\sigma}{2\kappa}} z} \cos \left(\sigma t - \sqrt{\frac{\sigma}{2\kappa}} z \right) \quad (5)$$

一方 v については

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \kappa \left(\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \quad (6)$$

$$\left. \begin{aligned} z=0 \text{ に於いて } v &= C \cos \sigma t \quad (r < a) \\ &= 0 \quad (r > a) \\ z=\infty \text{ に於いて } v &= 0 \\ v(t+T) &= v(t) \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

を満足する解を求めればよい。但し $C = -(A-B)$ である。これを解くためにまず $v a e^{i\sigma t}$ と考えれば(6)は次式のようなになる。

$$i \frac{\sigma v}{\kappa} = \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \quad (8)$$

ここでさらに $v = R(r) \cdot Z(z)$ とおくと(8)は

$$\frac{1}{R} \frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{rR} \frac{dR}{dr} = -\frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} + i \frac{\sigma}{\kappa} = -\alpha^2 \quad (9)$$

となる。 α は或る任意常数である。(9)において R に関しては

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} + \alpha^2 R = 0 \quad (10)$$

となり、この式の一般解は Bessel 関数を用いて

$$R = D_1 J_0(\alpha r) + D_2 Y_0(\alpha r) \quad (11)$$

を得る。これに(7)の境界条件 $r=0$ で v は有限の値を取ることを考慮に入れると(10)の特解として次式を得る。

$$R = D_1 J_0(\alpha r) \quad (12)$$

ここに D_1 は任意常数である。次に Z に関しては(9)より

$$\frac{d^2 Z}{dz^2} = \left(\alpha^2 + i \frac{\sigma}{\kappa} \right) Z \quad (13)$$

となり、これに $z=\infty$ で v は有限な値をもつ条件を考慮すると(13)の特解として次式を得る。

$$Z = e^{-\gamma z} \quad (14)$$

$$\text{ここに } \gamma = \sqrt{\alpha^2 + i \frac{\sigma}{\kappa}} \quad (15)$$

である。さらに

$$\alpha^2 = p^2 \cos \varphi, \quad \frac{\sigma}{\kappa} = p^2 \sin \varphi \quad (16)$$

とおくと

$$\gamma^2 = \alpha^2 + i \frac{\sigma}{\kappa} = p^2 (\cos \varphi + i \sin \varphi) = p^2 e^{i\varphi}$$

従って

$$r = \sqrt{\alpha^2 + i \frac{\sigma}{\kappa}} = p e^{i \frac{\varphi}{2}} = p \left(\cos \frac{\varphi}{2} + i \sin \frac{\varphi}{2} \right) \quad (17)$$

となる。ここに p, φ は(16)より次式でもって与えられる。

$$p^2 = \sqrt{\alpha^4 + \frac{\sigma^2}{\kappa^2}} \quad \tan \varphi = \frac{\sigma}{\alpha^2 \kappa} \quad (18)$$

結局 v の特別解の一つは

$$v = J_0(\alpha r) e^{-\gamma z} e^{i \sigma t} \quad (19)$$

であるから、これに(17)を代入して実数部分を取ると次式を得る。

$$v = J_0(\alpha r) e^{-p z \cos \frac{\varphi}{2}} \cos \left(\sigma t - p z \sin \frac{\varphi}{2} \right) \quad (20)$$

次に

$$\left. \begin{aligned} F(r) &= K \text{ (常数)} & (r < a) \\ F(r) &= 0 & (r > a) \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

なる関数を Bessel 関数を用いて表現すると $F(r)$ は Fourier-Bessel 積分によって

$$\begin{aligned} F(r) &= \int_0^\infty \int_0^a F(\lambda) J_0(\alpha r) J_0(\alpha \lambda) \alpha \lambda \, d\alpha \, d\lambda \\ &= K \int_0^\infty \int_0^a J_0(\alpha r) J_0(\alpha \lambda) \alpha \lambda \, d\alpha \, d\lambda \end{aligned} \quad (22)$$

と表わされる。従ってこの問題のすべての条件を満足する解としては次式で与えられる。

$$\begin{aligned} v &= C \int_0^\infty J_0(\alpha r) e^{-p z \cos \frac{\varphi}{2}} \cos \left(\sigma t - p z \sin \frac{\varphi}{2} \right) \alpha \, d\alpha \\ &\quad \cdot \int_0^a J_0(\alpha \lambda) \lambda \, d\lambda \end{aligned} \quad (23)$$

ここで(10), (12)から

$$J_0(\alpha r) = -\frac{1}{\alpha^2} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dJ_0(\alpha r)}{dr} \right) \quad (24)$$

の関係が得られるから

$$\begin{aligned} \int_0^a J_0(\alpha \lambda) \lambda \, d\lambda &= -\frac{1}{\alpha^2} \int_0^a \frac{d}{d\lambda} \left(\lambda \frac{dJ_0(\alpha \lambda)}{d\lambda} \right) \, d\lambda \\ &= \frac{a}{\alpha} J_1(\alpha a) \end{aligned} \quad (25)$$

となる。従って(23)を(23)に用いると v は次式となる。

$$\begin{aligned} v &= C a \int_0^\infty e^{-p z \cos \frac{\varphi}{2}} \cos \left(\sigma t - p z \sin \frac{\varphi}{2} \right) \\ &\quad \cdot J_0(\alpha r) J_1(\alpha a) \, d\alpha \end{aligned} \quad (26)$$

さてこの解の意味を読み取りやすくするために(26)を次の形に置くと

$$v = P \cos \sigma t + Q \sin \sigma t \quad (27)$$

P, Q は次式でもって表現される。

$$\left. \begin{aligned} P &\equiv C a \int_0^\infty e^{-p z \cos \frac{\varphi}{2}} \cos \left(p z \sin \frac{\varphi}{2} \right) \\ &\quad \cdot J_0(\alpha r) J_1(\alpha a) \, d\alpha \\ Q &\equiv C a \int_0^\infty e^{-p z \cos \frac{\varphi}{2}} \sin \left(p z \sin \frac{\varphi}{2} \right) \\ &\quad \cdot J_0(\alpha r) J_1(\alpha a) \, d\alpha \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

この(28)の一般的な積分は簡単ではない。そこで $r=0$ の処の値を求めることとする。 $r=0$ の時には $J_0(\alpha r) = J_0(0) = 1$ であるから被覆の中心点下の温度を与える式において P, Q は

$$\left. \begin{aligned} P &= C a \int_0^\infty e^{-p z \cos \frac{\varphi}{2}} \cos \left(p z \sin \frac{\varphi}{2} \right) J_1(\alpha a) \, d\alpha \\ Q &= C a \int_0^\infty e^{-p z \cos \frac{\varphi}{2}} \sin \left(p z \sin \frac{\varphi}{2} \right) J_1(\alpha a) \, d\alpha \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

となる。尚この積分も直ちに行なうことは簡単ではなく近似解を求めることにする。今もし σ/κ が非常に小なる値を有するものとすれば

$$\left. \begin{aligned} r &\doteq \alpha, & p &\doteq \alpha \\ \cos \frac{\varphi}{2} &= 1, & \sin \frac{\varphi}{2} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

となる。この状態は $\sigma \rightarrow 0$ 又は $\kappa \rightarrow \infty$ の時で定常状態を仮定したことにはほかならない。この時の P, Q をそれぞれ P', Q' で示すと第一近似としては

$$\left. \begin{aligned} P' &= C a \int_0^\infty e^{-\alpha z} J_1(\alpha a) \, d\alpha = C \frac{\sqrt{a^2 + z^2} - z}{\sqrt{a^2 + z^2}} \\ Q' &= C a \int_0^\infty e^{-\alpha z} \sin(0) J_1(\alpha a) \, d\alpha = 0 \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

従って(29)で $P = P'', Q = Q''$ として

$$\left. \begin{aligned} P'' &= C \frac{\sqrt{a^2 + z^2} - z}{\sqrt{a^2 + z^2}} + C a \int_0^\infty \left[e^{-p z \cos \frac{\varphi}{2}} \right. \\ &\quad \left. \cdot \cos \left(p z \sin \frac{\varphi}{2} \right) - e^{-\alpha z} \right] J_1(\alpha a) \, d\alpha \\ Q'' &= C a \int_0^\infty e^{-p z \cos \frac{\varphi}{2}} \sin \left(p z \sin \frac{\varphi}{2} \right) J_1(\alpha a) \, d\alpha \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

を得る。つまり(29)は(31)の値とその補正項よりなると考えたのである。この補正項も積分困難であるから、およその概念を得るために数値計算を行なってみる。

3. 数値計算

$a = 10\text{cm}$, 周期 = 1日即ち $\sigma = 2\pi/60 \times 60 \times 24$,
 $\kappa = 5 \times 10^{-3} \text{ cm}^2/\text{sec}$, $C = 2.5^\circ\text{C}$ として $z = 10\text{cm}$,
 20cm , 50cm の処の温度変化の振巾の円内外領域間の相違を計算する。まず第一近似の(31)の P' を各層において求めると次の如くなる。

$$\left. \begin{aligned} z=10\text{cm} \quad P'=0.293 \quad C=0.733 \\ z=20\text{cm} \quad P'=0.106 \quad C=0.265 \\ z=50\text{cm} \quad P'=0.019 \quad C=0.048 \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

$$\left. \begin{aligned} \xi(\alpha) &= \left[e^{-pz \cos \frac{\varphi}{2}} \cos(pz \sin \frac{\varphi}{2}) \right. \\ &\quad \left. - e^{-\alpha z} \right] J_1(\alpha a) \\ \eta(\alpha) &= \left[e^{-pz \cos \frac{\varphi}{2}} \sin(pz \sin \frac{\varphi}{2}) \right] J_1(\alpha a) \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

次に(32)における補正項について $z=10\text{cm}$ での値を計算する。今計算を実行するに被積分項を α の関数として

これの α の変化に対する $\xi(\alpha)$, $\eta(\alpha)$ の値を図示すると Fig.-2 のようになる。これによると両者は共に

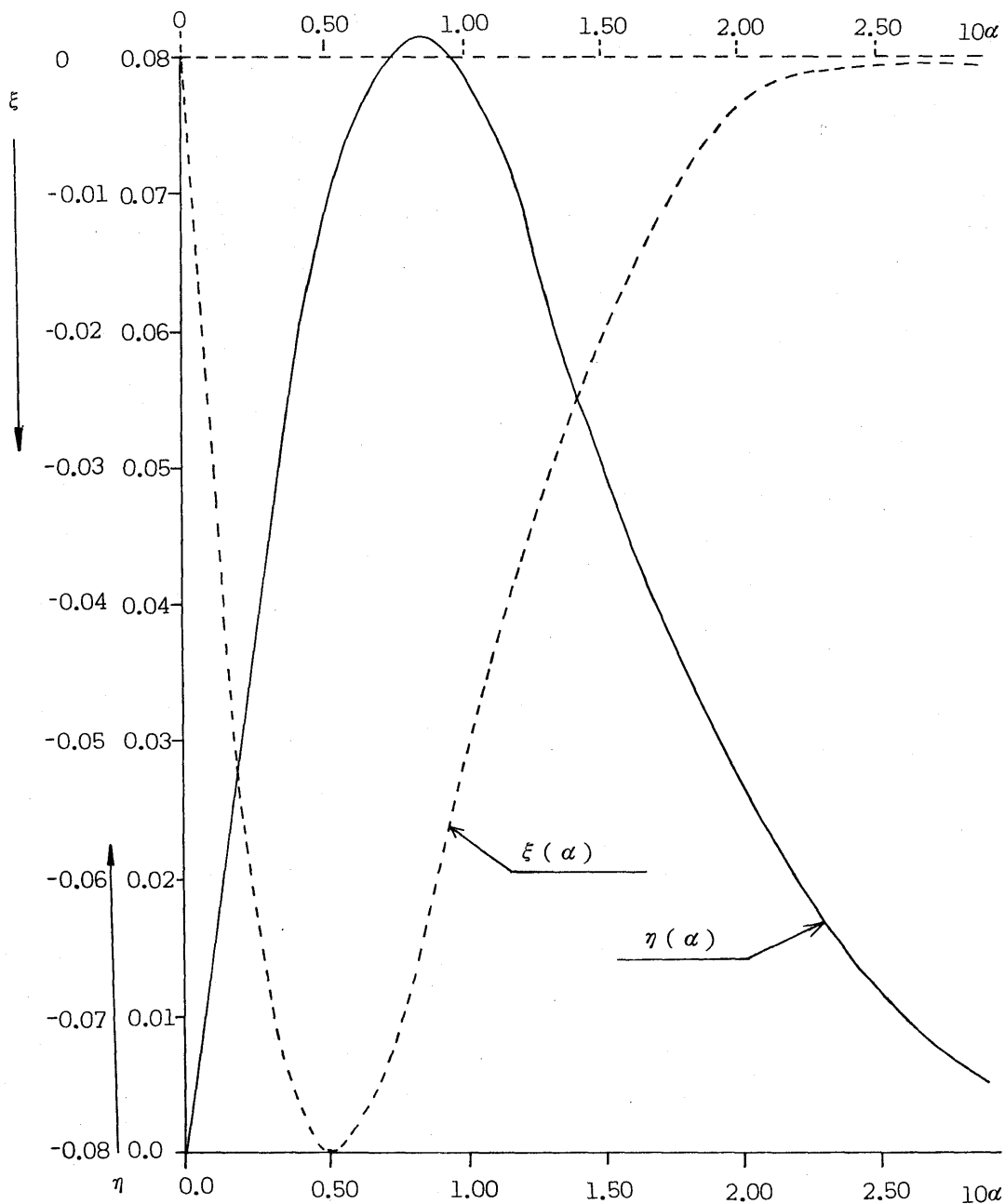


Fig. 2 Values of $\eta(\alpha)$ and $\xi(\alpha)$ as a function of α in depth of 10 cm.

$\alpha=0.35$ ぐらいの値でほとんど零に収束している。そこで図から両者の面積を求めてみると

$$\left. \begin{aligned} \int_0^{\infty} \xi(\alpha) d\alpha &= -0.0084 \\ \int_0^{\infty} \eta(\alpha) d\alpha &= 0.01245 \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

の値を得る。従って $z=10\text{cm}$ における v の値を求めると

$$\begin{aligned} v &= C[(0.293-0.084)\cos \sigma t + 0.1245\sin \sigma t] \\ &= 0.243C \cos(\sigma t + 329^\circ 13') \\ &= 0.61\cos(\sigma t + 329^\circ 13') \end{aligned} \quad (36)$$

結局地表面にて円形被覆を施したとき、その中心下10cmの地中温度は被覆なき場合に比し(36)の値に相当する影響を受けている。しかしながら大体の形勢は第一近似で見当がつくので、円被覆の中心下で被覆の影響が 0.1°C になる深さ h を(31)より計算してみると

$$\frac{\sqrt{1 + \left(\frac{h}{a}\right)^2} - \frac{h}{a}}{\sqrt{1 + \left(\frac{h}{a}\right)^2}} = \frac{0.1}{C}$$

$$\text{これより } \frac{h}{a} = \frac{24}{7} \div 3.43$$

となり $a=10\text{cm}$ とすると $h=34.3\text{cm}$ となる。

4. 結び

地表面に円形被覆がある場合の地中温度の受ける影響を算出する方程式を導いた。この解は複雑で実用に供するには面倒な数値計算を行なう必要がある。尚この式の解は地中温度のみならず一般の Austausch の問題など、環境問題の解決に利用される可能性が多いと思われる。今後は種々の境界条件のもとで野外観測を行なうことにより、この式の有用性を確かめてゆく所存である。

5. 参考文献

- 1) G. N. Watson: Theory of Bessel Function p. 453 Cambridge at the University Press 1966
- 2) フランク・ボウマン著平野鉄太郎訳：ベッセル函数入門 p. 123 日新出版
- 3) 寺沢寛一：数学概論 p. 492 岩波書店
- 4) 松原 茂，武政剛弘：地表面の被覆の地温に及ぼす影響について 九州の農業気象(1980) p. 54~58