ケーブルの面内不安定振動

高橋和雄*・田川賢**
佐藤秀雄***・金近伸広****

Out-of-Plane Vibrations of Suspended Cable Under Inplane Forcing

by

Kazuo TAKAHASHI
(Depertment of Civil Engineering)

Masaru TAGAWA
(Graduate Student of Nagasaki University)

Hideo SATO
(Kawada Industrial Co., Ltd., Osaka)

Nobuhiro KANECHIKA
(Graduate of Nagasaki University, Yamaguchi)

Abstract

It is known that out-of-plane vibrations were observed under inplane forcing only according to the experimental results. This fact is caused by the geometrical nonlinearity of the cable. Analytical approach to investigate this problem was presented by using the multiple-degree-of-freedom approach because the cable is continuous system. However, this approach for the present problem is not yet considered.

In the present paper, out-of-plane vibrations of cables under inplane forcing are analyzed quantitatively by using the multiple-degree-of-freedom approach. Unstable regions where out-of-plane vibrations occur are obtained.

1. まえがき

ケーブルに面内外力が作用すると，特定の振動数領域で面外振動が生ずることが知られている。この問題はケーブルの幾何学的非線形性に基づく非線形振動に起因するものと考えられている。本題に関する研究については，山口[1),2),3)]らによって面内・面外ともに1自由度系とみなした解析が行われ，また，ケーブルを対象とした面内加振による面内・面外連成振動実験が行われている。すなわち，面内非線形応答を1自由度系と仮定し，しかも外力の振動数と同じ主調和成分の

*　土木工学科
**　長崎大学大学院学生
***　川田工業㈱設計部　大阪市西区
****　長崎大学卒業生　山口県下松市

みを用いて評価し，得られた面外の線形化された係数励振振動形の運動方程式の不安定領域を Bolotin の方法を用いて解析し，さらに，面内・面外連成振動が生じた後の回転運動を弦に対する Murthy の理論を応用して解析している。山口らの研究によってケーブルの面外不安定振動は弦とは異なって主不安定領域が存在することなどケーブルの面外不安定振動の定性的な説明がなされている。また，実験によってケーブルの面外不安定振動特性がケーブルの幾何学的形状特性によって著しく異なることを示している。

ケーブルは無限の自由度を有するために，多自由度系としての定量的な取扱いが必要であるが，面内非線形応答を正確に評価したうえ，これより得られる連立の Hill の方程式をすべて求めることが困難なこともあって多自由度系としての取扱いは見受けられないようである。

そこで，本研究はケーブルの面内加振による面外係数励振振動問題を多自由度系として取扱い，ケーブルに面外振動が生ずる振動数領域を求めるものである。本研究の手順は，先ず面内加振による面内非線形応答を調和バランス法を用いて求め，次いで面内非線形応答によって定まる面外の運動方程式を連立の Hill の方程式に変換して，その不安定領域を Hill 方程式の安定判別法[4),5)]を用いて定めるものである。本法によれば，1自由度系としての解析では追従が無理なケーブルの面内非線形応答特性を評価したうえで，単一の面外振動形をもった単純共振および複数個の面外振動形をもつ結合共振などを体系的に明らかにすることが可能である。また，さらに，これらの不安定領域に及ぼす減衰の影響を明らかにすることができる。

本論文では先ず解法の展開ののち，ケーブルの面外不安定振動の性質を明らかにし，次いで，ケーブルの面外不安定領域の種類，幅およびケーブルの形状の影響を明らかにするものである。

2. 解　法

(1) 面内応答解析

面内加振を受けるケーブルの面内非線形運動方程式は次のように与えられる。

$$L_1(u,v)=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\frac{\partial}{\partial s_e}\left\{\left(c_0^2\frac{1}{x_e'}+c_1^2 x_e'^2\right)\frac{\partial u}{\partial s_e}+c_1^2 x_e' y_e'\frac{\partial v}{\partial s_e}\right\}$$
$$-c_1^2\frac{\partial}{\partial s_e}\left[\left(x_e'\frac{\partial u}{\partial s_e}+y_e'\frac{\partial v}{\partial s_e}\right)\frac{\partial u}{\partial s_e}+\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial s_e}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial s_e}\right)^2\right\}\left(x_e'+\frac{\partial u}{\partial s_e}\right)\right]-\frac{p_x\cos\Omega t}{\rho_0}=0 \quad (1)$$

$$L_2(u,v)=\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}-\frac{\partial}{\partial s_e}\left\{\left(c_0^2\frac{1}{x_e'}+c_1^2 y_e'^2\right)\frac{\partial v}{\partial s_e}+c_1^2 x_e' y_e'\frac{\partial u}{\partial s_e}\right\}-c_1^2\frac{\partial}{\partial s_e}\left[\left(x_e'\frac{\partial u}{\partial s_e}\right.\right.$$
$$\left.\left.+y_e'\frac{\partial v}{\partial s_e}\right)\frac{\partial v}{\partial s_e}+\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial s_e}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial s_e}\right)^2\right\}\left(y_e'+\frac{\partial v}{\partial s_e}\right)\right]-\frac{p_y\cos\Omega t}{\rho_0}=0 \quad (2)$$

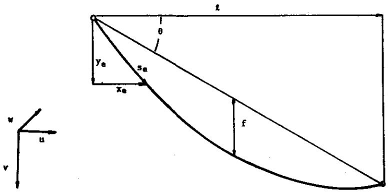


Fig. 1　Geometry of cable

ここに，u，v：面内水平，鉛直変位，t：時間，$\{x_e,\ y_e,\ 0\}$：ケーブルの初期形状，s_e：初期形状に沿う座標，$c_0=\sqrt{H_e/\rho_0}$：横波伝播速度，ρ_0：単位長さ当りの質量，$c_1=\sqrt{EA/\rho_0}$：縦波伝播速度，E：ヤング率，A：断面積，ρ_x，ρ_y：面内水平，鉛直方向の荷重強度，Ω：外力の円振動数，また Fig. 1 において，θ：ケーブルの傾斜角，f：ケーブルサグ，l：支間長

式(1)，(2)の解を次のように仮定する。

$$u=l\sum_{i=1}^{\infty}P_i(t)U_i(s_e)$$
$$V=l\sum_{i=1}^{\infty}P_i(t)V_i(s_e) \quad (3)$$

ここに，$P_i(t)$．未知の時間関数，$U_i(s_e)=\sum_{n=1}^{\infty}P_{x_i}^{n}\sin\frac{n\pi s_e}{l^*}$，$V_i(s_e)=\sum_{n=1}^{\infty}P_{y_i}^{n}\sin\frac{n\pi s_e}{l^*}$ で表わされる面内固有振動形，l^*：ケーブル長，$P_{x_i}^{n}$，$P_{y_i}^{n}$：面内 i 次固有振動のモード定数

式(3)を式(1)，(2)に代入して Galerkin 法を適用すれば次のような時間に関する常微分方程式が得られる。

$$m_n\ddot{P}_n+k_nP_n+k^2\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}k_{ijn}P_iP_j$$
$$+\frac{k^2}{2}\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}k_{ijln}P_iP_jP_l$$
$$=p_n\gamma^*\cos\omega\tau \tag{4}$$

ここに，$\tau=\omega_1 t$，T_1：傾斜した弦の1次の固有円振動数で無次元化した無次元時間，$\omega=\Omega/\omega_1, k=c_1/c_0$：縦波一横波伝播速度化，$m_n$，$k_n$，……$k_{ijln}$：Galerkin 法による積分項，$p_n$：外力の大きさをケーブルの単位長さ当りの重量で無次元化した無次元荷重強度，$\gamma^*=8\rho_0 g^l/_{He}$

式(4)の定常解を次のように Fourier 級数に仮定する。

$$P_n=\sum_{m=0,1}^{\infty}a_m^n\cos m\omega\tau$$

a_m^n：未定定数

式(5)を式(4)に代入して調和バランス法を適用すれば，次のような a_m^n を求めるための非線形連立代数方程式を得られる。

$$(k_n-m_nm^2\omega^2)a_m^n+k^2\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}k_{ijn}f_{ij}^n$$
$$+\frac{k^2}{2}\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}k_{ijln}f_{ijl}^n$$
$$=p_n\gamma^*\delta_{im} \tag{6}$$

ここに，δ_{lm}：Kronecker のデルタ関数，f_{ij}^n，f_{ijl}^n：a_i^n，a_j^n，a_l^n などの関数

式(6)を適当な初期値のもとに解けば，ケーブルの面内応答が明らかにされる。

(2)　面外係数励振振動

面外振動が生ずる分岐点を求めるためには，微小振動論の取扱いで十分であるから面外振動の非線形項を無視した自由振動の運動方程式は次のように表わされる。

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}-\frac{\partial}{\partial s_e}\left(c_0^2\frac{1}{x_e'}\frac{\partial w}{\partial s_e}\right)$$
$$-c_1^2\frac{\partial}{\partial s_e}\left[\left(x_e'\frac{\partial u}{\partial s_e}+y_e'\frac{\partial v}{\partial s_e}\right)\frac{\partial w}{\partial s_e}+\frac{1}{2}\right.$$
$$\left.\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial s_e}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial s_e}\right)^2\right\}\frac{\partial w}{\partial s_e}\right]=0 \tag{7}$$

ここに，w：面外変位

式(7)に式(3)を代入し，さらに式(5)を代入すれば，係数励振振動形の微分方程式が得られる。

面外変位の一般解を次のように仮定する。

$$w=\sum_{i=1}^{\infty}T_i(t)W_i(s_e) \tag{8}$$

ここに，T_i：未知の時間関数，$W_i=\sum_{n=1}^{\infty}P_{zi}^n\sin\frac{n\pi s_e}{l^*}$：面外固有振動形

式(8)を用いて，式(7)の偏微分方程式は Galerkin 法によって，次のTに関する運動方程式に変換される。

$$[A_I]\{\ddot{T}\}+[A_K]\{T\}+k^2\{[D_p^0]+[D_p^1]\cos\omega\tau$$
$$+[D_p^2]\cos2\omega\tau+[D_p^3]\cos3\omega\tau\}\{\tau\}=\{0\} \tag{9}$$

ここに，

$$[A_I]=diag(\pi^2\cos\theta I_l^I),\ I_l^I=\int_o^{\sigma_e}W_l^2d\sigma$$

$$[A_K]=diag(I_l^K)\quad,\ I_l^K=\int_o^{\sigma_e}\frac{1}{x_e'}\left(\frac{dW_l}{d\sigma}\right)^2d\sigma$$

$[D_p^0]$，$[D_p^1]$，$[D_p^2]$，$[D_p^3]$：係数励振項の行列，各行列 $[D_p^s]$ の要素はそれぞれ次のように定義される。

$$p_p^s(l,\ m)=\sum_{j=1}^{3}a_s^jI_{ljm}+\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3}f_s^{jk}I_{ljkm}$$

$$I_{ljm}=\int_o^{\sigma_e}\left(x_e'\frac{dU_j}{d\sigma}+y_e'\frac{dU_j}{d\sigma}\right)\frac{dW_j}{d\sigma}\frac{dW_m}{d\sigma}d\sigma$$

$$f_0^{jk}=(2a_0^ja_0^k+a_1^ja_1^k+a_2^ja_2^k+a_3^ja_3^k)/2$$
$$f_1^{jk}=\{2(a_0^ja_1^k+a_1^ja_0^k)+a_1^ja_2^k+a_2^ja_1^k+a_3^ja_2^k$$
$$+a_2^ja_3^k\}/2$$
$$f_2^{jk}=\{2(a_0^ja_2^k+a_2^ja_0^k)+a_1^ja_1^k+a_1^ja_3^k+a_3^ja_1^k\}/2$$
$$f_3^{jk}=\{2(a_0^ja_3^k+a_3^ja_0^k)+a_1^ja_2^k+a_2^ja_1^k\}/2$$

$[D_p^0]$ は面内応答による面外方向の付加剛性行列，$[D_p^1]$，$[D_p^2]$，$[D_p^3]$：係数励振振動の幅，種類を決定する行列

面外不安定領に及ぼす減衰の影響を明らかにするために，次のような線形減衰を考える。

$$[A_I]\{\ddot{T}\}+2[A_I][H]\{\dot{T}\}$$
$$+k^2\{[D_p^0]+[D_p^1]\cos\omega\tau+[D_p^2]\cos2\omega\tau$$
$$+[D_p^3]\cos3\omega\tau\}\{T\}=\{0\} \tag{9}$$

ここに，$[H]=\mathrm{diag}\,(h_l\omega_l)$，$h_l$：減衰定数，$\omega_l$：面外無次元振動数

式(9)は，連立の Hill の方程式である。式(9)の解を次のように仮定する。

$$\{T\}=e^{\lambda\tau}[\{\frac{1}{2}\mathrm{b}_0+\sum_{m=1}^{\infty}(\mathrm{a}_m\sin m\bar{\omega}\tau+\mathrm{b}_m\cos m\bar{\omega}\tau)\} \tag{10}$$

ここに，λ：未知定数，b_0，a_m，b_m：未知のベクトル

上式を式(9)に代入のうえ，調和バランス法を適用すれば，次のような同次方程式を得られる。

$$\boldsymbol{DX}=\boldsymbol{O} \tag{11}$$

ここに，$\boldsymbol{D}$：係数行列，$\boldsymbol{X}$：b_0，a_m，b_mからなる係数行列

行列$\boldsymbol{D}$の性質から，行列$\boldsymbol{D}$は次のような3個の行列に分解することができる。

$$\boldsymbol{D}=\boldsymbol{M}_0-\lambda\boldsymbol{M}_1-\lambda^2\boldsymbol{M}_2 \tag{12}$$

ここで，$\boldsymbol{M}_0$，$\boldsymbol{M}_1$，$\boldsymbol{M}_2$：λの0次，1次および2次の係数行列

いま，$\{\boldsymbol{Y}\}=\lambda\{\boldsymbol{X}\}$ なる新しいベクトル $\{\boldsymbol{Y}\}$ を導入すれば，式は(12)は次のように書き改められる。

$$\begin{bmatrix}[\boldsymbol{O}] & [\boldsymbol{I}]\\ [\boldsymbol{M}_2]^{-1}[\boldsymbol{M}_0] & -[\boldsymbol{M}_2]^{-1}[\boldsymbol{M}_1]\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\boldsymbol{X}\\ \boldsymbol{Y}\end{Bmatrix}=\lambda\begin{Bmatrix}\boldsymbol{X}\\ \boldsymbol{Y}\end{Bmatrix} \tag{13}$$

式(13)は，非対称行列の固有値問題の基礎式である。したがって，式(13)の固有値λを求めれば，ケーブルの面外振動の安定，不安定が直接判定される。固有値λの実数部が1つでも正ならば不安定で，すべて負ならば安定である。ケーブルの面外振動は不安定領域で生じ，面内・面外連成振動が生じることになる。

3 ケーブルの面外不安定振動の性質

多自由度系の係数励振振動系の Mathieu の微分方程式

$$[A_I]\{\ddot{T}\}+[A_K]\{T\}+k^2[D^1_p]\cos\omega\tau\{T\}=\{\boldsymbol{O}\} \tag{13}$$

からの情報からによれば，式(13)の不安定領域は

$$\left.\begin{array}{l}\omega=2\omega i/\bar{k}(\bar{k}=1,2,\cdots)\\ \omega=(\omega i\pm\omega j)/\bar{k}(\bar{k}=1,2,\cdots)\end{array}\right\} \tag{14}$$

$\omega=2\omega i/\bar{k}$ 付近に生ずる単純共振と $\omega=(\omega i\pm\omega j)/\bar{k}$ 付近に生ずる結合共振の2つがあり，$\bar{k}=1$の場合が不安定領域，$\bar{k}=2,3$の場合が副不安定領域と呼ばれている。また結合共振において＋の場合が和形の結合共振，－の場合が差形の結合共振と呼ばれている。本題の基礎式は連立の Hill の方程式であるから，Mathieu の方程式に対応する $[D^1_p]$ の他に，$[D^2_p]$，$[D^3_p]$ の項からも不安定領域が得られる。$[D^2_p]$，$[D^3_p]$ の時間関数が $\cos 2\omega\tau$，$\cos 3\omega\tau$ であるから，式(14)は次のように書き改められる。

$$\begin{array}{llll}[D^1_p]: & 2\omega i/\bar{k},\ (\omega i\pm\omega j)/\bar{k} & \bar{k}=1,2\cdots & \\ [D^2_p]: & 2\omega i/\bar{l},\ (\omega i\pm\omega j)/\bar{l} & \bar{l}=2,4,\cdots & (15)\\ [D^3_p]: & 2\omega i/\bar{m},\ (\omega i\pm\omega j)/\bar{m} & \bar{m}=3,6,\cdots & \end{array}$$

従って，$[D^2_p]$ から得られる不安定領域には偶数次の不安定領域のみが存在し，主不安定領域は存在しない。また，$[D^3_p]$ から得られる不安定領域は3の整数倍の不安定領域が存在し，主・副の不安定領域は存在しない。

式(15)に示した不安定領域のうち，どの種類の不安定領域が存在するか，どの不安定領域が重要であるかは式(6)の係数行列 $[D^1_p]$，$[D^2_p]$および $[D^3_p]$ の性質によって定まる。すなわち，ケーブルの形状，加振状態および面内応答によって，これらの係数行列 $[D^i_p]$ の要素が定まる。ケーブルの場合には行列 $[D^i_p]$（$i=1,2,3$）の主対角線の要素 $d^i_{jj}\fallingdotseq 0$ であるから必ず単純共振が存在する。また，$[D^i_p]$ は対称行列 $d^i_{jl}=d^i_{lj}$であるから，d^i_{jl}とd^i_{lj}は同符号である。このために，結合共振は和形のみが存在し，差形の結合共振は存在しない[6]。なお，$[D^0_p]$ は面内非線形応答に伴う面外付加剛性を意味し，面外固有振動数を静的平衡位置の値からずらせる効果をもつ。

本論文では，連立の Hill の方程式を直接解析しているので，式(15)から得られる不安定領域をすべて一回で求められる。各次の単純共振および各種の面外振動形の組み合せによる結合共振は数多く存在するが，このうち，幅の広い不安定領域のみをプロットする。面外の固有振動数は $\omega=1.0,2.0$ および3.0のように整数に近いので，式(15)から得られる不安定領域もこれらの値に近いところで生ずるので，各種の不安定領域は接近してくる。そこで，ケーブルの不安定領域を求めるにあたっては，面外振動の振動形すなわち自由度の組み合せを変化させて，所要の不安定領域を求めるものである。

4. 不安定領域の決定法

次に具体的な不安定領域の決定法を示せば次のとおりである。先ず，面内方向の加振強度を一定に保って面内応答を求め，その面内非線形応答のもとにおける面外振動の安定性を吟味する。このようにして，面内応答曲線上に面外振動が生ずる振動数領域が得られる。次いで荷重強度を漸次変化させて不安定領域を構成させれば，応答曲線上に面外振動が生ずる不安定領

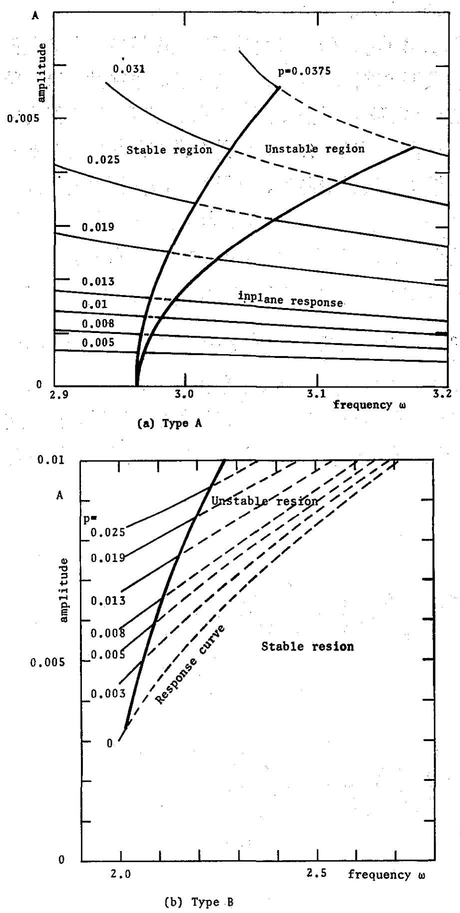


Fig. 2　Construction of unstable regions

域図が構成されることになる。以上のようにして得られる不安定領域には Fig. 2 に示すように Type A と Type B の2個がある。Type A は通常の不安定領域で応答曲線上に上側と下側の不安定領域の境界が存在する場合である。これに対して Type B は左側の境界点のみが存在し，右側の境界点が存在しない。このために右側の境界点がこれより振幅が小さくなりえない外力が零の場合の自由振動の背骨曲線によって定まることになる。この Type B の不安定領域は，各次の固有振動数近傍の主共振上の近傍に生ずるものである。

以上の面外不安定領域の計算法を用いてケーブルの面外不安定振動特性を明らかにする。

5. ケーブルの面外不安定振動

(1) 水平ケーブルの場合

Fig. 3 に中央点集中載荷によるケーブルの面内対称加振の場合のサグ比 $\gamma=0.1$ および伝播速度比 $k=30$ の面内非線形応答と面外振動が生ずる不安定領域を示す。図において横軸は外力の加振振動数を対応する弦の1次固有振動数で無次元化した振動数比 ω で，縦軸はケーブル中央点における無次元振幅比Aである。図中の実線は安定な（実現しうる）外力と同位相の面内非線形応答を，また破線は外力と逆位相の安定な面内非線形応答を表わしたものである。図中の ///（または ///）の記号は，応答曲線が鉛直接線をもつ位置

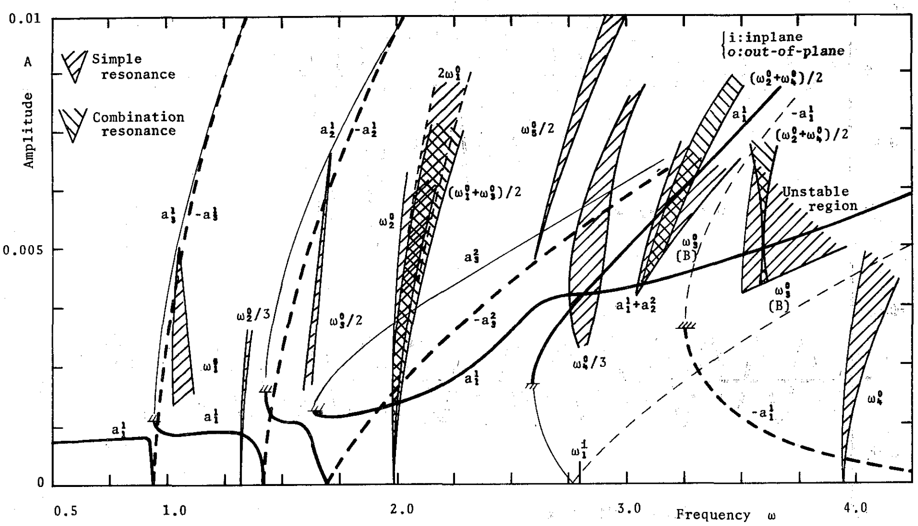


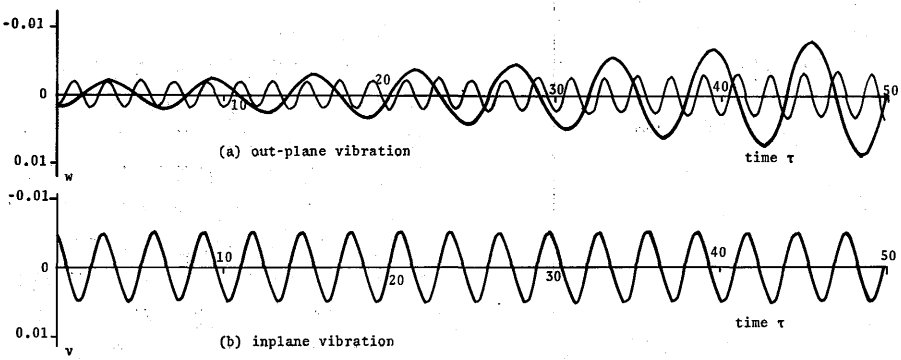
Fig. 3　Unstable regions of out-of-plane vibrations of cable with k=30, $\gamma=0.1$ and $\theta=0^{0}$ under symmetric inplane forcing

を示すもので，斜線部内の応答は不安定な（実現しない）振幅である。安定な応答曲線上に付した記号 a_j^n は，面内対称 n 次振動の j 倍の主（$j=1$）もしくは高調（$j\geq1$）波振動が卓越することを意味するものである。$\omega=3.0$ 付近の応答がケーブルの1次の主共振である。

以上の安定な面内非線形応答のもとに生ずる面外不安定領域をプロットすれば，図中の斜線部に示すとおりである。右上りの斜線部が単純共振に対応し，右下りの斜線部が結合共振に対応するものである。不安定領域に示した記号 $2\omega i/k$ は i 次面外振動の k 番目の不安定領域を示すものである。また，$(\omega i+\omega j)/k$ は面外i次と j 次の結合共振の k 番目の不安定領域を示すものである。

Fig. 4 (a)，(b) に面外不安定領域内の単純共振と結合共振の時間的変動の例である。単純共振は，特定の1つの面外振動が時間とともに発散する振動である。結合共振は，2つの面外振動がともに時間とともに発散する振動である。発散振動の振幅の増加は，固有値 Re (λ) の大きさに依存し，一般に不安定領域の幅が広いほど Re (λ) の値は大きくなる。

ケーブルの面内対称加振の場合には，式(12)の $[D_p^1]$，$[D_p^2]$ および $[D_p^3]$ のすべての行列がゼロでないためにすべての不安定領域が存在する。結合共振については，面外振動形が対称－対称もしくは逆対称－逆対称の組み合せは存在するが，対称－逆対称の組み合せ



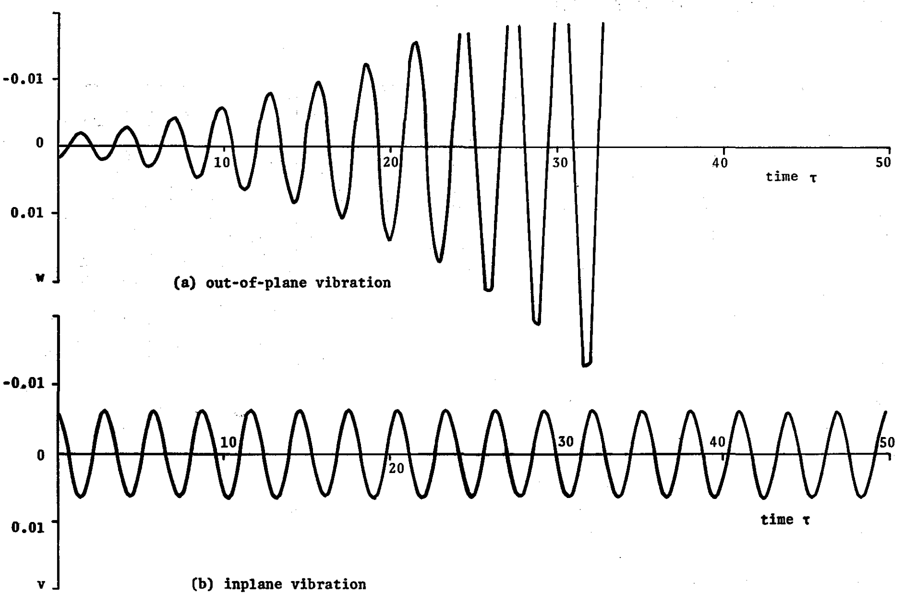


Fig. 4 Wave form of stable motion of cable with k=30, γ=0.1 and θ=0°
under anti-symmetric forcing

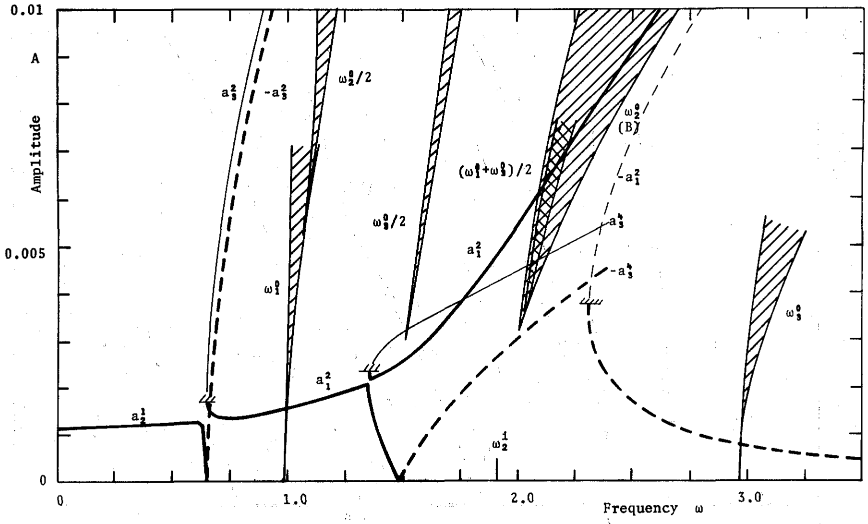


Fig. 5　Unstable regions of out-of-plane vibratoins of cable with k=30, γ=0.1 and θ=0° under anti-symmetric forcing

は存在しない。次に面外振動の不安定領域の幅に注目すれば，$\omega=3.0$ 付近に生ずる面外3次振動の副不安定領域が最も広いと言える。このとき，ケーブルの面内と面外の振動形は良く似ている。図のように不安定領域の幅は結合共振よりも単純共振が広いと言える。

次に面内逆対称加振の場合の面内非線形応答と面外不安定領域を Fig. 5 に示す。面内逆対称加振の場合にはケーブルの非線形項に2次の非線形項が含まれないので，3次の非線形項のみからなる。また，面内非線形応答には2倍の高調波応答および静的応答は含まれない。したがって，主共振の他に3倍の高調波応答のみが含まれる。この場合，係数行列 $[D_p^1]$，$[D_p^3]$ がゼロ行列となるために，$k=1$，3 に対応する奇数次の不安定領域は存在しない（このことはすでに山口らの研究によって明らかにされている。）

図のように，面内逆対称加振の場合の不安定領域の種類は対称加振の場合よりも少なく，偶数次のみ不安定領域が得られている。本ケースにおいても $\omega=2.0$ 付近の2次の逆対称振動近傍の面外2次振動の副不安定領域が最も広くなっている。対称加振の場合と同様に，単純共振の場合が結合共振の場合よりも広くなっている。

(2)　傾斜ケーブルの面外不安定領域

Fig. 6 は $k=30$，$\gamma=0.1$ および $\theta=30°$ の傾斜ケーブルの面外非線形応答と面外不安定領域である。傾斜ケーブルには面内，面外ともに振動形に対称性がないので，荷重状態は 3/10 点を集中載荷している。傾斜ケーブルの非線形応答には2次および3次の非線形項が同時に含まれるために，水平ケーブルの対称加振による面内非線形応答と同じ非線形応答特性を有する。また，構造形式に対称性がないので，水平ケーブルの場合と異なって結合共振はすべての面外振動形の組み合せから構成されている。本例においても $\omega=2.0$ 付近の面内1次の主共振付近に生ずる面内2次振動形の不安定領域の幅が最も広くなっている。

(3)　弦の面外不安定領域

ケーブルと弦の面外不安定領域の相違を比較するために，サグ比 $\gamma=0.001$ のケーブルの面内対称加振の場合の面外不安定領域を示せば，Fig. 7 に示すとおりである。弦の場合，2次の非線形項が含まれないために，いずれの場合も2倍の高調波応答および静的応答は含まれない。面内逆対称加振の場合には，Fig. 5 のケーブルの面外不安定領域とほぼ合致するため省略されている。これはケーブルの逆対称加振の場合には2次の非線形項が効いてこないために，テーブルと弦と弦の力学的区別がなくなるためである。

Fig. 7 の面内対称加振の場合には，Fig. 3 のケーブルの面内対称加振の場合とは面内非線形応答曲線および面外不安定領域とも根本的に異なる。ケーブルの面内線形振動特性および非線形振動特性がサグ比によって大きく変動するためである。$\gamma=0.1$ が非線形性が最も大きくなる場合に対応している。弦の場合は，$\gamma=0.1$ のケーブルよりもかなり非線形性が小さ

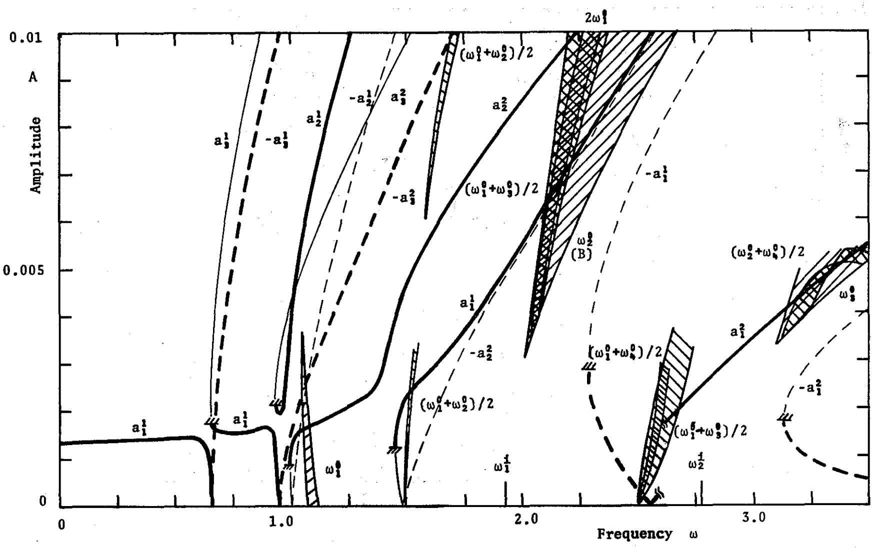


Fig. 6 Unstable regions of out-of-plane vibrations of cable with k=30, $\gamma=0.1$ and $\theta=30^0$

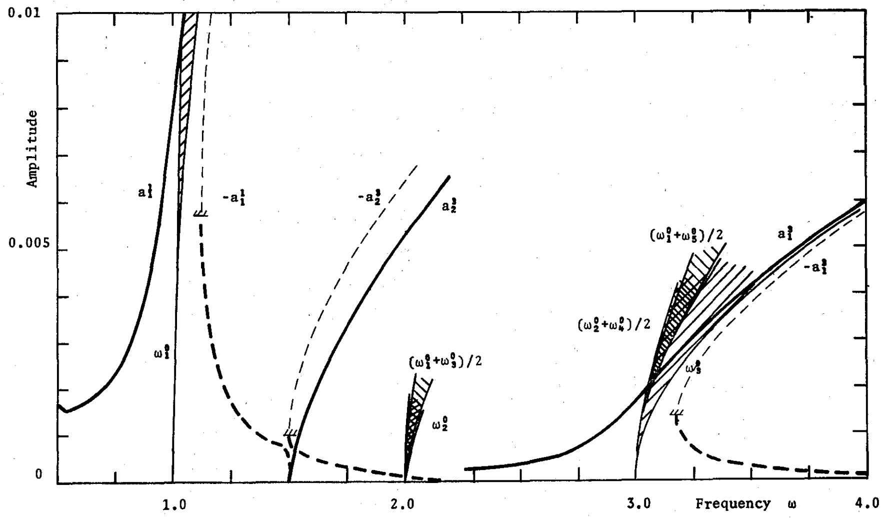


Fig. 7 Unstable regions of out-of-plane vibrations of cable wlth k=30, $\gamma=0.001$ and $\theta=0^0$ under symmetric inplane forcing

いためである。したがって，面外不安定領域もケーブルの場合よりも狭くなっている。

5 不安定領域に及ぼす減衰の影響

これまでは，減衰がない場合の面外不安定領域を調べてきたが，実際の構造系においては減衰力が存在するから，面外不安定領域に及ぼす減衰の影響を調べる必要がある。水平ケーブル（$k=30$, $\gamma=0.1$, $\theta=0^0$）の面内逆対称加振による代表的な面外不安定領域について，減衰定数 h_i を変化させて減衰の影響の単純共振と結合共振の各々に対して示せば Fig. 8, 9 に示すとおりである。Fig. 8 の単純共振の Type A と Type B の不安定領域は減衰の増大とともに幅の狭い不安定領域は安定領域に変えられる。Type B の右側の不安定領域の境界は由自振動の背骨曲線で与えられるために，減衰の影響を受けない。一方，Fig. 9

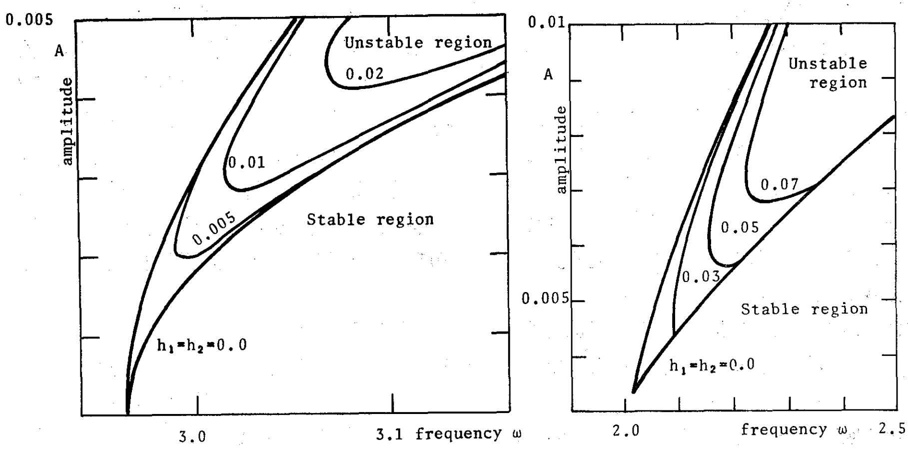


Fig. 8 Effect of damping on unstable region of simple parametric resonance

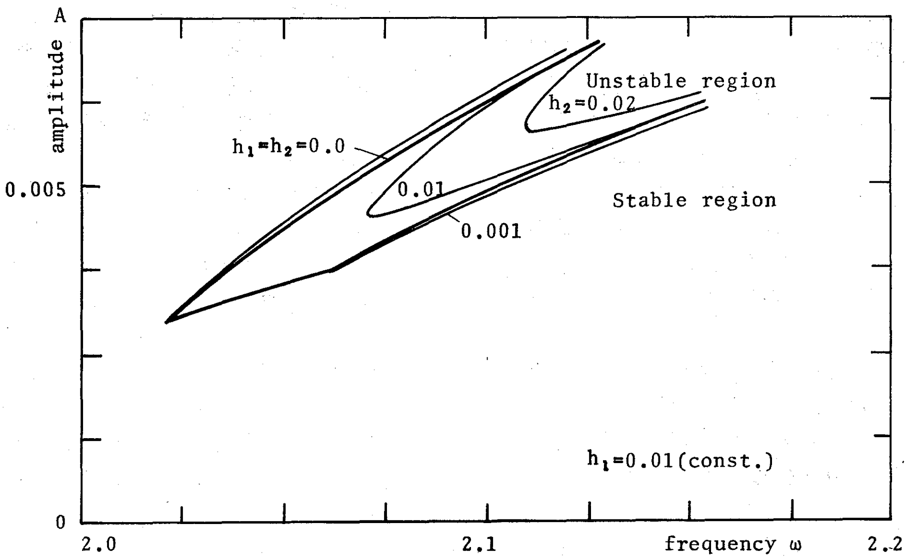


Fig. 9 Effect of damping on unstable region of combination resonance

の $(\omega_1^0+\omega_3^0)/2$ の結合共振の場合は1次の減衰数 h_1 =0.01 を一定にして，h_2 をパラメーターにプロットしたものである。図のように減衰の効果は結合共振の場合にも一般に不定安領域を安定に変えるが，h_2 が小さいときには減衰の存在によって不安定領域は広められることがわかる。これは減衰による脱安定化効果と呼ばれているが，ケーブルの場合にも現われていることがわかる。

ケーブルの面外不安定領域はケーブルの応答曲線の傾き，すなわち非線形項が大きい場合に広くなり，このとき面内振動形とよく似た波形をもつ面外振動の不安定振動が生ずることがこれまでの計算結果から予想される。面内非線形自由振動の計算結果によれば，水平ケーブルの対称振動では $\gamma=0.1$ 付近が最も非線形性が大きいことがわかっているので，Fig. 3 に示した $\omega=3.0$ 付近の不安定領域がケーブルにおいて最も広いことが予想される。逆に，$\gamma=0.026$, 0.04 付近のサグ比のケーブルでは弦よりも不安定領域は狭くなることが予想される。以上のようにケーブルは弦の場合と異なってサグ比によって固有振動特性の他に非線形振動特性も変化すると言える。

6. 結　論

本論文は面内加振を受けるケーブルの面外振動を多自由度系の係数励振振動問題の不安定領域を求める解法を用いて解析的に明らかにしたものである。本解法

の特徴として次のことがあげられる。

(1) ケーブルの面内非線形応答をケーブルの非線形振動特性を十分評価した解を求めている。

(2) 面外不安定振動を多自由度系として取り扱い，多自由度系の係数励振振動系の単純共振，結合共振を同時に求めることができる。

(3) 安定判別の解析が行列の固有値問題に帰着されるために，不安定領域の解析が統一的に行なえる。

(4) 解析には摂動法，漸近法などの微小パラメーター法を用いていないので，面内非線形項および係数励振項のパラメーターが小さくない場合にも適用できる。

(5) 単純共振の他に結合共振に及ぼす減衰の影響を評価することができる。

ケーブルの面外不安定領域について得られたいくつかの知見をまとめると，

(6) ケーブルの面外不安定領域は単一の面外振動形をもつ単純共振の他に2個の面外振動形をもつ和形の結合共振の2種類が存在する。2次および3次の非線形項をもつケーブルの非線形特性から弦の場合と異なって主，副の不安定領域が同時に存在する。

(7) 面外不安定領域の幅は，一般に単純共振の方が結合共振よりも広い。特に面内振動の主共振近傍で面内振動形と似た面外振動形をもつ面外振動の不安定領域が最も広い。

(8) ケーブルの面外不安定領域はケーブルのサグ比の影響を著しく受ける。サグ比が0.1付近の水平ケーブルの面内対称加振の場合の不安定領域が最も広くなる。逆にサグ比が 0.02～0.05 のケーブルの面外不安定領域は狭いことが予想される。

(9) 減衰の影響は一般に単純共振および結合共振の不安定領域の幅の狭い部分を安定領域に変えるが，結合共振の不安定領域は減衰の大きさによっては広められることがある。

本研究には，長崎大学の情報処理センターの FACOM180－ADⅡ を使用したことを付記する。

なお，本研究では面外振動が生ずる不安定領域のみを求めているが，不安定振動が生じた後の面外振動の振幅は定めることはできない。これを明らかにするためには，面外の運動方程式の非線形項を考慮して，面外加振による面内・面外連成振動問題として解析し，面外振動が生ずる分岐点と分岐後の面内・面外非線形連成応答を明らかにする必要がある。

参考文献

1） 山口，宮田，伊藤：ケーブル系の非線形動的応答における一挙動，第24回構造工学シンポジウム論文集，1978.2，p. 55～61

2） 山口，宮田，伊藤：ケーブル系の動的挙動に関する2,3の考察，土木学会第33回年次学術講演会講演概要集，昭和53年10月，pp. 244～245

3） 山口，清水，伊藤：ケーブルの非線形動的応答に関する実験的研究，土木学会第36回年次学術講演会講演概要集，第1部，昭和56年10月，pp. 371～372

4） Takahashi, K. : An Approach to Investigate the Instability of the Multiple Degree-of Freedom Parametric Dynamic Sytems, Journal of Sound and Vibration, Vol. 78, pp. 519-529, 1981

5） Takahashi, K. : Further Results of Instability of Parametric Dynamic Systems Including Different Dampings, Journal of Sound and Vibration, Vol. 85 (to appear)

6） Hsu, C. H. : On the Parametri Excitations of Dynamic Systems Having Multiple Degrees of Freedom, J Appl. Mech Vol. 30, 1963, pp. 363-372