

## 三相誘導機の2軸理論の応用

辻 峰 男\*・山 田 英 二\*  
小 山 純\*\*・泉 勝 弘\*

The Application of Two Axis Theory on a  
Three-Phase Induction Machine

by

Mineo TSUJI\*, Eiji YAMADA\*  
Jun OYAMA\*\* and Katsuhiko IZUMI\*

In order to analyze steady-state and transient performances of a symmetrical three-phase induction machine, two axis theory is widely used. However, there are many types of induction machine representation which should be chosen correctly according to the driving system and the aim of analysis. Therefore, it is convenient to arrange the theory and its applications systematically. This is the main purpose of the present paper. A study of the induction machine controlled by power semiconductor equipments will be developed from the results of this paper.

## 1. まえがき

三相誘導機の解析法としては、定常特性は勿論過渡特性まで含めて解析が可能な2軸理論が一般に用いられている。2軸理論は Gabriel Kron により電気機械へのテンソル解析の応用<sup>1)</sup>として発表されて以来長い歴史をもつものであるが、座標軸や変数の選び方により種々の表現型式があり、特に初学者にとっては混乱を来すことがある。これらに関する名著<sup>2)3)</sup>も幾つかあるが、パワーエレクトロニクスの発展や電子計算機の普及と共に新たな観点に立った理論展開が必要と思われる。

そこで本稿では、三相巻線に対する電圧方程式から  $d-q$  座標系による電圧方程式の導出、駆動システムや解析の目的に応じた  $d-q$  軸の選び方、さらに定常及び過渡特性の解析法につき、なるべく天下り的な事項を避け、記述を論理的にして2軸理論の整理を行うものである。

## 2. 三相巻線の電圧方程式

本稿では、以下の仮定を満す三相誘導機を考える。

- (1) エアギャップは一様である。
  - (2) 磁気回路は線形である。
  - (3) 対称な三相巻線により正弦波起磁力が作られる。
- Fig. 1 に2極、三相の誘導機を示す。かご形回転子の場合にも等価的に三相巻線と考えるべく、また、 $P$ 極の機械では単にトルクの項を  $P/2$  倍すればよい。図のように電流を定義し、固定子及び回転子の三相巻線に鎖交する磁束をそれぞれ  $\psi_{sa}$ ,  $\psi_{sb}$ ,  $\psi_{sc}$  及び  $\psi_{ra}$ ,  $\psi_{rb}$ ,  $\psi_{rc}$  とすると、他の巻線による磁束の寄与を巻線軸のなす角の余弦成分として考えることにより以下の式を得る。

$$\begin{bmatrix} \psi_{sa} \\ \psi_{sb} \\ \psi_{sc} \end{bmatrix} = L_s \begin{bmatrix} i_{sa} \\ i_{sb} \\ i_{sc} \end{bmatrix} + M_{sr} \begin{bmatrix} \cos \theta_r & \cos(\theta_r + \frac{2}{3}\pi) \\ \cos(\theta_r - \frac{2}{3}\pi) & \cos \theta_r \\ \cos(\theta_r + \frac{2}{3}\pi) & \cos(\theta_r - \frac{2}{3}\pi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{ra} \\ i_{rb} \\ i_{rc} \end{bmatrix} \quad (1)$$

昭和58年9月30日受理

\* 電子工学科 (Department of Electronics)

\*\* 電気工学科 (Department of Electrical Engineering)

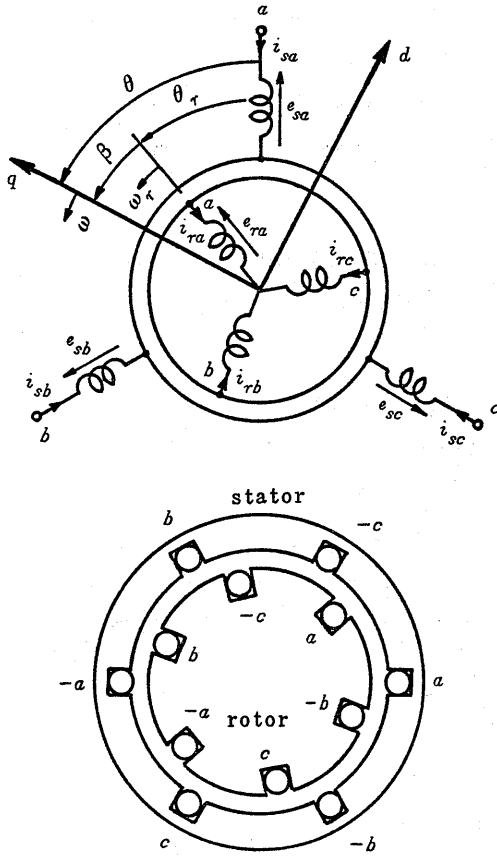


Fig. 1 Two-pole, three-phase symmetrical induction machine and  $d$ - $q$  axis

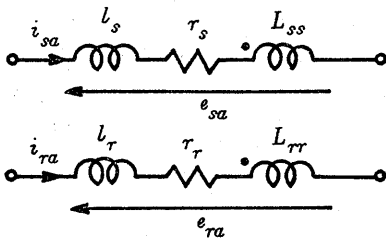


Fig. 2 Equivalent circuit of the  $a$ -phase winding

$$\begin{pmatrix} \psi_{ra} \\ \psi_{rb} \\ \psi_{rc} \end{pmatrix} = L_r \begin{pmatrix} i_{ra} \\ i_{rb} \\ i_{rc} \end{pmatrix} + M_{sr} \begin{pmatrix} \cos \theta_r & \cos(\theta_r - \frac{2}{3}\pi) \\ \cos(\theta_r + \frac{2}{3}\pi) & \cos \theta_r \\ \cos(\theta_r - \frac{2}{3}\pi) & \cos(\theta_r + \frac{2}{3}\pi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_{sa} \\ i_{sb} \\ i_{sc} \end{pmatrix} \quad *$$

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta_r + \frac{2}{3}\pi) \\ * \cos(\theta_r - \frac{2}{3}\pi) \\ \cos \theta_r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_{sa} \\ i_{sb} \\ i_{sc} \end{pmatrix}$$

(2)

ここで  $\theta_r$  は回転角速度  $\omega_r$  を用いて次式で表せる。

$$\theta_r = \int_0^t \omega_r dt + \delta \quad (3)$$

2極のモデルで角度を定義していることから、 $\theta_r$  や  $\omega_r$  は電気角表示となっている。自己インダクタンス  $L_s, L_r$  は三相分を考慮したもので、巻線一相分の自己インダクタンスを  $L_{ss}, L_{rr}$ 、漏れインダクタンスを  $l_s, l_r$  とすれば、

$$L_s = \frac{3}{2} L_{ss} + l_s, \quad L_r = \frac{3}{2} L_{rr} + l_r \quad (4)$$

と表わせる。また、固定子、回転子の実効巻数をそれぞれ  $N_s, N_r$  とし、磁気抵抗を  $R$  とすると、次のような関係がある。

$$L_{ss} = \frac{N_s^2}{R}, \quad L_{rr} = \frac{N_r^2}{R}, \quad M_{sr} = \frac{N_s N_r}{R} \quad (5)$$

三相巻線に対する電圧方程式は、Fig. 2 を参照して

$$\begin{pmatrix} e_{sa} \\ e_{sb} \\ e_{sc} \end{pmatrix} = r_s \begin{pmatrix} i_{sa} \\ i_{sb} \\ i_{sc} \end{pmatrix} + p \begin{pmatrix} \psi_{sa} \\ \psi_{sb} \\ \psi_{sc} \end{pmatrix} \quad (6)$$

$$\begin{pmatrix} e_{ra} \\ e_{rb} \\ e_{rc} \end{pmatrix} = r_r \begin{pmatrix} i_{ra} \\ i_{rb} \\ i_{rc} \end{pmatrix} + p \begin{pmatrix} \psi_{ra} \\ \psi_{rb} \\ \psi_{rc} \end{pmatrix} \quad (7)$$

となる。ここで、 $p$  は微分演算子 ( $d/dt$ ) を表す。

Fig. 1 より、

$$i_{sa} + i_{sb} + i_{sc} = 0 \quad (8)$$

$$i_{ra} + i_{rb} + i_{rc} = 0 \quad (9)$$

である。(8)、(9)式を(6)、(7)式に代入すると、次式を得る。

$$e_{sa} + e_{sb} + e_{sc} = 0 \quad (10)$$

$$e_{ra} + e_{rb} + e_{rc} = 0 \quad (11)$$

かご形誘導機は二次側が短絡されているので、(11)式より、次式が成立する。

$$e_{ra} = e_{rb} = e_{rc} = 0 \quad (12)$$

### 3. $d$ - $q$ 座標系による表示

Fig. 1 に示すように、任意の角速度  $\omega$  で回転し、互いに直交する  $d$ - $q$  軸をとる<sup>4)</sup>。このとき、固定子  $a$  相巻線軸と  $q$  軸のなす角  $\theta$  は次式で表せる。

$$\theta = \int_0^t \omega dt + \theta_0 \quad (13)$$

さて、各巻線軸と  $d$ - $q$  軸のなす角の余弦を成分とした次式の変数変換を考えてみよう。

$$\begin{pmatrix} f_{sd} \\ f_{sq} \\ f_{s0} \end{pmatrix} = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{pmatrix} \sin \theta & \sin(\theta - \frac{2}{3}\pi) & \sin(\theta - \frac{4}{3}\pi) \\ \cos \theta & \cos(\theta - \frac{2}{3}\pi) & \cos(\theta - \frac{4}{3}\pi) \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{sa} \\ f_{sb} \\ f_{sc} \end{pmatrix}$$

(14)

$$\begin{pmatrix} f_{rd} \\ f_{rq} \\ f_{r0} \end{pmatrix} = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{pmatrix} \sin \beta & \sin(\beta - \frac{2}{3}\pi) & \sin(\beta - \frac{4}{3}\pi) \\ \cos \beta & \cos(\beta - \frac{2}{3}\pi) & \cos(\beta - \frac{4}{3}\pi) \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{ra} \\ f_{rb} \\ f_{rc} \end{pmatrix} \quad (15)$$

ここで、 $\beta = \theta - \theta_r$

(14), (15)式の  $f$  は電圧 ( $e$ ), 電流 ( $i$ ), 鎖交磁束 ( $\psi$ ) を表わす. (14), (15)式を行列表示して,

$$f_{sdq0} = C_s f_{sabc} \quad (16)$$

$$f_{rdq0} = C_r f_{rabc} \quad (17)$$

と書く.  $f$  は  $e, i, \psi$  を意味する.  $C_s, C_r$  は直交行列であるから, それらの逆行列と転置行列は等しい. 故に,

$$f_{sabc} = C_s^T f_{sdq0} \quad (18)$$

$$f_{rabc} = C_r^T f_{rdq0} \quad (19)$$

となる. (14), (15)式の電圧, 電流に対する変換を(1), (2), (6), (7)式に適用すると次式を得る.

$$\begin{pmatrix} e_{sd} \\ e_{sq} \\ e_{rd} \\ e_{rq} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_s + L_{sp} & -\omega L_s & M_p \\ \omega L_s & r_s + L_{sp} & \omega M \\ M_p & -(\omega - \omega_r) M & r_r + L_{rp} \\ (\omega - \omega_r) M & M_p & (\omega - \omega_r) L_r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_{sd} \\ i_{sq} \\ i_{rd} \\ i_{rq} \end{pmatrix} \quad (20)$$

ここで、 $M = 3M_{sr}/2$

零相成分は、(8)~(11)式より

$$e_{s0} = e_{r0} = i_{s0} = i_{r0} = 0 \quad (21)$$

である. また、二次側が短絡された状態では、

$$e_{rd} = e_{rq} = 0 \quad (22)$$

が成立する.

鎖交磁束については以下の式を得る.

$$\begin{pmatrix} \psi_{sd} \\ \psi_{sq} \\ \psi_{rd} \\ \psi_{rq} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_s & 0 & M & 0 \\ 0 & L_s & 0 & M \\ M & 0 & L_r & 0 \\ 0 & M & 0 & L_r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_{sd} \\ i_{sq} \\ i_{rd} \\ i_{rq} \end{pmatrix} \quad (23)$$

誘導機は一般に、一次側に換算して二次定数の測定を行うので、(20), (23)式を一次側に換算した量に変換する. 実効巻数比を  $a (= N_s/N_r)$  として、

$$\left. \begin{aligned} e'_{rd} &= a e_{rd}, & e'_{rq} &= a e_{rq}, & i'_{rd} &= i_{rd}/a \\ i'_{rq} &= i_{rq}/a, & \psi'_{rd} &= a \psi_{rd}, & \psi'_{rq} &= a \psi_{rq} \\ r'_r &= a^2 r_r, & L'_r &= a^2 L_r, & M' &= aM \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

とすると、(20), (23)式は次のようになる.

$$\begin{pmatrix} e_{sd} \\ e_{sq} \\ e'_{rd} \\ e'_{rq} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_s + L_{sp} & -\omega L_s & M'p \\ \omega L_s & r_s + L_{sp} & \omega M' \\ M'p & -(\omega - \omega_r) M' & r'_r + L'_{rp} \\ (\omega - \omega_r) M' & M'p & (\omega - \omega_r) L'_r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_{sd} \\ i_{sq} \\ i'_{rd} \\ i'_{rq} \end{pmatrix} \quad (25)$$

$$\begin{pmatrix} \psi_{sd} \\ \psi_{sq} \\ \psi'_{rd} \\ \psi'_{rq} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_s & 0 & M' & 0 \\ 0 & L_s & 0 & M' \\ M' & 0 & L'_r & 0 \\ 0 & M' & 0 & L'_r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_{sd} \\ i_{sq} \\ i'_{rd} \\ i'_{rq} \end{pmatrix} \quad (26)$$

(25)式で、 $i'_{rd}, i'_{rq}$  のかわりに  $\psi'_{rd}, \psi'_{rq}$  を用いると次式を得る.

$$\begin{pmatrix} e_{sd} \\ e_{sq} \\ e'_{rd} \\ e'_{rq} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_s + \sigma L_{sp} & -\omega \sigma L_s & M'p/L'_r \\ \omega \sigma L_s & r_s + \sigma L_{sp} & \omega M'/L'_r \\ -\sigma_r M' & 0 & \sigma_r + p \\ 0 & -\sigma_r M' & \omega - \omega_r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_{sd} \\ i_{sq} \\ \psi'_{rd} \\ \psi'_{rq} \end{pmatrix} \quad (27)$$

但し、 $\sigma_r = r'_r/L'_r, \sigma = 1 - M'^2/(L_s L'_r)$

上式は(25)式に比べて、回転子側の電圧方程式に、微分演算子  $p$  が1つしか含まれないので、状態方程式への変形が容易である.

以上において、 $d-q$  軸が回転する角速度  $\omega$  は任意であった.  $\omega$  を特別な値に選ぶと通常用いられている種々の座標系が得られる.

(i)  $\omega = 0$ : 静止座標系 (stationary reference frame)

このとき、(27)式より次式を得る.

$$\begin{pmatrix} e_{sd} \\ e_{sq} \\ e'_{rd} \\ e'_{rq} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_s + \sigma L_{sp} & 0 & M'p/L'_r \\ 0 & r_s + \sigma L_{sp} & 0 \\ -\sigma_r M' & 0 & \sigma_r + p \\ 0 & -\sigma_r M' & -\omega_r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_{sd} \\ i_{sq} \\ \psi'_{rd} \\ \psi'_{rq} \end{pmatrix} \quad (28)$$

また、(16)式の変換行列  $C_s$  は定係数行列となる. 従って、固定子側に接続された回路の方程式が  $d-q$  量に

より容易に定式化できるので、インバータ駆動時<sup>9)</sup>や逆並列サイリスタによる一次電圧制御時<sup>6)</sup>などの厳密な波形の計算を行う場合に便利である。

なお、例えば三相インバータ駆動時には必ずしも1周期毎に計算を繰り返す必要はない。相の変化毎に、 $d$ - $q$ 軸を $\pi/3$ 回転する新たな座標系を導入することにより1/6周期の解析で十分となる<sup>7)</sup>。このとき $d$ - $q$ 量は1/6周期毎に不連続に変化する。時間 $t_k$ で $d$ - $q$ 軸を $\pi/3$ だけ反時計方向に回転する場合を例にとり、そのときの関係式を求めておく (Fig. 3 参照)。

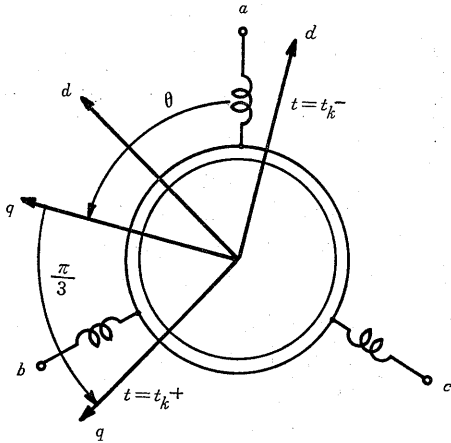


Fig. 3 Discontinuous rotation of the reference frame by an angle  $\pi/3$ .

$f_{sabc}$  が  $t_k$  で連続であれば、(16)式より

$$f_{sdq}(t_k^-) = C_s(\theta) f_{sabc}(t_k) \quad (29)$$

$$f_{sdq}(t_k^+) = C_s(\theta + \pi/3) f_{sabc}(t_k) \quad (30)$$

である。但し、 $t_k^-$ 、 $t_k^+$  は  $d$ - $q$  軸の回転前、後の時間を意味する。従って、 $f_{sdq}(t_k^-)$  と  $f_{sdq}(t_k^+)$  には次の関係が成立する。

$$\begin{pmatrix} f_{sd}(t_k^+) \\ f_{sq}(t_k^+) \\ f_{s0}(t_k^+) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 & 0 \\ -\sqrt{3}/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{sd}(t_k^-) \\ f_{sq}(t_k^-) \\ f_{s0}(t_k^-) \end{pmatrix} \quad (31)$$

回転子側についても同様に、 $t_k$  で連続な  $f_{rabc}$  に対して、次式が成立する。

$$\begin{pmatrix} f_{rd}(t_k^+) \\ f_{rq}(t_k^+) \\ f_{r0}(t_k^+) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 & 0 \\ -\sqrt{3}/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{rd}(t_k^-) \\ f_{rq}(t_k^-) \\ f_{r0}(t_k^-) \end{pmatrix} \quad (32)$$

誘導機の方程式としては、1/6周期の間  $d$ - $q$  軸が静止しているので、(29)式を用いることに変わりない。

(ii)  $\omega = \omega_s$ : 同期回転座標系 (synchronously rota-

ting reference frame)

ここで  $\omega_s$  は同期角速度 ( $2\pi f$ ,  $f$ : 周波数) である。このとき、(27)式より次式を得る。

$$\begin{pmatrix} e_{sd} \\ e_{sq} \\ e'_{rd} \\ e'_{rq} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_s + \sigma L_{sp} & -\omega_s \sigma L_s & M'p/L_r \\ \omega_s \sigma L_s & r_s + \sigma L_{sp} & \omega_s M'/L_r \\ -\sigma_r M' & 0 & \sigma_r + p \\ 0 & -\sigma_r M' & \omega_s - \omega_r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_{sd} \\ i_{sq} \\ \psi'_{rd} \\ \psi'_{rq} \end{pmatrix} \quad (33)$$

この座標系の特徴は、三相量が周波数  $f$  の正弦波であるとき、 $d$ - $q$  量が時間  $t$  を陽に含まない一種の直流量となることである。インバータ駆動時に電圧、電流の基本波成分のみを考慮して、系の定常及び安定解析を行う際に用いられている<sup>8)9)</sup>。

(iii)  $\omega = \omega_r$ : 回転子に固定した座標系 (reference frame fixed in the rotor)

このとき、(27)式より次式を得る。

$$\begin{pmatrix} e_{sd} \\ e_{sq} \\ e'_{rd} \\ e'_{rq} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_s + \sigma L_{sp} & -\omega_r \sigma L_s & M'p/L_r \\ \omega_r \sigma L_s & r_s + \sigma L_{sp} & \omega_r M'/L_r \\ -\sigma_r M' & 0 & \sigma_r + p \\ 0 & -\sigma_r M' & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_{sd} \\ i_{sq} \\ \psi'_{rd} \\ \psi'_{rq} \end{pmatrix} \quad (34)$$

この座標系では、(17)式の変換行列  $C_r$  が定係数行列となり、回転子側に接続した回路の方程式が  $d$ - $q$  量で定式化し易い。サイリスタセルビウス方式の解析<sup>10)</sup>等に応用例がみられる。

上記座標系の他、二次鎖交磁束に同期して回転する座標系がベクトル制御理論の発展に寄与した<sup>11)</sup>。

#### 4. 電力とトルク

まず、磁界のエネルギーを求める。(6)、(7)式は行列表示すると次式のように書ける。

$$\begin{pmatrix} e_{sabc} \\ e_{rabc} \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} i_{sabc} \\ i_{rabc} \end{pmatrix} + p L(\theta_r) \begin{pmatrix} i_{sabc} \\ i_{rabc} \end{pmatrix} \quad (35)$$

$R$ 、 $L(\theta_r)$  は式の対応から明白である。磁界のエネルギーを  $W_m$  とすると、

$$W_m = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} i_{sabc} \\ i_{rabc} \end{pmatrix}^T L(\theta_r) \begin{pmatrix} i_{sabc} \\ i_{rabc} \end{pmatrix} \quad (36)$$

となる。一般に、発生トルク  $\tau_e$  は、 $W_m$  の独立変数

として電流と回転角を選ぶと、

$$\tau_e = \frac{P}{2} \frac{\partial W_m}{\partial \theta_r} \quad (37)$$

と表わせる。上式を計算すると、

$$\begin{aligned} \tau_e &= (P/2) M (i_{sq} i'_{rd} - i_{sd} i'_{rq}) \\ &= (P/2) M' (i_{sq} i'_{rd} - i_{sd} i'_{rq}) \\ &= (P/2) M' (i_{sq} \psi'_{rd} - i_{sd} \psi'_{rq}) / L'_r \quad (38) \end{aligned}$$

となる。38式は、任意の  $\omega$  に対し成立する。

次に、誘導電動機への入力電力  $P_{in}$  は、二次側が短絡されている場合、

$$\begin{aligned} P_{in} &= e^T_{sabc} i_{sabc} \\ &= (C_s^T e_{s dq0})^T C_s^T i_{s dq0} \\ &= e^T_{s dq0} i_{s dq0} \quad (39) \end{aligned}$$

となり、係数は1で自然な結果が得られる。

誘導機の運動方程式は負荷も含めて、

$$\left(\frac{2}{P}\right) J \frac{d\omega_r}{dt} = \tau_e - R_\omega \frac{2}{P} \omega_r - T_L \quad (40)$$

のように表わせる。ここで、 $J$ : 慣性モーメント (含負荷)、 $R_\omega$ : 制動係数、 $T_L$ : 負荷トルク

上式は、始動特性や安定性の解析では欠くことができない。軸ねじり振動を扱う場合には、さらに詳細な機械系のモデルを必要とする。

### 5. 空間ベクトルによる表示

空間ベクトルを次のように定義する。

$$\left. \begin{aligned} \dot{e}_s &\equiv e_{sd} + j e_{sq}, & \dot{e}_r &\equiv e'_{rd} + j e'_{rq} \\ i_s &\equiv i_{sd} + j i_{sq}, & i'_r &\equiv i'_{rd} + j i'_{rq} \\ \dot{\psi}'_r &\equiv \dot{\psi}'_{rd} + j \dot{\psi}'_{rq} \end{aligned} \right\} \quad (41)$$

ここで、 $j$ : 虚数単位

(40)式より、次式は明白である。

$$\dot{\psi}'_r = M' i_s + L'_r i'_r \quad (42)$$

(25), (27)式を空間ベクトル表示すると、以下の式を得る。

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \dot{e}_s \\ \dot{e}'_r \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} r_s + L_s p + j \omega L_s \\ M' p + j (\omega - \omega_r) M' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_s \\ i'_r \end{pmatrix} \\ &+ \begin{pmatrix} M' p + j \omega M' \\ r'_r + L'_r p + j (\omega - \omega_r) L'_r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_s \\ i'_r \end{pmatrix} \quad (43) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \dot{e}_s \\ \dot{e}'_r \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} r_s + \sigma L_s p + j \omega \sigma L_s \\ -\sigma_r M' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_s \\ i'_r \end{pmatrix} \\ &+ \begin{pmatrix} M' p / L'_r + j \omega M' / L'_r \\ \sigma_r p + j (\omega - \omega_r) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_s \\ \dot{\psi}'_r \end{pmatrix} \quad (44) \end{aligned}$$

$\omega$  は任意であるから、種々の表現式が考えられる。

一方、トルクは

$$\begin{aligned} \tau_e &= (P/2) M' \text{Im}(i_s i'_r)^* \\ &= \frac{P M'}{2 L'_r} \text{Im}(i_s \dot{\psi}'_r)^* \quad (45) \end{aligned}$$

と表わせる。Im, \*印はそれぞれ複素数の虚部、共役を意味する。

空間ベクトルは、見かけ上変数が減少しており、解析的に解を求める場合に便利ことがある。電流形インバータ駆動時の瞬時トルクの解析<sup>12)</sup>やベクトル制御理論<sup>13)</sup>などに用いられている。文献13)では、回転ベクトルなどベクトル解析の手法を導入しているが、本章で述べた複素数としての計算でも全く同じ結果を得る。

### 6. 定常運転時の等価回路

以上は過渡状態においても成立するものであったが、本章では、定常時の解析と通常用いられているT型等価回路の導出を行う。

固定子相電圧を次のようにおく。

$$\begin{pmatrix} e_{sa} \\ e_{sb} \\ e_{sc} \end{pmatrix} = \sqrt{2} V \begin{pmatrix} \sin \omega_s t \\ \sin (\omega_s t - 2\pi/3) \\ \sin (\omega_s t - 4\pi/3) \end{pmatrix} \quad (46)$$

$e_{sa}, e_{sb}, e_{sc}$  の複素表示 (時間ベクトル) をそれぞれ

$\dot{E}_{sa}, \dot{E}_{sb}, \dot{E}_{sc}$  とすると、次式を得る。

$$\begin{pmatrix} \dot{E}_{sa} \\ \dot{E}_{sb} \\ \dot{E}_{sc} \end{pmatrix} = V \begin{pmatrix} 1 \\ e^{-j\frac{2}{3}\pi} \\ e^{-j\frac{4}{3}\pi} \end{pmatrix} \quad (47)$$

誘導機を  $\theta = 0$  の静止座標系で考えることにする。

このとき、 $e_{sa}, e_{sq}$  は同一周波数の正弦波となるので複素表示が可能である。複素表示を  $\dot{E}_{sd}, \dot{E}_{sq}$  とすると、

$$\begin{pmatrix} \dot{E}_{sd} \\ \dot{E}_{sq} \end{pmatrix} = \sqrt{\frac{3}{2}} V \begin{pmatrix} j \\ 1 \end{pmatrix} \quad (48)$$

となる。誘導機の方程式は、(25)式で  $\omega = 0$  と置いたものを考えると、 $\omega_r$  が一定のとき線形定係数微分方程式と見なせる。従って、正弦波入力  $e_{sd}, e_{sq}$  に対し、 $i_{sd}, i_{sq}, i'_{rd}, i'_{rq}$  は正弦波状に変化するものと考えられる。そこで、これらの複素表示を  $\dot{I}_{sd}, \dot{I}_{sq}, \dot{I}'_{rd}, \dot{I}'_{rq}$  とし、また、 $p$  を  $j\omega_s$  で置き換え、さらに二次側が短絡されている場合を考えると、以下の式を得る。

$$\dot{I}_{sd} = j \dot{I}_{sq} \quad (49)$$

$$\dot{I}'_{rd} = j \dot{I}'_{rq} \quad (50)$$

$$\begin{pmatrix} V \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_s + j\omega_s L_s & j\omega_s M' \\ j\omega_s M' & r'_r/s + j\omega_s L'_r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{I}_s \\ \dot{I}'_r \end{pmatrix} \quad (51)$$

但し,  $\dot{I}_s \equiv \sqrt{2/3} \dot{I}_{sq}$ ,  $\dot{I}'_r \equiv \sqrt{2/3} \dot{I}'_{rq}$ ,  $s$ : すべり  
相電流  $i_{sb}$ ,  $i_{sd}$ ,  $i_{sc}$  の複素表示  $\dot{I}_{sa}$ ,  $\dot{I}_{sb}$ ,  $\dot{I}_{sc}$  を求め  
ると, 次式となる.

$$\begin{pmatrix} \dot{I}_{sa} \\ \dot{I}_{sb} \\ \dot{I}_{sc} \end{pmatrix} = \dot{I}_s \begin{pmatrix} 1 \\ e^{-j\frac{2}{3}\pi} \\ e^{-j\frac{4}{3}\pi} \end{pmatrix} \quad (52)$$

従って, 相電流は大きさが等しく, 位相差  $2\pi/3$  をもつ  
ことがわかる.  $\dot{I}_s$  は  $i_{sa}$  の複素表示に他ならないの  
で, 51式より一相分の等価回路として, Fig. 4を得る.

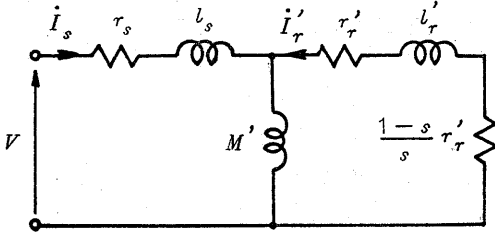


Fig. 4 Equivalent circuit of three-phase induction motor

次の関係は, (4), (5), (24)式より明白である.

$$L_s = M' + l_s, \quad L'_r = M' + l'_r \quad (53)$$

但し,  $l'_r = a^2 l_r$

次に, 53式よりトルクを計算すると, 次式を得る.

$$\tau_e = \frac{3P}{2} \frac{r'_r | \dot{I}'_r|^2}{s \omega_s} \quad (54)$$

これは,  $r'_r/s$  で消費される電力を同期角速度 (機械  
角表示) で除したものがトルクとなるという通常の結  
果と一致している. 54式は瞬時値を示すものであるか  
ら, 正弦波入力の定常運転時にはトルクに脈動は生じ  
ないことがわかる.

回路定数の測定に関しては, 簡易等価回路で考えて,  
抵抗測定試験から  $r_s$ , 次に無負荷試験より  $M'$  が求  
まる. 拘束試験より  $r'_r$  は求まるが, 漏れインダク  
タンスの分離は困難で, 通常  $l_s$  と  $l'_r$  は等しいとおく  
ことが多い.

## 7. 過渡解析法

本章では, 正弦波電圧印加時の定常解析, 始動特性  
解析, 安定解析などについて述べる. なお, 二次側は  
短絡されているものとする.

誘導機に印加する電圧を

$$\begin{pmatrix} e_{sa} \\ e_{sb} \\ e_{sc} \end{pmatrix} = \sqrt{2} V \begin{pmatrix} \sin \theta_s \\ \sin (\theta_s - 2\pi/3) \\ \sin (\theta_s - 4\pi/3) \end{pmatrix}$$

とし, (13)式で  $\theta = \theta_s$  なる同期回転座標系 ( $\omega = \omega_s$ ,  
 $\omega_s = d\theta_s/dt$ ) で考えると,

$$e_{sd} = \sqrt{3} V, \quad e_{sq} = 0 \quad (55)$$

を得る. 状態ベクトル  $\mathbf{x}$ , 入力ベクトル  $\mathbf{u}$  を

$$\mathbf{x} = [i_{sd}, i_{sq}, \phi'_{rd}, \phi'_{rq}, \omega_r]^T \quad (56)$$

$$\mathbf{u} = [V, \omega_s, T_L]^T \quad (57)$$

に選ぶと(33), (40)式は非線形微分方程式として次のよう  
に表わせる.

$$p\mathbf{x} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \quad (58)$$

上式を Runge-Kutta 法などで数値的に解くことによ  
り, 始動特性や過渡応答が明らかとなる. 入力ベクト  
ル  $\mathbf{u}$  が一定 ( $\mathbf{u}_0$  とおく) であれば, 定常値は  $p\mathbf{x} = \mathbf{0}$   
とおくことにより計算できる.  $\mathbf{x}$  の定常値  $\mathbf{x}_0$  は次式  
で定まる. (以下, 添字 0 は定常値を示す.)

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0) = \mathbf{0} \quad (59)$$

しかし, 与えられた入力  $\mathbf{u}_0$  に対し,  $\mathbf{x}_0$  は常に存在す  
るとは限らない. また, 解が存在したとしても, 方程  
式そのものが非線形となり, 解を求めるのに繰り返し  
計算を必要とする. そこで一般には,  $V_0, \omega_{s0}, \omega_{r0}$  を  
与えて定常解を求め, さらに発生トルクを計算して,  
これに見合った負荷トルクが加えられていたと考える.  
 $i_{sd0}, i_{sq0}, \phi'_{rd0}, \phi'_{rq0}$  は次式から求まる.

$$\begin{pmatrix} \sqrt{3} V_0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_s & -\omega_{s0} \sigma L_s & 0 \\ \omega_{s0} \sigma L_s & r_s & \omega_{s0} M'/L'_r \\ -\sigma_r M' & 0 & \sigma_r \\ 0 & -\sigma_r M' & \omega_{s0} - \omega_{r0} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} i_{sd0} \\ i_{sq0} \\ \phi'_{rd0} \\ \phi'_{rq0} \end{pmatrix} \quad (60)$$

得られた定常解は, 6章のそれと本質的に同じもので  
ある.

非線形系であるため, 安定性は局所的にしか論じる  
ことはできない. これには, 微小変位理論 (small  
displacement theory) が用いられている<sup>14)</sup>. 状態量  
を定常値と微小変動分 ( $\Delta$  を付ける) に分けて,

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \Delta \mathbf{x}, \quad \mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \Delta \mathbf{u} \quad (61)$$

とする. 61式を60式に代入し, テイラー展開して  $\Delta$  に  
関する二次以上の項を省略すると次式を得る.

$$p\Delta \mathbf{x} = \mathbf{A} \Delta \mathbf{x} + \mathbf{B} \Delta \mathbf{u} \quad (62)$$

ここで,  $\mathbf{A}, \mathbf{B}$  の成分をそれぞれ  $a_{ij}, b_{ij}$  とすると,

$$a_{ij} = \left. \frac{\partial f_i(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial x_j} \right|_{\substack{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0 \\ \mathbf{u}=\mathbf{u}_0}} \quad (63)$$

$$b_{ij} = \left. \frac{\partial f_i(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial u_j} \right|_{\substack{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0 \\ \mathbf{u}=\mathbf{u}_0}} \quad (64)$$

で与えられる. 但し,  $f_i, x_i, u_i$  はそれぞれ  $\mathbf{f}, \mathbf{x}$ ,  
 $\mathbf{u}$  の第  $i$  成分である. 63, 64式を計算すると,

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{r_s L_r' + \sigma_r M'^2}{\sigma L_s L_r'} & \omega_{s0} & \frac{\sigma_r M'}{\sigma L_s L_r'} \\ -\omega_{s0} & -\frac{r_s L_r' + \sigma_r M'^2}{\sigma L_s L_r'} & -\frac{M' \omega_{r0}}{\sigma L_s L_r'} \\ \sigma_r M' & 0 & -\sigma_r \\ 0 & \sigma_r M' & -(\omega_{s0} - \omega_{r0}) \\ -\frac{P^2 M'}{4 J L_r'} \psi'_{rq0} & \frac{P^2 M'}{4 J L_r'} \psi'_{rd0} & \frac{P^2 M'}{4 J L_r'} i_{sq0} \end{pmatrix}^*$$

$$* \begin{pmatrix} \frac{M' \omega_{r0}}{\sigma L_s L_r'} & \frac{M' \psi'_{rq0}}{\sigma L_s L_r'} \\ \frac{\sigma_r M'}{\sigma L_s L_r'} & \frac{M' \psi'_{rd0}}{\sigma L_s L_r'} \\ \omega_{s0} - \omega_{r0} & -\psi'_{rq0} \\ -\sigma_r & \psi'_{rd0} \\ -\frac{P^2 M'}{4 J L_r'} i_{sd0} & -\frac{R \omega}{J} \end{pmatrix} \quad (65)$$

$$B = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/(\sigma L_s) & i_{sq0} & 0 \\ 0 & -i_{sd0} & 0 \\ 0 & \psi'_{rq0} & 0 \\ 0 & -\psi'_{rd0} & 0 \\ 0 & 0 & -P/(2J) \end{pmatrix} \quad (66)$$

となる。62式は線形システムの一般形であり、線形制御理論が適用できる。例えば、Aの固有値が左半平面にあるとき、その定常点は安定であると言える。

62式よりステップ応答を計算する場合には、次式のサンプル値系に変換して行くとよい。

$$\Delta x[(k+1)T] = \Phi \Delta x(kT) + \Theta \Delta u(kT) \quad (67)$$

ここで、 $\Phi = e^{AT}$

$$\Theta = \int_0^T e^{At} dt B$$

この方法は、63式を直接数値積分するのに比べ計算時間が短くて済む利点があり、定常点の近傍では良好な精度が得られる。

インバータ駆動時には基本波成分のみの解析では十分でないことがある。例えば、電流形インバータ駆動時には転流現象が無視できない<sup>15)</sup>。この様にひずみ波電源で駆動される場合の過渡解析法は筆者らにより一般論が展開された<sup>16)17)18)</sup>。

### 8. あとがき

二軸理論が実際の誘導機をどの程度正確に表示するかは2章の三相巻線の電圧方程式で決ってしまい、3章以降は一種の変数変換で、特別な物理的条件を必要としない。誘導機の電磁気学的な現象を回路理論的に取り扱う点に2軸理論の本質的な近似があると考えら

れるが、回路理論と制御理論は非常に結びつきが深く、制御系の一構成要素として誘導機を捉えるパワーエレクトロニクスの分野でこの理論が多用されることは理解できる。この様な状況の中で、誘導機を含むシステムの解析・設計に本稿の果す役割は大きいと考える。

最後に、常々御指導を賜わる九大野中作太郎教授に感謝の意を表す。

### 参考文献

- 1) G. Kron: "The application of tensors to the analysis of rotating electrical machinery" G. E. Review Vol. 38 (1935)
- 2) A. E. Fitzgerald & C. Kingsley: Electric Machinery 2nd ed. (1961) McGraw-Hill
- 3) 宮入: エネルギー変換工学入門 上, 下(昭和38, 40) 丸善
- 4) P. C. Krause & C. H. Thomas: "Simulation of symmetrical induction machinery" IEEE Trans. Power Apparatus Syst. PAS-84, 1038 (1965)
- 5) T. A. Lipo & E. P. Cornell: "State-variable steady-state analysis of a controlled current induction motor drive" IEEE Trans. Industr. Applic. IA-11, 704 (1975)
- 6) T. A. Lipo: "The analysis of induction motors with voltage control by symmetrically triggered thyristors" IEEE Trans. Power Apparatus Syst. PAS-90, 515 (1971)
- 7) 原島・内田: 「状態推移法によるインバータ誘導電動機系の解析」電気学会雑誌 Vol. 89, 2369 (昭44-12)
- 8) T. A. Lipo & P. C. Krause: "Stability analysis of a rectifier-induction motor drive" IEEE Trans. Power Apparatus Syst. PAS-88, 55 (1969)
- 9) N. Sawaki & N. Sato: "Steady-state and stability analysis of induction motor driven by current source inverter" IEEE Trans. Industr. Applic. IA-13, 244 (1977)
- 10) 小門・森下・奥田: 「サイリスタ・セルビウス方式の状態変数解析」電気学会研究会資料 PCC-79-19 (昭54-2)
- 11) 鈴木・中野・原・柳瀬: 「交流機のトランスベクトル制御」電気学会研究会資料 PCC-78-6 (昭53-1)
- 12) D. Naunin: "Berechnung des drehmomentverlaufs einer asynchronmaschine bei speisung mit

- rechteckströmen” ETZ-A, Bd. 90, 179 (1969)
- 13) 難波江・黒沢：「誘導機のトルク伝達関数定数化制御」電学論 B 98, 303 (昭53-3)
  - 14) G. J. Rogers: “Linearised analysis of induction motor transients” Proc. IEE, Vol. 112, 1917 (1971)
  - 15) 安岡・常広：「誘導機駆動用・電流制御形インバータの転流コンデンサ容量の決定法」電学論 B94, 335 (昭49-7)
  - 16) 野中・辻：「サイリスタ変換器—電動機系の過渡解析法と電流形インバータ駆動誘導電動機系への応用」電学論 B 100, 161 (昭55-3)
  - 17) 野中・辻：「トルク脈動を考慮した電流形インバータ駆動誘導電動機の定常および安定解析」電学論 B 101, 129 (昭56-3)
  - 18) 野中・辻：「電流形インバータ駆動誘導電動機系のPI制御時の安定解析」電学論 B 101, 751 (昭56-12)