

リブアーチの面外耐荷力解析

若菜 啓孝*・青井 俊憲**
崎山 毅***

An analysis of Out-plane Load Carrying Capacity of Rib Arch

by

Hirotaka WAKANA*, Toshinori AOI** and Takeshi SAKIYAMA***

In this paper, out-plane load carrying capacity of rib arch were analyzed on the discrete general solution of fundamental differential equation based on finite deformation theory.

As the results of numerical analysis concerning out-plane load carrying capacity, the effect of span rise, ratio, plane shape of arch axis and initial inperfection were clarified.

1. 序 言

近年、構造物の合理的設計の推進に伴って、アーチ橋においても長大支間と軽量構造を持つ形式が数多く見受けられるようになってきている。特にこのような形式のリブアーチ橋においては、極度に細長い構造となるため、アーチ面内よりむしろ側方への安定問題が支配的となり、このことに関しても面内の安定性に対すると同様に、十分に考慮が払われなければならない。アーチの面内の安定問題についての研究は、古くから数多く行なわれているが、面外(アーチ面に垂直方向)の安定問題に関する研究は、比較的少ないように思われる。

アーチリブが近似的に軸圧縮状態にある場合、2軸対称断面であってもアーチ面内座屈の他に、アーチ面外への曲げ変形とねじれ変形とが連成した“曲げねじれ座屈”が起きることが知られている。アーチの横方向への安定性は、この曲げねじれ座屈に支配されることが多い。アーチの曲げねじれ座屈については、薄肉板アーチを扱った S. Timoshenko¹⁾の論文などがその

初期のものである。深沢²⁾は、薄肉曲線桁の変位一荷重支配方程式を基礎として、円弧アーチの曲げねじれ座屈支配方程式を導き、半径方向に等分布荷重が作用する場合の座屈荷重を数値計算で求めている。一方、薄木³⁾らは、有限なねじれを考慮し、アーチと曲線桁を包括した座屈解析及び有限変位解析を行っている。

このように、有限変位理論が確立された現在、幾何学的非線形性のみでなく材料非線形性をも考慮したいわゆる複合非線形問題へと研究は進んでいるが、材料の応力-ひずみ関係、部材軸線形状、支持条件および載荷条件などの任意性への配慮が、まだ十分でないように思われる。

本論文は、任意形アーチに関して、幾何学のおよび材料の非線形性を考慮し、増分理論を用いて、面外有限変形理論から導かれた増分形基礎方程式の離散的な一般解に基づいて、面外耐荷力解析を行ったものである。なお、材料の非弾性化に基づく剛性の低下は、断面細分割法によって求めることとする。

昭和58年 4月30日受理

*構造工学科 (Department of Structural Engineering)

**元大学院生

***構造工学科 (Department of Structural Engineering)

2. 増分形基礎微分方程式

アーチの変形状態における力の平衡条件式¹⁾に基づいて、増分理論による有限変形解析におけるアーチの基礎微分方程式が誘導される。

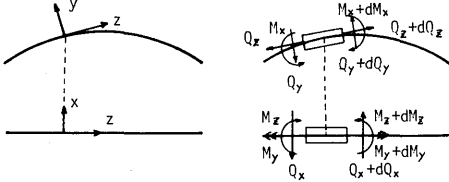


Fig. 1 Arch element.

Fig. 1 に示すように x , y 軸方向のせん断力を各々 Q_x , Q_y とし軸力を Q_z とする。また、各々の軸のまわりの曲げモーメントを M_x , M_y とし、合ねじりモーメントを M_z とする。そして、 x , y , z 軸方向の変位を u_x , u_y , u_z とし、接線回転角を θ_x , θ_y , z 軸まわりのねじれ角を θ_z とする。アーチが重力に基づく荷重の作用を受けた場合、次の関係式が成り立つ。

$$p_x^* = p_x + p_y\theta_z - p_z\theta_y \quad (1 \cdot a)$$

$$p_y^* = -p_x\theta_z + p_y - p_z\theta_x \quad (1 \cdot b)$$

$$p_z^* = p_x\theta_y + p_y\theta_x + p_z \quad (1 \cdot c)$$

ただし、 p_x^* , p_y^* , p_z^* は変形後の荷重強度、 p_x , p_y , p_z は、変形前の荷重強度である。

アーチの微小要素の変形前後の関係式および増分理論を応用することにより、荷重増分 Δp_x , Δp_y , Δp_z に対する断面力の増分量 $\Delta Q_x \sim \Delta M_z$ を規定する微分方程式として増分形の平衡方程式は次の 6 式となる。

$$\begin{aligned} \frac{d\Delta Q_x}{ds} - K_{z0}\Delta Q_y + K_{y0}\Delta Q_z - Q_y \frac{\Delta M_z}{GJ} + Q_z\Delta\phi_y \\ + (p_y + \Delta p_y)\Delta\theta_z - (p_z + \Delta p_z)\Delta\theta_y + \Delta p_x \\ - \frac{\Delta M_z\Delta Q_y}{GJ} + \Delta Q_z\Delta\phi_y = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d\Delta Q_y}{ds} - K_{x0}\Delta Q_z + K_{z0}\Delta Q_x - Q_x \frac{\Delta M_z}{GJ} - Q_z\Delta\phi_x \\ - (p_z + \Delta p_z)\Delta\theta_z + \Delta p_y - (p_x + \Delta p_x)\Delta\theta_x \\ - \frac{\Delta M_z\Delta Q_x}{GJ} - \Delta Q_z\Delta\phi_x = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d\Delta Q_z}{ds} - K_{y0}\Delta Q_x + K_{x0}\Delta Q_y - Q_x\Delta\phi_y + Q_y\Delta\phi_x \\ + (p_x + \Delta p_x)\Delta\theta_y + (p_y + \Delta p_y)\Delta\theta_x + \Delta p_z \\ - \Delta Q_x\Delta\phi_y + \Delta Q_y\Delta\phi_x = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d\Delta M_x}{ds} - K_{z0}\Delta M_y + \left(K_{y0} - \frac{M_y}{GJ}\right)\Delta M_z + M_z\Delta\phi_y \\ - \Delta Q_y - \frac{\Delta M_z\Delta M_y}{GJ} + \Delta\phi_y\Delta M_z = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d\Delta M_y}{ds} + K_{z0}\Delta M_x + \left(-K_{x0} + \frac{M_x}{GJ}\right)\Delta M_z - M_z\Delta\phi_x \\ + \Delta Q_x - \Delta\phi_x\Delta M_z + \frac{\Delta M_z\Delta M_x}{GJ} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d\Delta M_z}{ds} - K_{y0}\Delta M_x + K_{x0}\Delta M_y - M_x\Delta\phi_y - M_y\Delta\phi_x \\ - \Delta\phi_y\Delta M_x + \Delta\phi_x\Delta M_y = 0 \end{aligned}$$

(2 · 1 ~ 2 · f)

ただし、 K_{x0} , K_{y0} は x , y 軸に関する曲率であり、 K_{z0} は、ねじれ率である。また、 $\Delta\phi_x$, $\Delta\phi_y$ はそれぞれの曲率の変化量で、 GJ はねじり剛性である。

次に、微小ひずみ、平面保持およびせん断変形無視の仮定のもとに、荷重増分に対して材料非線形性を考慮した断面力と変形との関係が導かれる。

アーチ任意点における軸線の伸び率 $\Delta\epsilon_0$ 、曲率の変化量 $\Delta\phi_x$, $\Delta\phi_y$ は次の各式で与えられる。

$$\Delta\epsilon_0 = \frac{d\Delta u_z}{ds} - K_{y0}\Delta u_x + K_{x0}\Delta u_y \quad (3 \cdot a)$$

$$\Delta\phi_x = K_{y0}\Delta\theta_z - \frac{d\Delta\theta_z}{ds} - K_{z0}\Delta\theta_y \quad (3 \cdot b)$$

$$\Delta\phi_y = -K_{x0}\Delta\theta_z + \frac{d\Delta\theta_y}{ds} - K_{z0}\Delta\theta_x \quad (3 \cdot c)$$

また、平面保持の仮定により、断面内任意点の軸ひずみ $\Delta\epsilon$ は、図心からの距離をそれぞれ x , y とし、 $\Delta\epsilon = \Delta\epsilon_0 + \Delta\phi_x y - \Delta\phi_y x$ (4 · a) として与えられるゆえ、次の関係式が成り立つ。

$$\Delta Q_z = \int \Delta\sigma dA = E(A\Delta\epsilon_0 + G_x\Delta\phi_x - G_y\Delta\phi_y) \quad (5 \cdot a)$$

$$\Delta M_x = \int \Delta\sigma \cdot y dA = E(G_x\Delta\epsilon_0 + I_x\Delta\phi_x - I_{xy}\Delta\phi_y) \quad (5 \cdot b)$$

$$\Delta M_y = -\int \Delta\sigma \cdot x dA = E(-G_y\Delta\epsilon_0 - I_{xy}\Delta\phi_x + I_y\Delta\phi_y) \quad (5 \cdot c)$$

$$\Delta M_z = GJ\left(\frac{d\Delta\theta_z}{ds} + K_{x0}\Delta\theta_y + K_{y0}\Delta\theta_x\right) \quad (5 \cdot d)$$

ここに、 E , G , A はそれぞれ、弾性定数、せん断弾性定数、断面積である。また、 G_x , G_y は断面一次モーメント、 I_x , I_y は断面二次モーメント、 I_{xy} は、相乗モーメントである。

また、接線回転角の増分と変位の増分との間には、次の関係式が成り立つ。

$$\Delta\theta_y = \frac{d\Delta u_x}{ds} - K_{z0}\Delta u_y + K_{y0}\Delta u_z \quad (5 \cdot e)$$

$$\Delta\theta_x = \frac{d\Delta u_y}{ds} - K_{x0}\Delta u_x + K_{z0}\Delta u_z \quad (5 \cdot f)$$

上記の各式の解析において、次のような無次元量を導入する。アーチ支間、アーチ軸長、基準断面積、基

準断面二次モーメントをそれぞれ、 L 、 ℓ 、 A_0 、 I_0 とし、アーチ軸線座標を s とする。

$$\begin{aligned} \Delta Q_x^* &= \frac{-L^2}{EI_0} \Delta Q_x, \Delta Q_y^* = \frac{-L^2}{EI_0} \Delta Q_y, \Delta Q_z^* = \frac{-L^2}{EI_0} \Delta Q_z \\ \Delta M_x^* &= \frac{-L}{EI_0} \Delta M_x, \Delta M_y^* = \frac{-L}{EI_0} \Delta M_y, \Delta M_z^* = \frac{-L}{EI_0} \Delta M_z \\ \Delta u_x^* &= \frac{\Delta u_x}{L}, \Delta u_y^* = \frac{\Delta u_y}{L}, \Delta u_z^* = \frac{\Delta u_z}{L}, \eta = \frac{s}{L} \end{aligned}$$

なる無次元量を導入し、簡単のために*をはぶくと、式(2・a)～(2・f)は、次のように書換えられる。

$$\begin{aligned} \frac{d\Delta Q_x}{d\eta} &= \frac{\ell}{L} \left[K_{z_0} \Delta Q_y - K_{y_0} \Delta Q_x - \frac{EI_0}{GJ} Q_y \Delta M_z \right. \\ &\quad \left. - Q_z \Delta \phi_y - \frac{EI_0}{GJ} \Delta M_z \Delta Q_y + (p_y + \Delta p_y) \Delta \theta_z \right. \\ &\quad \left. - (p_z + \Delta p_z) \Delta \theta_y + \Delta p_x - \Delta Q_z \Delta \phi_y \right] \\ \frac{d\Delta Q_y}{d\eta} &= \frac{\ell}{L} \left[K_{x_0} \Delta Q_z - K_{z_0} \Delta Q_x + Q_z \Delta \phi_x + \frac{EI_0}{GJ} Q_x \Delta M_z \right. \\ &\quad \left. + \frac{EI_0}{GJ} \Delta M_z \Delta Q_x - (p_x + \Delta p_x) \Delta \theta_z \right. \\ &\quad \left. - (p_z + \Delta p_z) \Delta \theta_x + \Delta p_y + \Delta Q_z \Delta \phi_x \right] \\ \frac{d\Delta Q_z}{d\eta} &= \frac{\ell}{L} \left[K_{y_0} \Delta Q_x - K_{x_0} \Delta Q_y + Q_x \Delta \phi_y - Q_y \Delta \phi_x \right. \\ &\quad \left. + (p_x + \Delta p_x) \Delta \theta_y + (p_y + \Delta p_y) \Delta \theta_x + \Delta p_z \right. \\ &\quad \left. + \Delta Q_x \Delta \phi_y - \Delta Q_y \Delta \phi_x \right] \\ \frac{d\Delta M_x}{d\eta} &= \frac{\ell}{L} \left[K_{z_0} \Delta M_y + \left(-K_{y_0} - \frac{EI_0}{GJ} M_y \right) \Delta M_z \right. \\ &\quad \left. - M_z \Delta \phi_y + \Delta Q_y - \frac{EI_0}{GJ} \Delta M_z \Delta M_y - \Delta \phi_y \Delta M_z \right] \\ \frac{d\Delta M_y}{d\eta} &= \frac{\ell}{L} \left[-K_{z_0} \Delta M_x + \left(K_{x_0} + \frac{EI_0}{GJ} M_x \right) \Delta M_z \right. \\ &\quad \left. + M_z \Delta \phi_x - \Delta Q_x + \Delta \phi_x \Delta M_z + \frac{EI_0}{GJ} \Delta M_z \Delta M_x \right] \\ \frac{d\Delta M_z}{d\eta} &= \frac{\ell}{L} \left[K_{y_0} \Delta M_x - K_{x_0} \Delta M_y + M_x \Delta \phi_y - M_y \Delta \phi_x \right. \\ &\quad \left. + \Delta \phi_y \Delta M_x - \Delta \phi_x \Delta M_y \right] \end{aligned} \quad (6 \cdot a \sim 6 \cdot f)$$

また、他の各式の無次元化も同様に行うと、

$$\begin{aligned} \frac{d\Delta \theta_x}{d\eta} &= \frac{\ell}{L} [K_{y_0} \Delta \theta_z - K_{z_0} \Delta \theta_y - \Delta \phi_x] \\ \frac{d\Delta \theta_y}{d\eta} &= \frac{\ell}{L} [K_{x_0} \Delta \theta_z + K_{z_0} \Delta \theta_x + \Delta \phi_y] \\ \frac{d\Delta \theta_z}{d\eta} &= \frac{\ell}{L} \left[-K_{y_0} \Delta \theta_x - K_{x_0} \Delta \theta_y - \frac{EI_0}{GJ} \Delta M_z \right] \\ \frac{d\Delta u_x}{d\eta} &= \frac{\ell}{L} [K_{z_0} \Delta u_y - K_{y_0} \Delta u_z + \Delta \theta_y] \\ \frac{d\Delta u_y}{d\eta} &= \frac{\ell}{L} [K_{x_0} \Delta u_z - K_{z_0} \Delta u_x + \Delta \theta_x] \end{aligned}$$

$$\frac{d\Delta u_z}{d\eta} = \frac{\ell}{L} [K_{y_0} \Delta u_x - K_{x_0} \Delta u_y + \Delta \varepsilon_0] \quad (6 \cdot g \sim 6 \cdot l)$$

なお、式(6・a～6・l)において、断面力の増分量の積の非線形項は、各荷重増分段階における不平衡力の補正項である。

次に、図心の軸ひずみ $\Delta \varepsilon_0$ 、および曲率の変化量 $\Delta \phi_x$ 、 $\Delta \phi_y$ 。断面力の増分量であらわす。(5・a～5・c)より

$$\begin{bmatrix} -\Delta Q_z \\ -\Delta M_x \\ -\Delta M_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2 \frac{EA}{EA_0} \gamma_1 & \frac{EI_x}{EI_0} \gamma_4 - \frac{EI_x}{EI_0} \gamma_5 \\ \frac{EI_x}{EI_0} \gamma_4 & \frac{EI_x}{EI_0} \gamma_2 - \frac{EI_x}{EI_0} \gamma_6 \\ -\frac{EI_x}{EI_0} \gamma_5 & -\frac{EI_x}{EI_0} \gamma_6 & \frac{EI_y}{EI_0} \gamma_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \varepsilon_0 \\ \Delta \phi_x \\ \Delta \phi_y \end{bmatrix}$$

ただし、

$$\begin{aligned} a &= \sqrt{\frac{A_0}{I_0}} L \quad (\text{細長比}) \\ \gamma_1 &= \frac{\int EdA}{EA} & \gamma_2 &= \frac{\int Ey^2 dA}{EI_x} & \gamma_3 &= \frac{\int Ex^2 dA}{EI_y} \\ \gamma_4 &= \frac{L \int Ey dA}{EI_x} & \gamma_5 &= \frac{L \int Ex dA}{EI_x} & \gamma_6 &= \frac{\int Exy dA}{EI_x} \end{aligned}$$

したがって、逆行列を求めると、次式が得られる。

$$\begin{bmatrix} \Delta \varepsilon_0 \\ \Delta \phi_x \\ \Delta \phi_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{13} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \beta_{23} \\ \beta_{31} & \beta_{32} & \beta_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\Delta Q_z \\ -\Delta M_x \\ -\Delta M_y \end{bmatrix} \quad (7)$$

3. 離散的な一般解

任意軸線形状を有するアーチ部材の有限変形問題における基礎方程式(6・a～6・l)のアーチ軸線上の m 等分点 i における離散的な一般解⁷⁾は、(8)式において与えられる。

任意点 i における諸量 $\Delta Q_{x(i)}, \dots, \Delta u_{z(i)}$ を左支点における諸量 $\Delta Q_{x(0)}, \dots, \Delta u_{z(0)}$ に関係づける要素 a_{ki}, \dots, z_{ki} は、次の各式にて与えられる。

$$\begin{aligned} a_{ki} &= \delta_{k1} + \nu \sum_{j=0}^i \alpha_{ij} [K_{z_0(j)} b_{kj} + A_{3(j)} c_{kj} \\ &\quad + Q_{z(j)} \beta_{32(j)} d_{kj} + Q_{z(j)} \beta_{33(j)} e_{kj} + A_{6(j)} f_{kj} \\ &\quad + \{p_{y(j)} + \Delta p_{y(j)}\} t_{kj} - \{p_{z(j)} + \Delta p_{z(j)}\} s_{kj} + A_{13(j)} \delta_{k13}] \\ b_{ki} &= \delta_{k2} + \nu \sum_{j=0}^i \alpha_{ij} [-K_{z_0(j)} a_{kj} + B_{3(j)} c_{kj} \\ &\quad - Q_{z(j)} \beta_{22(j)} d_{kj} - Q_{z(j)} \beta_{23(j)} e_{kj} + B_{6(j)} f_{kj} \\ &\quad - \{p_{x(j)} + \Delta p_{x(j)}\} t_{kj} - \{p_{z(j)} + \Delta p_{z(j)}\} r_{kj} + B_{13(j)} \delta_{k13}] \\ c_{ki} &= \delta_{k3} + \nu \sum_{j=0}^i \alpha_{ij} [K_{y_0(j)} a_{kj} - K_{x_0(j)} b_{kj} \\ &\quad + C_{3(j)} c_{kj} + C_{4(j)} d_{kj} + C_{5(j)} e_{kj} \\ &\quad + \{p_{x(j)} + \Delta p_{x(j)}\} s_{kj} + \{p_{y(j)} + \Delta p_{y(j)}\} r_{kj} + C_{13(j)} \delta_{k13}] \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} \Delta Q_{x(i)} \\ \Delta Q_{y(i)} \\ \Delta Q_{z(i)} \\ \Delta M_{x(i)} \\ \Delta M_{y(i)} \\ \Delta M_{z(i)} \\ \Delta \theta_{x(i)} \\ \Delta \theta_{y(i)} \\ \Delta \theta_{z(i)} \\ \Delta u_{x(i)} \\ \Delta u_{y(i)} \\ \Delta u_{z(i)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1i} & a_{2i} & a_{3i} & a_{4i} & a_{5i} & a_{6i} & a_{7i} & a_{8i} & a_{9i} & a_{10i} & a_{11i} & a_{12i} \\ b_{1i} & b_{2i} & b_{3i} & b_{4i} & b_{5i} & b_{6i} & b_{7i} & b_{8i} & b_{9i} & b_{10i} & b_{11i} & b_{12i} \\ c_{1i} & c_{2i} & c_{3i} & c_{4i} & c_{5i} & c_{6i} & c_{7i} & c_{8i} & c_{9i} & c_{10i} & c_{11i} & c_{12i} \\ d_{1i} & d_{2i} & d_{3i} & d_{4i} & d_{5i} & d_{6i} & d_{7i} & d_{8i} & d_{9i} & d_{10i} & d_{11i} & d_{12i} \\ e_{1i} & e_{2i} & e_{3i} & e_{4i} & e_{5i} & e_{6i} & e_{7i} & e_{8i} & e_{9i} & e_{10i} & e_{11i} & e_{12i} \\ f_{1i} & f_{2i} & f_{3i} & f_{4i} & f_{5i} & f_{6i} & f_{7i} & f_{8i} & f_{9i} & f_{10i} & f_{11i} & f_{12i} \\ r_{1i} & r_{2i} & r_{3i} & r_{4i} & r_{5i} & r_{6i} & r_{7i} & r_{8i} & r_{9i} & r_{10i} & r_{11i} & r_{12i} \\ s_{1i} & s_{2i} & s_{3i} & s_{4i} & s_{5i} & s_{6i} & s_{7i} & s_{8i} & s_{9i} & s_{10i} & s_{11i} & s_{12i} \\ t_{1i} & t_{2i} & t_{3i} & t_{4i} & t_{5i} & t_{6i} & t_{7i} & t_{8i} & t_{9i} & t_{10i} & t_{11i} & t_{12i} \\ x_{1i} & x_{2i} & x_{3i} & x_{4i} & x_{5i} & x_{6i} & x_{7i} & x_{8i} & x_{9i} & x_{10i} & x_{11i} & x_{12i} \\ y_{1i} & y_{2i} & y_{3i} & y_{4i} & y_{5i} & y_{6i} & y_{7i} & y_{8i} & y_{9i} & y_{10i} & y_{11i} & y_{12i} \\ z_{1i} & z_{2i} & z_{3i} & z_{4i} & z_{5i} & z_{6i} & z_{7i} & z_{8i} & z_{9i} & z_{10i} & z_{11i} & z_{12i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta Q_{x(0)} \\ \Delta Q_{y(0)} \\ \Delta Q_{z(0)} \\ \Delta M_{x(0)} \\ \Delta M_{y(0)} \\ \Delta M_{z(0)} \\ \Delta \theta_{x(0)} \\ \Delta \theta_{y(0)} \\ \Delta \theta_{z(0)} \\ \Delta u_{x(0)} \\ \Delta u_{y(0)} \\ \Delta u_{z(0)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{13i} \\ b_{13i} \\ c_{13i} \\ d_{13i} \\ e_{13i} \\ f_{13i} \\ r_{13i} \\ s_{13i} \\ t_{13i} \\ x_{13i} \\ y_{13i} \\ z_{13i} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 d_{ki} &= \delta_{k4} + \nu \sum_{j=0}^i \alpha_{ij} [b_{kj} + M_{z(j)} \beta_{31(j)} C_{kj} \\
 &\quad + M_{z(j)} \beta_{32(j)} d_{kj} + D_{5(j)} e_{kj} + D_{6(j)} f_{kj} + D_{13(j)} \delta_{k13}] \\
 e_{ki} &= \delta_{k5} + \nu \sum_{j=0}^i [-a_{kj} - M_{z(j)} \beta_{21(j)} C_{kj} + E_{4(j)} d_{kj} \\
 &\quad - M_{z(j)} \beta_{23(j)} e_{kj} + E_{6(j)} f_{kj} + E_{13(j)} \delta_{k13}] \\
 f_{ki} &= \delta_{k6} + \nu \sum_{j=0}^i \alpha_{ij} [F_{3(j)} C_{kj} + F_{4(j)} d_{kj} + F_{5(j)} e_{kj} \\
 &\quad + F_{13(j)} \delta_{k13}] \\
 r_{ki} &= \delta_{k7} + \nu \sum_{j=0}^i \alpha_{ij} [K_{y0(j)} t_{kj} - K_{z0(j)} s_{kj} \\
 &\quad + \beta_{21(j)} C_{kj} + \beta_{22(j)} d_{kj} + \beta_{23(j)} e_{kj}] \\
 s_{kj} &= \delta_{k8} + \nu \sum_{j=0}^i \alpha_{ij} [K_{x0(j)} t_{kj} + K_{z0(j)} r_{kj} \\
 &\quad - \beta_{31(j)} C_{kj} - \beta_{32(j)} d_{kj} - \beta_{33(j)} e_{kj}] \\
 t_{ki} &= \delta_{k9} + \nu \sum_{j=0}^i \alpha_{ij} [-K_{y0(j)} r_{kj} - K_{z0(j)} s_{kj} - T_{6(j)} f_{kj}] \\
 x_{ki} &= \delta_{k10} + \nu \sum_{j=0}^i \alpha_{ij} [K_{z0(j)} y_{kj} - K_{y0(j)} z_{kj} + S_{kj}] \\
 y_{ki} &= \delta_{k11} + \nu \sum_{j=0}^i \alpha_{ij} [K_{x0(j)} z_{kj} - K_{z0(j)} x_{kj} + r_{kj}] \\
 z_{ki} &= \delta_{k12} + \nu \sum_{j=0}^i \alpha_{ij} [K_{y0(j)} x_{kj} - K_{z0(j)} y_{kj} \\
 &\quad - \beta_{11(j)} C_{kj} - \beta_{12(j)} d_{kj} - \beta_{13(j)} e_{kj}]
 \end{aligned}$$

δ_{ij} : クロネッカーのデルタ
 $\alpha_{ij} = \lambda_{ij} / 24m$ m ; 等分数
 λ_{ij} ; 積分公式の重み係数⁷⁾

その他の記号は Appendix に記す。

4. 複合非線形問題

材料非線形性の導入にあたって、本解析で用いた主な仮定は次のとおりである。

- (1) 材料は完全弾塑性体である。
- (2) 部材断面の応力状態が非弾性域に入った後も平面保持の法則が成立する。

- (3) 残留ひずみと荷重の増分により生じるひずみは重ね合わせが成立する。
- (4) ねじり剛性の減少は考慮しない。
- (5) せん断ひずみは無視し、垂直ひずみによって、降伏の判定を行う。

本論文においては、 $Q_z - M_x - M_y - \varepsilon - \phi_x - \phi_y$ 関係および剛性の低下率を断面細分割法によって求める。次にその計算手順を示す。

- (1) 部材断面を微小長方形要素に分割する。
- (2) 断面力の増分量 ΔQ_z , ΔM_x , ΔM_y に対する軸ひずみの増分および曲率の変化量を(7)を用いて求める。
- (3) 断面の微小要素に生ずるひずみ $\Delta \varepsilon$ を次式によって求める。

$$\Delta \varepsilon = \Delta \varepsilon_0 + \Delta \phi_x y - \Delta \phi_y x \tag{9}$$

ここに、 $\Delta \varepsilon_0$ は軸ひずみ、 $\Delta \phi_x$, $\Delta \phi_y$ は曲率の変化量、 x , y は図心からの距離である。

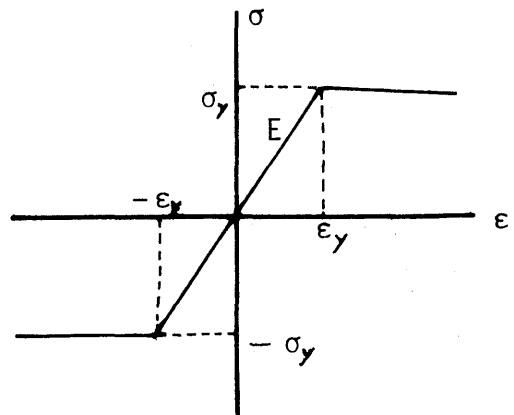


Fig. 2 Stress-Strain Curve.

(4) 残留ひずみ ϵ_r と荷重増分によるひずみ $\Delta\epsilon$ を重ね合わせる。

$$\epsilon = \epsilon_r + \Delta\epsilon \quad (10)$$

(5) Von Mises の降伏条件式を用いて降伏判定を行う。

$$\epsilon < \epsilon_F \quad ; \text{弾性域} \quad (11 \cdot a)$$

$$\epsilon \geq \epsilon_F \quad ; \text{塑性域} \quad (11 \cdot b)$$

(6) 式 (11・b) を満足する場合は、微小要素が塑性したとみなし、微小要素の剛性を零とおき、満足しない場合には、弾性域として元の剛性を持たせ計算する。

このように、アーチの等分割点における断面のすべての微小要素に対して式 (11・a), (11・b) を判定し、伸び剛性および曲げ剛性の減少率を計算する。

5. 数値解析

(1) 既往研究結果との比較

Table 1 Dimension, curvature and material constant.

| ϕ | a (cm) | t (cm) | R (cm) |
|----------------------------------|-------------------------|-------------------------|--------|
| 120° | 1.84 | 0.32 | 80.0 |
| σ_y (kg/cm ²) | E (kg/cm ²) | G (kg/cm ²) | |
| 2400 | 1.97×10^6 | 0.758×10^6 | |

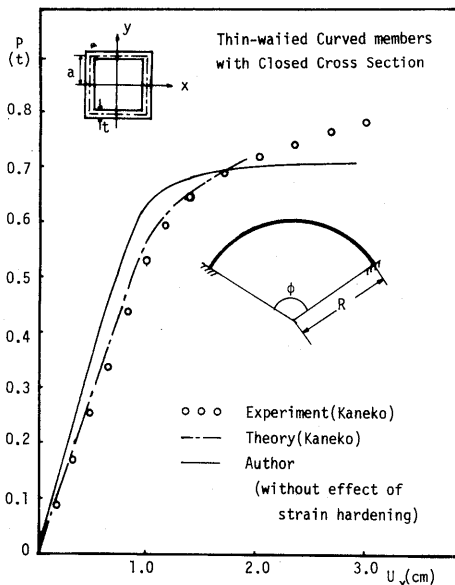


Fig. 3 A comparison between Experimental Result and Theoretical Ones.

本論文における直接的かつ半解析的な計算手法の有効性の検証を目的として、金子ら³⁾の弾塑性解析を行った実験値と本解析値との比較を行う。

断面形状は箱型断面、支持条件は両端固定、載荷形態は円弧中央点に x 方向への集中荷重が作用する円弧モデルであり、供試体は ss41 材で断面寸法および材料定数は Table.1 に示す。

Fig. 3 は、円弧中央点の x 方向変位と荷重の関係を示したものである。これより、金子らの理論値および実験値と本解析値とは、降伏後の挙動に若干の差が生じているが、傾向はよく一致している。

(2) 矩形断面を有するアーチの耐荷性

デッキ荷重を受けるアーチについて、軸線形状および細長比 a が耐荷性におよぼす影響を明らかにする。アーチ部材は、材料定数 $E / \sigma_F = 875$ のものを対象とし、図中の |印は塑性開始、○印は弾性面内分岐座屈、●印は非弾性面内分岐座屈、△印は弾性面外座屈、▲印は非弾性面外座屈、□印は塑性崩壊を表わす。

Fig. 4 は、(2 : 3) の矩形断面を有する 2 ヒンジの円弧および放物線アーチについての荷重変位曲線である。図より、アーチの耐荷力は、面外座屈によって決まることが多く、拱矢比が大きい円弧アーチにおいては、非弾性面外座屈が起こることが示されている。

Fig. 5 (a) および (b) は、細長比 $a = 200$ 、拱矢比 f / L が 0.1, 0.2, 0.3 の円弧および放物線の 2 ヒンジアーチ

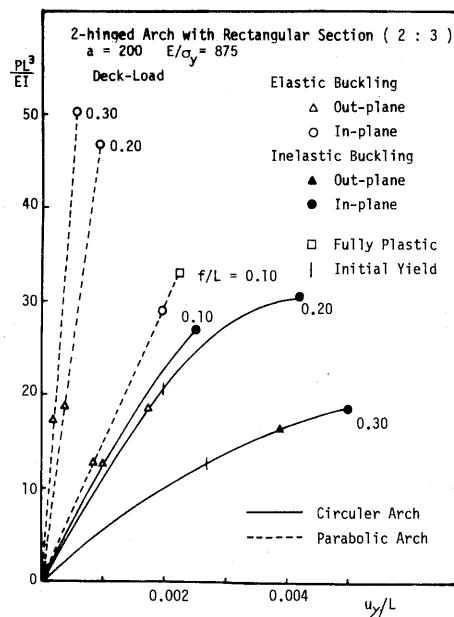


Fig. 4 Load-Deflection Curves.

について、耐荷力と曲げ剛性の比 ($\mu = EI_x / EI_y$) の関係を示すものである。これらの図より、拱矢比の大きさに関係なく、曲げ剛性の比が大きいくほど面外座屈荷重は小さくなるが、放物線アーチの場合、耐荷力は弾性面外座屈荷重によって支配されるが、円弧アーチの場合、拱矢比、曲げ剛性の比 μ の大きさによっては、耐荷力が、非弾性面内座屈によって決まることがある。

(3) 薄肉箱型断面を有するアーチの耐荷性

正方形薄肉箱型断面を有するアーチについての解析を行う。図中の▼印は、面内および面外同時座屈を表す。他の記号については、前節と同様である。

Fig. 6は、細長比 $a = 200$ 、拱矢比 f/L が0.1, 0.2, 0.3の円弧アーチについて、固定および2ヒンジの場合の荷重変位曲線である。支持条件の違いにもかかわらず、同一拱矢比において、塑性開始荷重は同じ

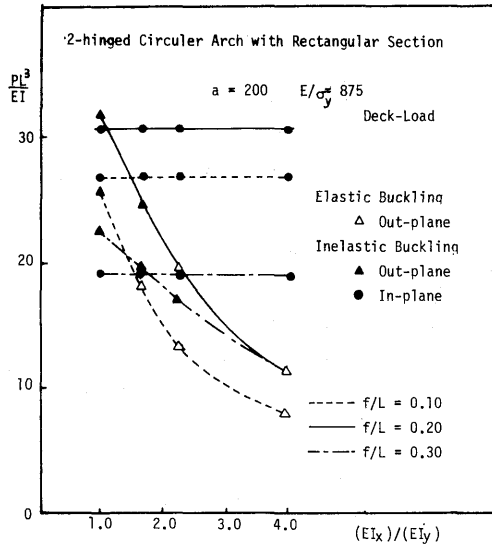


Fig. 5 (a)Relation between In-plane Buckling Load and Out-plane Buckling Load.

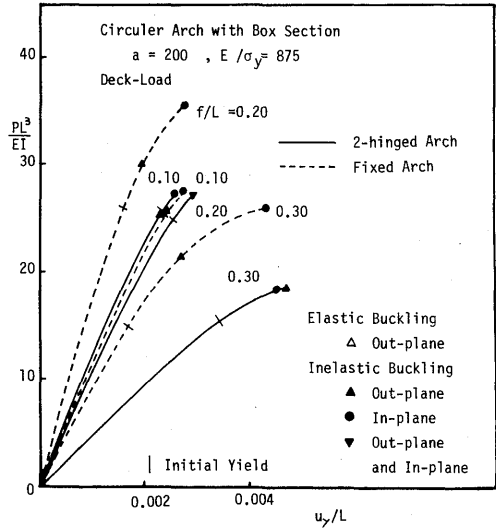


Fig. 6 Load-Deflection Curves

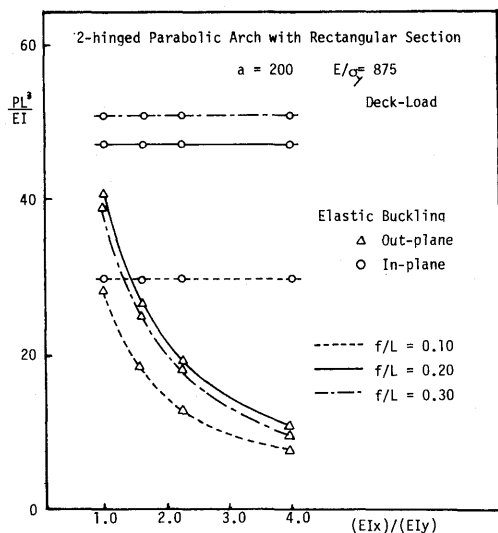


Fig. 5 (b)Relation between In-plane Buckling Load and Out-plane Buckling Load.

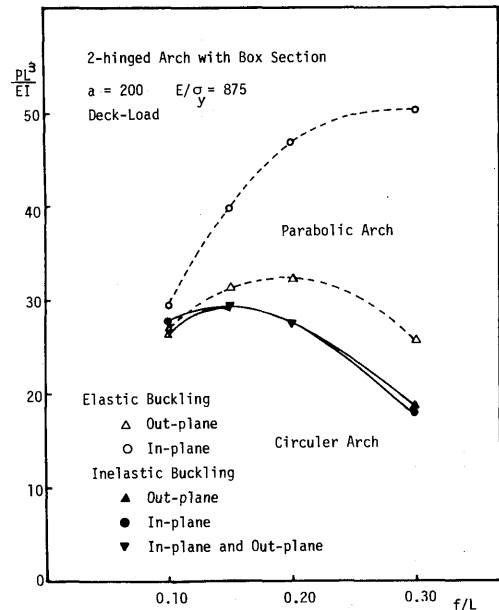


Fig. 7 Relation between Buckling Load and Rise Span Ratio.

ような値を示す。また、2ヒンジアーチの場合、拱矢比 $f/L=0.3$ の時以外は、面外座屈荷重によって耐荷力は支配される。

Fig. 7は、2ヒンジの放物線、および円弧アーチについての耐荷力曲線である。放物線の場合、面外耐荷力は、拱矢比0.2付近で、面内耐荷力は0.3付近で最大となる。円弧の場合、面外および面内耐荷力は、拱矢比0.15付近で最大値を示す。また、0.3付近になると面外座屈よりも非弾性面内座屈荷重によって、耐荷力は決まる。

(4) 耐荷力におよぼす初期変位の影響

アーチ製作あるいは架設途中で、アーチ軸線の初期変形がある程度生ずることは避けられない。が、アーチの耐荷性に対して、初期変位が影響をおよぼし面外

変形の誘発により、面外安定限界荷重を低下させる。

よって、本論文においては、終局状態におけるアーチ軸線の変形と近似の変形を与え耐荷力解析を行う。

面外固定の2ヒンジアーチについて、初期変位として、 $u_x/L=e(1-\cos 2\pi\eta)$ を面外に与えた。ここで、 e は初期変位の最大値とアーチ支間長との比、 η は無次元座標でアーチ左端を原点とするアーチ軸線座標である。

Fig. 8は、(2:3)の矩形断面を有する細長比200、拱矢比 $f/L=0.2$ の2ヒンジ放物線アーチの荷重変位曲線である。初期変位が存在しない場合の面外座屈荷重は、 $pL^3/EI=18.3$ であり、 $e=0.0001, 0.001, 0.005$ の初期変位が存在する場合の安定限界荷重は、それぞれ、約2%、12%、36%程度低下する。

Table 2に、安定限界荷重とその低下率を示す。

Fig. 9は、薄肉箱型断面を有する円弧アーチに面外初期変位を与えた場合の荷重変位曲線である。拱矢比が0.1の場合、 $e=0.0, 0.005, 0.001, 0.002$ でそれぞれ限界荷重は、 $pL^3/EI=25.5, 21.75, 19.04, 16.26$ である。初期変位の影響で、それぞれ約14.7%、25.3%、36.2%程度低下している。一方、拱矢比が0.2の場合には、約6%、10.1%、17.8%である。このように、初期変位の影響により、面外耐荷力は低下する。なお、図中の■印は、非弾性安定限界荷重を示す。

Fig. 10は、円弧および放物線アーチについて、非弾性安定限界荷重と初期変位の関係を示したものである。円弧、放物線アーチともに、拱矢比が小さいときには、

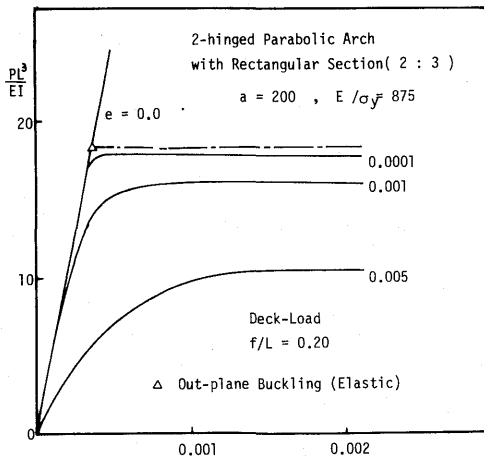


Fig. 8 Deck Load-Deflection Relation of Arch with Initial Imperfection.

Table 2 Relation between Stability Limit Load and Initial Imperfection.

| e | f/L | 0.1 | | 0.2 | |
|----------------|-----|------|-----|------|-----|
| | | 荷重 | 低下率 | 荷重 | 低下率 |
| Circular Arch | | | | | |
| 0.0 | | 13.1 | | 19.1 | |
| 0.001 | | 10.9 | 17% | 15.8 | 17% |
| 0.002 | | 9.7 | 26% | 14.1 | 26% |
| Parabolic Arch | | | | | |
| 0.0 | | 13.2 | | 18.3 | |
| 0.001 | | 10.0 | 24% | 16.2 | 12% |
| 0.002 | | 9.1 | 31% | 15.1 | 18% |

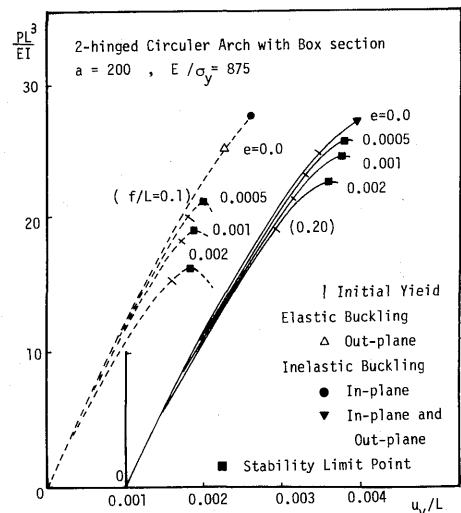


Fig. 9 Deck Load-Deflection Relation of Arch with Initial Imperfection.

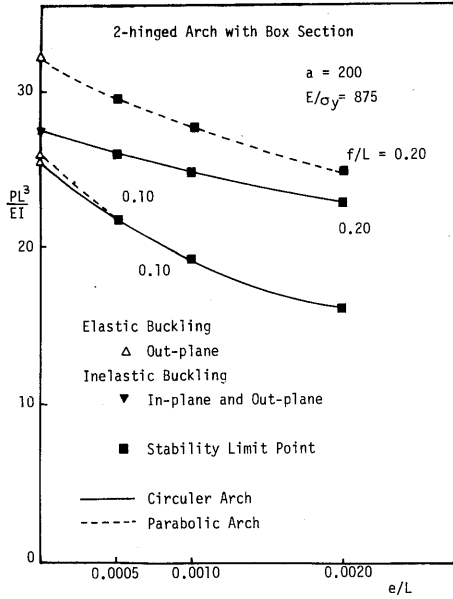


Fig. 10 Relation between Stability Limit Point and Initial Imperfection.

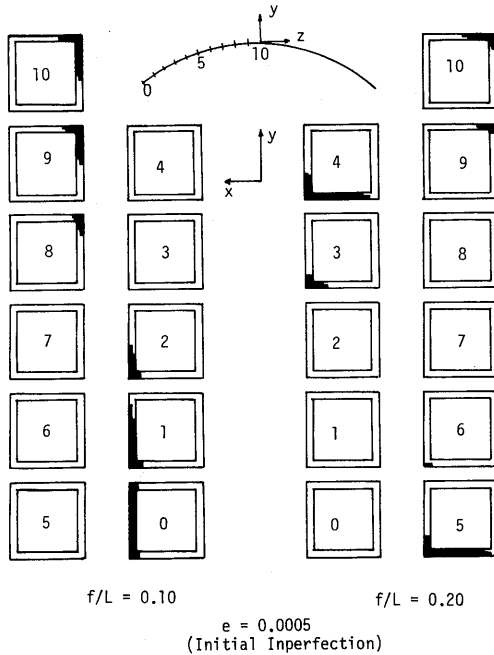


Fig. 11 Distribution of Plastic Zone of 2-hinged Circular Arch.

低下率が大きくなっている。また、放物線アーチの場合、それぞれの拱矢比において、同初期変位に対する限界荷重の差はほぼ等しくなっている。一方、円弧アーチの場合、初期変位が大きくなるにつれ拱矢比の影

響が出てくる。

次に、初期変位が存在する場合、非弾性域の広がり、どのようになっているかを示す。

Fig. 11 は、初期変位 $e=0.0005$ を有する円弧アーチについて、限界荷重付近の非弾性域の広がり、を示したものである。アーチ軸線を20等分割し、等分割点に左端から順に0, 1, 2……と番号を付け、対称変形であることを考慮して左端からアーチクラウンまでの分布図である。面内および面外の曲げモーメントの影響で、拱矢比が0.1の場合、端部とアーチクラウン付近に、一方、拱矢比が0.2の場合は、1/8~1/4付近とアーチクラウンにおいて非弾性域の広がりが見られる。

6. 結 語

任意形アーチに関して、幾何学および材料的非線形性を考慮し、増分形微分方程式の離散的な一般解に基づく直接的かつ半解析的解法を提示し、面外耐荷力解析を行った。

得られた主要な結果は次のとおりである。

- (1) 増分形基礎微分方程式の離散的な一般解に基づく本解析法により、アーチの幾何学的諸量および荷重強度などを用いて、直接的に解析され、置換系へのモデル化を必要としないことが示された。
- (2) 既往研究の理論値および実験値との比較を行うことにより、本解析法の妥当性が認められた。
- (3) デッキ荷重を受けるアーチにおいて、耐力は面外座屈荷重で決まる場合が多く、特に放物線アーチについては、弾性面外座屈によって決定されるようである。円弧アーチについては、拱矢比の大きさ、断面形状によって、非弾性面内分岐座屈荷重で決まることもある。
- (4) 初期変位を有するアーチの面外耐力は、非弾性安定限界荷重で決まることが多いようである。

なお数値計算は本学 FACOM M-180 によった。

[Appendix]

$$G_{2(j)} = -\beta_{21(j)}\Delta Q_{z(j)} - \beta_{22(j)}\Delta M_{x(j)} - \beta_{23(j)}\Delta M_{y(j)}$$

$$G_{3(j)} = -\beta_{31(j)}\Delta Q_{z(j)} - \beta_{32(j)}\Delta M_{x(j)} - \beta_{33(j)}\Delta M_{y(j)}$$

$$\rho = \frac{EI_0}{GJ} \text{ とすれば,}$$

$$A_{3(j)} = -K_{y0(j)} + Q_{z(j)}\beta_{31(j)}, A_{6(j)} = -\rho Q_{y(j)}$$

$$A_{13(j)} = \Delta p_{x(j)} - \rho \Delta M_{z(j)} \Delta Q_{y(j)} \Delta Q_{z(j)}$$

$$B_{3(j)} = K_{x0(j)} - Q_{z(j)}\beta_{21(j)}, B_{6(j)} = \rho Q_{x(j)}$$

$$B_{13(j)} = \Delta p_{y(j)} + \rho \Delta M_{z(j)} \Delta Q_{y(j)} + G_{2(j)} \Delta Q_{z(j)}$$

$$C_{3(j)} = -Q_{x(j)}\beta_{31(j)} + Q_{y(j)}\beta_{21(j)},$$

$$C_{4(j)} = -Q_{x(j)}\beta_{32(j)} + Q_{y(j)}\beta_{22(j)},$$

$$\begin{aligned}
C_{5(j)} &= -Q_{x(j)}\beta_{33(j)} + Q_{y(j)}\beta_{23(j)}, \\
C_{13(j)} &= \Delta p_{z(j)} + G_{3(j)}\Delta Q_{x(j)} - G_{2(j)}\Delta Q_{y(j)}, \\
D_{3(j)} &= K_{z0(j)} + M_{z(j)}\beta_{33(j)}, \quad D_{8(j)} = -K_{y0(j)} - \rho M_{y(j)}, \\
D_{13(j)} &= -\rho \Delta M_{z(j)} \Delta M_{y(j)} - G_{3(j)} \Delta M_{z(j)}, \\
E_{4(j)} &= -K_{z0(j)} - M_{z(j)}\beta_{22(j)}, \quad E_{8(j)} = K_{x0(j)} + \rho M_{x(j)}, \\
E_{13(j)} &= G_{2(j)} \Delta M_{x(j)} + \rho \Delta M_{x(j)} \Delta M_{z(j)}, \\
F_{3(j)} &= -M_{x(j)}\beta_{31(j)} + M_{y(j)}\beta_{21(j)}, \\
F_{4(j)} &= K_{y0(j)} - M_{x(j)}\beta_{32(j)} + M_{y(j)}\beta_{22(j)}, \\
F_{5(j)} &= -K_{x0(j)} - M_{x(j)}\beta_{33(j)} + M_{y(j)}\beta_{32(j)}, \\
F_{13(j)} &= G_{3(j)} \Delta M_{x(j)} - G_{2(j)} \Delta M_{y(j)}, \\
T_{6(j)} &= -\rho
\end{aligned}$$

参考文献

- 1) Timoshenko, S; Kippsicherheit des gekrümmten Stabes mit Kreisförmiger Mittellinie, Z. A. M. M, Heft 5, pp 358~362, 1923.
- 2) 深沢泰晴; 軸圧縮力を受ける円弧アーチの曲げねじれ座屈に関する研究, 土木学会論文報告集, 第96号, pp 29~47, 1967.
- 3) 薄木征三; 有限なねじれを考慮した薄肉曲線部材の変形解析, 土木学会論文報告集, 第290号, 66 1 ~15, 1979.
- 4) 倉西正嗣; 弾性学, (昭24), p 207~214, 文献社.
- 5) 金子常光・今井富士男・太田俊昭; 薄肉箱型断面を有する円弧曲線桁の弾塑性解析に関する基礎的研究, 第34回土木学会年次学術講演概要集第一部, pp 85~86, 1979.
- 6) 深沢泰晴; 薄肉曲線材の静力学的解析に関する基礎理論, 土木学会論文報告集, 第110号, pp 30~50, 1962.
- 7) 崎山 毅; 変断面任意形アーチの幾何学的非線形性解析, 土木学会論文報告集, 第289号, pp 31~42, 1979.
- 8) 栗原和夫・崎山 毅; 複合非線形性を有する薄肉閉断面はりの一解析法, 長崎大学工学部研究報告, 第15号, pp 29~37, 1980.
- 9) 崎山 毅; 変断面任意形アーチの面内複合非線形性解析, 土木学会論文報告集, 第310号, pp 11~20, 1981.

