

防撓材により補強された曲面板の最適設計 (その1) 最適防撓材

福 地 信 義*・勝 田 順 一*

On the Optimum Design of Shallow Shell Reinforced with Stiffeners

Part 1. Optimum Stiffener

by

Nobuyoshi FUKUCHI and Junichi KATSUTA

The greater parts of curved ship-hull and vessel in chemical plant are consisted of thin shells reinforced with stiffeners. In the case that stiffeners are fitted to reduce the corresponding stresses on shell plate, the optimum stiffness of stiffener exists according to given curvature and aspect ratio of shell plate.

In this paper, shell structure is analyzed by the finite strip method and the optimization technique SMUT with the procedure of constrained condition by using penalty function is executed in order to determine the most suitable stiffener against given shell plate. The relations between optimum stiffness of stiffener and curvature or aspect ratio of shell plate are clarified.

1. はじめに

船体彎曲部の外板や化学プラントの槽塔類は比較的薄い曲面板により構成され、防撓材による補強を必要とする場合が多い。曲面板の曲率や捩り率は流体力学的要求や構造物の機能上から決まり、構造寸法や外形は工作上的の制約や周辺構造の配置により決まるために、これらに応じた防撓材の剛性を選んで補強する必要がある¹⁾。

防撓材は座屈防止のためにも用いられるが、一般に船体構造等に用いられる寸法比の曲面構造では許容応力内では幾何学的な非線形性は現われないために²⁾、ここでは曲面板に生じる応力の減少を目的とする防撓材を対象とした。曲面構造の解析には有限帯板法³⁾を用い、曲面板に生じる最大応力を最も小さくするような最適な防撓材の剛性を、Fiacco—McCormickの罰金関数法により制約条件なしの問題へ変換した、最適化手法 SUMT 法⁴⁾により求めた。またこれにより、

曲面板の曲率や縦横比の違いによる最適防撓材の剛性との関係および発生する最大応力について明らかにした。

2. 解析法

2.1 防撓曲面板の解析³⁾

Fig.1 に示すように直交座標系をとり、曲面板に生じる変位、応力および外力を図のように表わす。曲面の x, y 方向の曲率を $1/R_{11}, 1/R_{22}$ 、捩り率を $1/R_{12}$ とし、これらがあまり大きくない、投影形状が長方形の曲面板を対象とする。なお β は縦横比である。

(1) 曲面板の変位関数

曲面板を Fig. 2 に示すような帯板要素に分割し、有限帯板法により解析を行う。その剛性行列、荷重ベクトルを計算する際の変位関係は以下に述べる方法により求めた関数を用いる。

i) 面外変位

昭和59年4月28日受理

* 構造工学科 (Department of Structural Engineering)

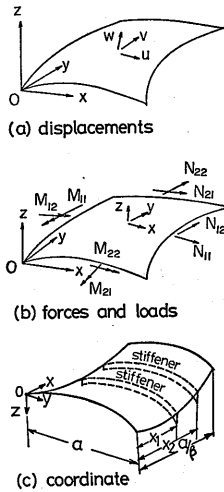


Fig. 1 Displacements and forces on shell

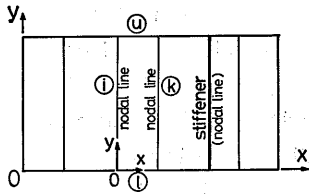


Fig. 2 Local and global coordinates of shell structure

面に垂直方向の変位 w に関する基礎微分方程式は次のように表わされる。

$$D \Delta \Delta \Delta \Delta w + Et L^2(w) = \psi(X, Y, Z) \quad (1)$$

ただし $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$,

$$L = \frac{1}{R_{22}} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{2}{R_{12}} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + \frac{1}{R_{11}} \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

ここに, D は板の曲げ剛性 ($= Et^3/12(1-\nu^2)$), E はヤング率, ν はポアソン比, t は板厚, $\psi(X, Y, Z)$ は荷重項を表す。

w を表わす y 方向の関数として梁の座屈波形を表す関数 $\varphi_{3n}(y)$ を用いて, 変位を $w = f_{3n}(x) \varphi_{3n}(y)$ とし, (1) 式に代入して Kantorovich の方法⁽⁶⁾ を適用すると $f_{3n}(x)$ に関する 8 次の常微分方程式を得る。

$$\begin{aligned} & \beta_{(0)} f_{3n}^{(8)} + 4\beta_{(2)} f_{3n}^{(6)} + \left(6\beta_{(4)} + \frac{\delta \beta_{(0)}}{R_{22}^2} \right) f_{3n}^{(4)} \\ & + \left(4\beta_{(6)} + \frac{4\delta \beta_{(2)}}{R_{12}^2} + \frac{2\delta \beta_{(2)}}{R_{11} \cdot R_{22}} \right) f_{3n}^{(2)} \\ & + \left(\beta_{(8)} + \frac{\delta \beta_{(4)}}{R_{11}^2} \right) f_{3n} = 0 \end{aligned} \quad (2)$$

ここに $\beta(i) = \int_{-b/2}^{b/2} \varphi_{3n}^{(i)} \cdot \varphi_{3n} dy$, $\delta = 12(1-\nu^2)/t^2$

(2) 式の特徴方程式の 8 根を $\pm(\kappa \pm i\mu_1)$, $\pm(\kappa \pm i\mu_2)$ とすると, 面外変位を次の形で表わす。

$$w = \sum_{n=1}^N f_{3n}(x) \varphi_{3n}(y) \quad (4)$$

$$\begin{aligned} f_{3n}(x) = & A_{11} \cosh \kappa_1 x \cos \mu_1 x + A_{12} \sinh \kappa_1 x \cos \mu_1 x \\ & + A_{13} \cosh \kappa_1 x \sin \mu_1 x + A_{14} \sinh \kappa_1 x \sin \mu_1 x \\ & + A_{21} \cosh \kappa_2 x \cos \mu_2 x + A_{22} \sinh \kappa_2 x \cos \mu_2 x \\ & + A_{23} \cosh \kappa_2 x \sin \mu_2 x + A_{24} \sinh \kappa_2 x \sin \mu_2 x \end{aligned} \quad (5)$$

ここに A_{11}, A_{12}, \dots は①, ② 辺の境界条件により定まる積分定数

ii) 面内変位

面内変位 u, v を表わす y 方向の関数は③, ④ 辺の境界条件に合致する三角関数を用いて次式で表わす。

$$u = \sum_{n=1}^N f_{1n}(x) \varphi_{1n}(y), \quad v = \sum_{n=1}^N f_{2n}(x) \varphi_{2n}(y) \quad (6)$$

ここに $f_{1n}(x), f_{2n}(x)$ は各モードについて, x, y 方向の平衡方程式に Kantorovich の方法を適用して導いた, 次の方程式に(5)を代入して求めた特解である⁽⁵⁾。

$$\left. \begin{aligned} & \gamma_{11(0)} f_{1n}^{(2)} + \frac{1-\nu}{2} \gamma_{11(2)} f_{2n} + \frac{1+\nu}{2} \gamma_{12(1)} f_{2n}^{(1)} \\ & = \left(\frac{1}{R_{11}} + \frac{\nu}{R_{22}} \right) \gamma_{13(0)} f_{3n}^{(1)} \\ & \frac{1+\nu}{2} \gamma_{21(1)} f_{1n}^{(1)} + \frac{1-\nu}{2} \gamma_{22(0)} f_{2n}^{(2)} + \gamma_{22(2)} f_{2n} \\ & = \left(\frac{\nu}{R_{11}} + \frac{1}{R_{22}} \right) \gamma_{23(1)} f_{3n} \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

ここに $\gamma_{ij(k)} = \int_{-b/2}^{b/2} \varphi_{jn}^{(k)} \varphi_{in} dy$

(2) 防撓材の変位と応力

防撓材は帯板要素の長辺方向に付くものを考え, その位置に節線を仮定する (Fig. 2 参照)。防撓材の剪断中心 (添字 S) における変位を曲面板との接合線 (節線①) の変位を用いて表わすと次のようになる (Fig. 3 参照)。

$$\left. \begin{aligned} u_S &= u_i + (z_i - z_S) \theta_i \\ v_S &= v_i + (z_i - z_S) \frac{\partial w_i}{\partial y} + (x_i - x_S) \frac{\partial u_i}{\partial y} \\ & \quad + \omega \frac{\partial^2 \theta_i}{\partial y^2} \\ w_S &= w_i - (x_i - x_S) \theta_i \\ \theta_S &= \theta_i \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

ここに ω は断面の扇形面積であり, 図心 (添字 G) 中心の v_G, w_G も同様に表わされる。

Fig. 3 に示す防撓材の一般化応力 σ_S と一般化ひずみ ϵ_S は次のように表わされる。

$$\sigma_S = \{M_{3S} \ N_{2G} \ M_{2S} \ M_{1S}\}^T \quad (9)$$

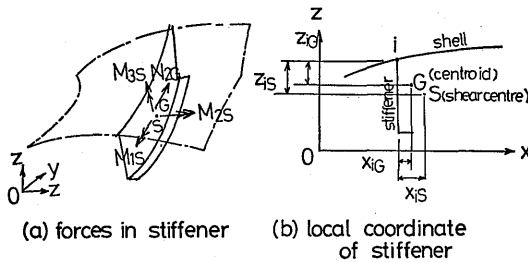


Fig. 3 Arrangement of stiffener on shell

$$\epsilon_S = \left\{ -\frac{\partial^2 u_S}{\partial y^2} \quad \frac{\partial v_G}{\partial y} - \frac{w_G}{R_{22}} \quad -\frac{\partial^2 w_S}{\partial y^2} - \frac{1}{R_{22}} \frac{\partial v_S}{\partial y} \quad \frac{\partial^2 w_S}{\partial x \partial y} \right\}^T \quad (10)$$

なお、 σ_S の各要素は ϵ_S の各要素に防撓材の断面剛性 EI_x (z 軸まわりの曲げ剛性)、 EA (引張剛性)、 EI_z (x 軸まわりの曲げ剛性)、 GJ (捩り剛性) を乗じることで求まる。

2. 最適化手法⁴⁾ SUMT

与えられた曲面板に対する最適防撓材を選び出す方法としては、次の修正目的関数を用いる Fiacco-McCormick の罰金関数法により、制約条件付きの極小値問題を制約の付かない問題に変換して、その後 Fibonacci 法を組み込んだ Davidon-Fletcher-Powell の方法 (可変計量法) により最適値を探し、これを段階的に用いた。

$$F(x, r_p) = f(x) + \sum_{i=1}^m \frac{1}{g_i(x)} \quad (11)$$

ここに、 $F(x, r_p)$ は修正目的関数、 $f(x)$ は目的関数、 $g_i(x)$ は制約条件であり、 $1/g_i(x)$ は罰金関数と呼ばれる。さらに x は設計変数、 r_p は重み係数、 p は繰返し回数である。

本来、可変計量法は2次関数の極値問題にしか適用できないが、任意の関数は極値の近傍では2次式で近似できるものとしてこれを用いた。

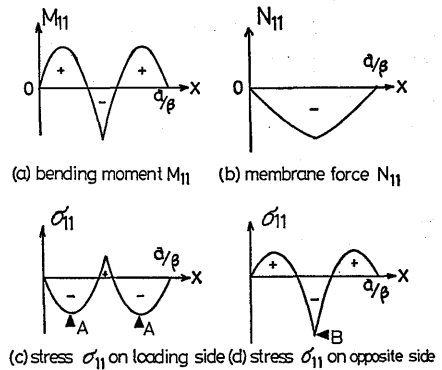
3. 最適設計

3.1 曲面板に対する最適防撓材

与えられた曲面板を防撓材の取付けにより補強する場合、その曲率や縦横比に対して最適な剛性をもつ防撓材が存在する。ここでは等水圧荷重 p を受ける単純支持の曲面板を対象に扱う。

(1) 最大応力の発生点と防撓材の剛性

防撓材により中央線上を補強される曲面板に生じる最大応力は、Fig. 4 に示すように中央線 ($y=a/2$) 上


 Fig. 4 Stress distribution of simply supported shell with a stiffener at centre line ($y=0.5a$)

の曲げモーメント M_{11} と膜力 N_{11} の組合せにより生じ、負荷側表面A点または反対側表面B点に発生し、これらの応力を σ_A 、 σ_B と呼ぶ。A点の位置は防撓材の剛性より変化するが、種々の計算結果^{1),3)}より $x=0.25a/\beta$ と定めて最適計算における繰返し回数の減少を計った。

Fig. 5 に円筒殻、楕円放物面 (E.P.Shell)、双曲

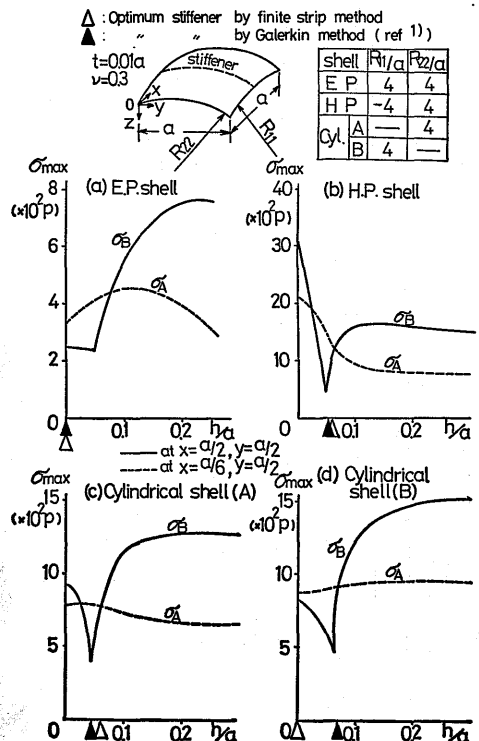


Fig. 5 Relation between maximum stress on simply supported shell with a stiffener and stiffness of stiffener

放物面 (H.P.Shell) について、防撓材の大きさを変えて有限帯板法により求めた σ_A , σ_B を示す。 σ_{max} は、 $h/a=0.05$ 付近において極小値をとる。これは防撓材の大きさに応じて曲げモーメント M_{11} と膜力 N_{11} が Fig. 6 に示すように変化し、 $M_{11}=0$ となる曲げ剛性 EI_z

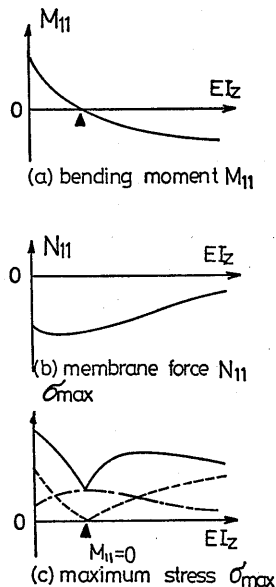


Fig. 6 Relation between maximum stress and stiffness of stiffener

において σ_B は折点をもち、一方 σ_A は単調に変化することによる。

最大応力値を最小にする防撓材の剛性は Fig. 5 において Δ 印の値であり、一般に $\sigma_A = \sigma_B$ の点となる。曲面板自体が比較的剛性の大きな E. P. Shell では防撓

Table 1 Optimum stiffener

	TYPE OF SHELL	HEIGHT OF OPTIMUM STIFFENER (h/a)	STIFFNESS OF OPTIMUM STIFFENER	
			EA/ps^2	EI_z/ps^4
SHELL WITH ONE STIFFENER	E.P. SHELL	0.0	0.0	0.0
	H.P. SHELL	0.0663	0.663×10^3	0.243×10^6
	CYLINDRICAL SHELL (A)	0.0661	0.661×10^3	0.241×10^6
	CYLINDRICAL SHELL (B)	0.0	0.0	0.0
SHELL WITH TWO STIFFENERS	E.P. SHELL	0.0	0.0	0.0
	H.P. SHELL	0.0803	0.822×10^3	0.431×10^6
	CYLINDRICAL SHELL (A)	0.0822	0.822×10^3	0.463×10^6
	CYLINDRICAL SHELL (B)	0.1592	1.592×10^3	3.362×10^6

	ELLIPTIC PARABOLOIDAL SHELL (E.P. SHELL)	HYPERBOLIC PARABOLOIDAL SHELL (H.P. SHELL)	CYLINDRICAL SHELL (A) (CYL. SHELL-A)	CYLINDRICAL SHELL (B) (CYL. SHELL-B)
$1/R_{11}$	0.25	-0.25	0	0.25
$1/R_{22}$	0.25	0.25	0.25	0

材の取付により応力の分布が攪乱され不利となることがある。また取付ける防撓材が 2 本以上の場合にも最適な剛性が存在する。なお、平板の場合には最適値は存在せず、防撓材が大きい程最大応力は減少する。

(2) 最適防撓材

2. で述べた方法により、4 種類の曲面板について求めた最適な防撓材の剛性を Table 1 に示す。また Fig. 7 には、これらを求める際の目的関数 F , f お

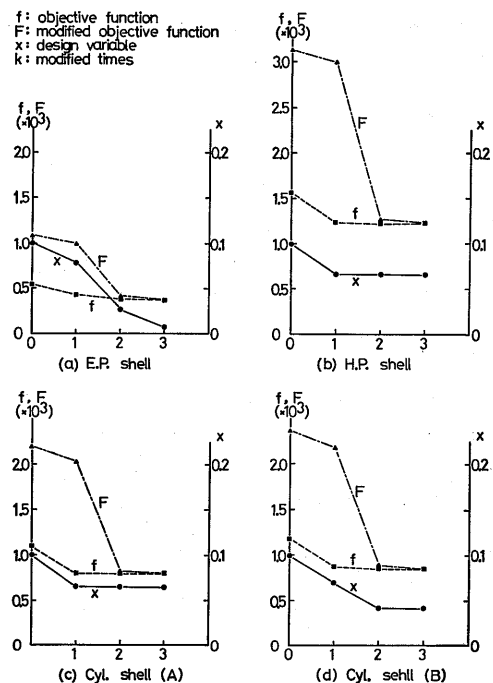


Fig. 7 Convergence of design variable

よび設計変数 x の収束状況を示す。

H. P. Shell と円筒殻について、最適防撓材で補強する場合の主応力分布を補強なしの場合と比較して Fig. 8 (H. P. Shell) および Fig. 9 (円筒殻) に示す。これらより、防撓材の取付は主応力の大きさだけでなく方向も変化させることが分かる。Fig. 10 に防撓材のない場合と最適な防撓材で補強した場合について中央線上のたわみと発生モーメントおよび膜力の分布を示す。計算例の H. P. Shell は平均曲率 0 の膜力による負荷抗力の小さい曲面のため、防撓材の取付けによりたわみや曲げモーメントが極端に減少するのが見られる。

3. 2 曲面板の形状と補強効果

曲面板の曲率、捩り率は流体力学的要求や構造物の機能から決まり、また構造寸法や外形は工作上の制約や周辺構造の配置から決まるため、形状に応じた剛性

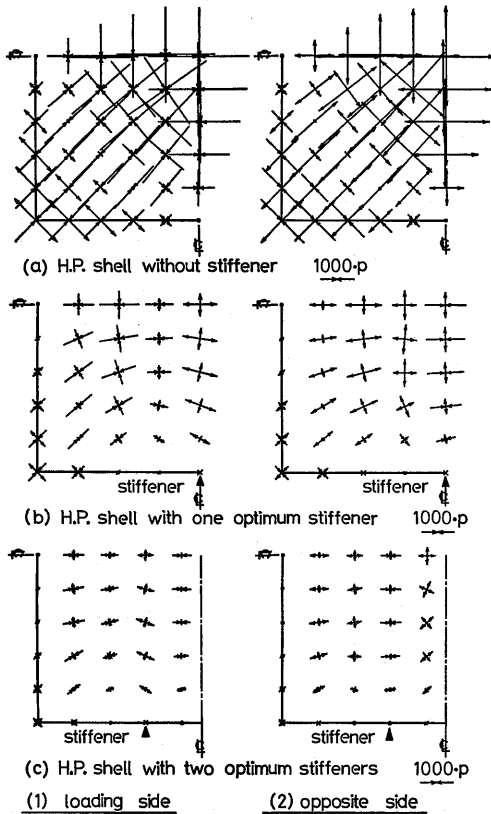


Fig. 8 Distribution of principal stress on both surfaces of H.P. shell

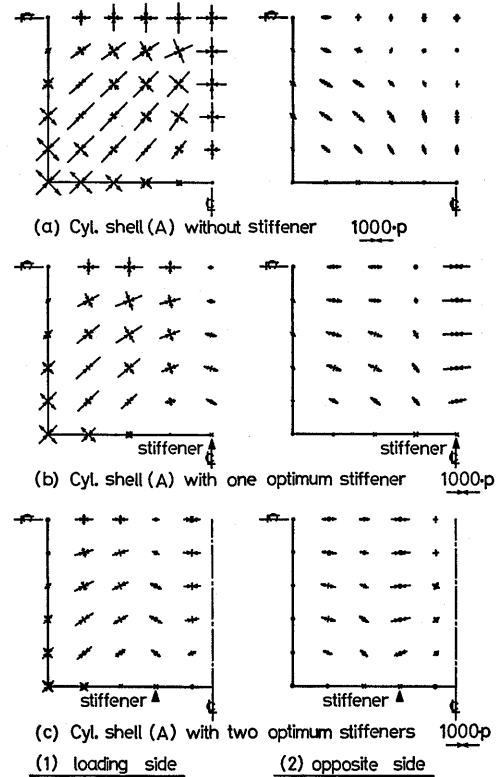


Fig. 9 Distribution of principal stress on both surfaces of Cylindrical shell

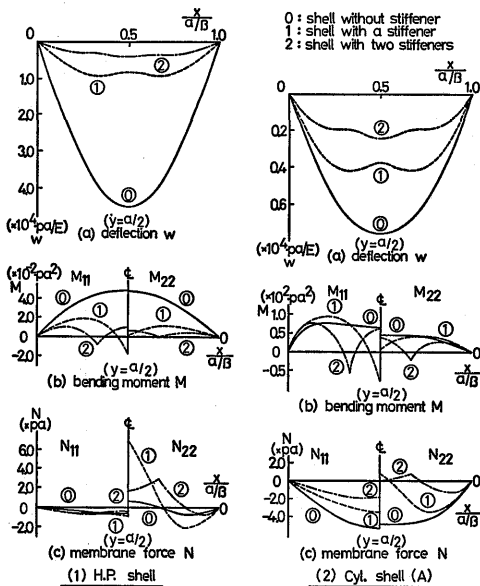


Fig. 10 Deflections and corresponding forces of simply supported shell with a few optimum stiffener

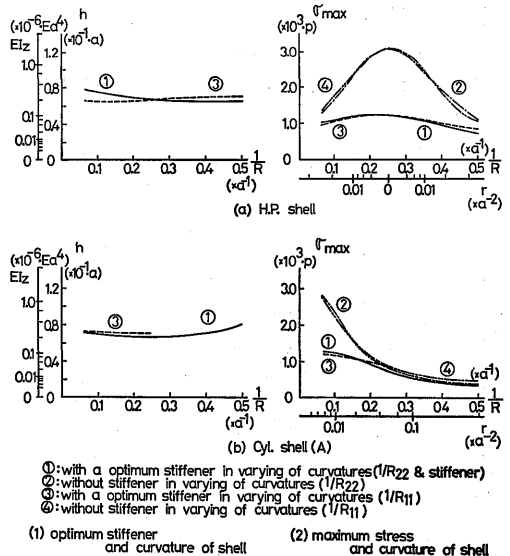


Fig. 11 Optimum stiffener corresponding to given curvature of shell with a stiffener and its effect

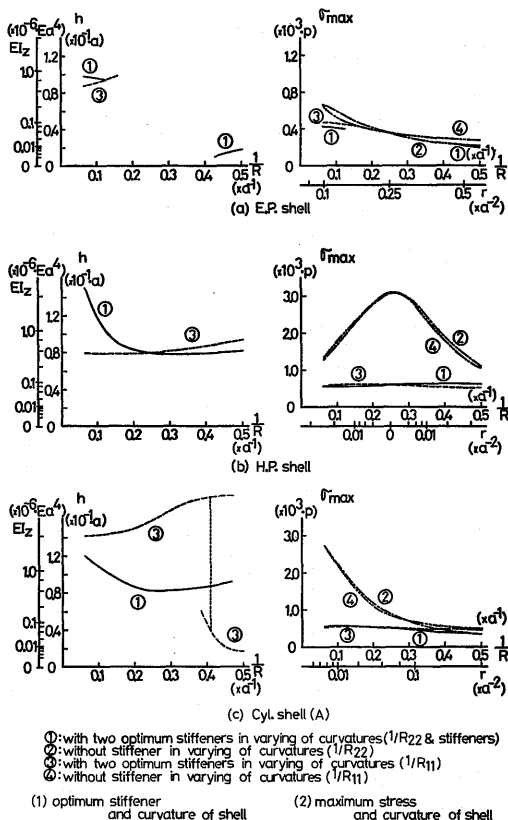


Fig. 12 Optimum stiffener corresponding to given curvature of shell with two stiffeners and its effect

をもつ防撓材により補強する必要がある。

(1) 曲率

Fig. 11 および Fig. 12 に曲面板の曲率に応じた最適防撓材の大きさとその防撓材で補強する場合としない場合の最大応力の関係を示す。図中の横軸 r は曲面板自体の剛性の大きさを示す次の指標である¹⁾。

$$r = \left(\frac{1}{R_{11}} + \frac{\beta^2}{R_{22}} \right)^2 + \frac{2\beta^2}{R_{12}^2} \quad (12)$$

図より、 $r < 0.025$ で補強効果があり、 $r > 0.025$ では補強効果は小さいことが分かる。 $r > 0.025$ の曲面板は膜力による負荷抗力が高く、それ自体が剛性の高い曲面板である。このことは防撓材の取付けは主に曲げモーメントを減少する効果があり、曲げモーメントに負荷抗力の依存性が高い、平板に近い剛性の曲面板ほど防撓材による補強の効果があることを表わしている。

(2) 縦横比

Fig. 13 および Fig. 14 に、中央線上に防撓材を取付けた 4 種類の曲面板について、その縦横比 β を変化させて求めた最適防撓材の大きさとそれによる最大応力

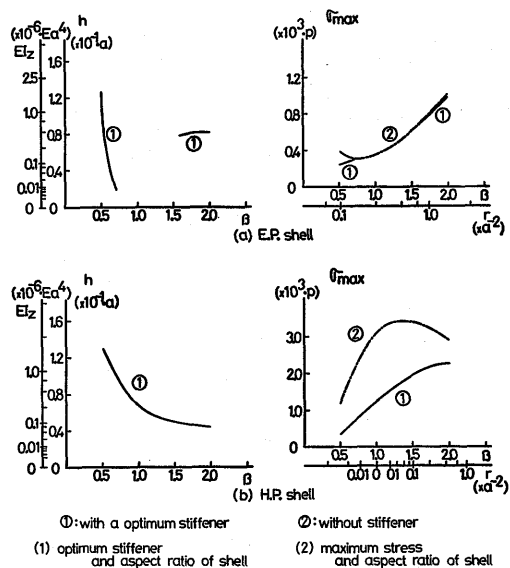


Fig. 13 Optimum stiffener corresponding to given aspect ratio of shell with a stiffener and its effect

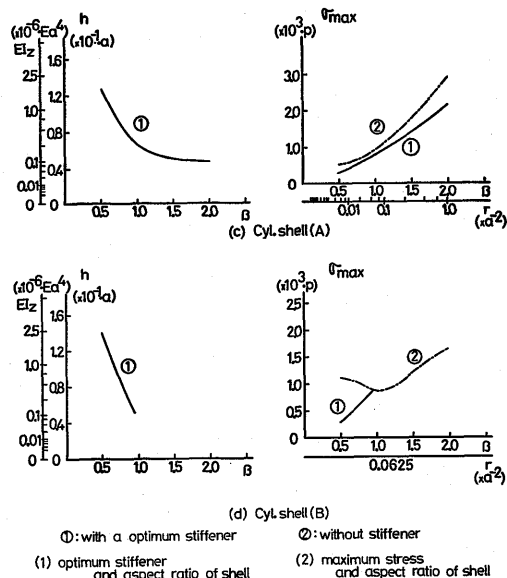


Fig. 14 Optimum stiffener corresponding to given aspect ratio of Cylindrical shell with a stiffener and its effect

の変化を示す。E. P. Shell および円筒殻 (B) では $\beta > 0.8$ において最適防撓材は存在しない。一般にどの種の曲面板も r が小さい程補強の効果が大いことが分かる。

4. まとめ

曲面構造の解析には有限帯板法を用い、曲面板に生じる最大応力を最も小さくする最適防撓材を罰金関数法により制約条件を処理した SUMT 法により求めた。これにより次の結論を得た。

- 1) 指数 r が小さい曲面板を補強する場合、その曲率、縦横比に応じた最適な防撓材が存在する。
- 2) 単純支持の曲面板では、曲げモーメントによる負荷抗力の依存性が高い（指標 r が小さい）曲面ほど防撓材による補強の効果がある。特に H.P.Shell には補強の効果が大きい。
- 3) E.P.Shell のように面全体に渡りほぼ均一な膜力の発生があり、膜力による負荷抗力が高い曲面では、防撓材の取付けにより膜力の発生を乱し曲げモーメントを増大させ、必ずしも補強の効果は得られない。

参考文献

- 1) 福地信義：曲面構造における防撓材の補強効果について，日本造船学会論文集，第139号（1976）
- 2) 福地信義：防撓曲面板の大撓み解析，西部造船会会報，第50号（1975）
- 3) 福地信義：有限帯板法による防撓曲面板構造の解析，日本造船学会論文集，第135号（1974），第137号（1975）
- 4) J. コワリック，M.R. オスボーン：ゝ非線形最適化問題ゝ，（1970）培風館
- 5) Bouma, A. L. : Some Application of the Bending theory Regarding Double Curved Shell, The Theory of Elastic Shells, (1959)
- 6) Kantorovich, L.V. and Krylov, V.I. ; Approximate Method of Higher Analysis, Interscience Publishers, (1964)

