

# デルタ列関数によるステファン問題の解析

福 地 信 義\*

## Analysis of Stefan Problem by Using the Function of Delta-Sequence

by

Nobuyoshi FUKUCHI\*

The oil tankers carrying high pour point crude oil almost are equipped with the tank heating system consisted of meandering steam pipe to reduce the viscosity of crude oil. However, the accident of oil solidification occasionally occurs during pumping up cargo oil from an oil tank of tanker to land for the sake of unsuitable oil heating system. For a settlement of this case, the heat energy of steam is transferred to crude oil in solid state to melt it.

In order to investigate the heat transfer with moving solid phase boundary, so-called Stefan problem, two dimensional numerical analysis is carried out in which the enthalpy is expressed continuously by using the function of delta-sequence at interface of both phases. Furthermore, the spreaded melting zone and the oil temperature by using paraffin are measured in quasi-two dimensional tank with two heaters. The results of theory and experiment are compared for judging the justice of analytical method.

### 1. はじめに

高流動点原油を輸送するタンカーにおいて、その装備した加熱システムが適当でない場合には船底部に原油を凝固させ、揚油不能となる事故が起ることがある。

この場合には、船底付近に設置された蒸気管に通気することにより凝固状態の高流動点油を溶融し、さらに低粘度化を行なう。

このような、固液相境界が移動する場合の熱拡散、いわゆるステファン問題<sup>1)</sup>を解析するためには相境界における融解潜熱の扱いが問題となる。本論文では相変化時におけるエンタルピーをデルタ列関数を用いて連続的に扱い、固定メッシュの有限要素法により数値

解析し、固液両相内の温度分布と液相内の対流速を計算する。また凝似2次元タンクによるパラフィンの溶融実験を行い、溶融域の進展状態、温度分布などについて数値計算の結果との比較を行い、解析法の妥当性を調べる。

### 2. ステファン問題

#### 2.1 基礎式

高流動点油を加熱により溶融する場合のように、相変化があり、固液相境界が移動する場合の熱拡散の状態は以下の諸方程式により表わされる。

##### (1) 液相内

昭和59年10月1日受理

\*構造工学科(Department of Structural Engineering)

液相内では自然対流による熱伝達が起こる。油を近似的にニュートン流体とし、流れを層流とすると、速度場と温度場の状態を表わす式は次の通りである。

なお式はtensor表示とし、添字は総和規約に従うものとする。

### i) 流れの連続式

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad (i=1, 2, 3) \quad (1)$$

ここに、 $u_i$ は流速である。 $x_i$ は座標を表わし、 $x_1, x_2$ を水平方向、 $x_3$ を鉛直方向（上向きを正）とする。

### ii) 運動方程式

重力場におけるNavier-Stokesの運動方程式は次式で表わされる。

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (u_j u_i) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \nu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right\} - \beta g_i \theta \quad (2)$$

ここに、 $p$ は圧力、 $t$ は時間、 $\theta$ は油温である。また $g_1 = g_2 = 0$ 、 $g_3 = -g$ （重力の加速度）であり、 $\nu$ は動粘性係数、 $\beta$ は体積膨脹率、 $\rho$ は比重である。

(2)式の境界条件としては固液相境界およびタンク周壁においてno-slipの条件をとり、自由表面では鉛直方向の流速を0とする。

### iii) 熱拡散方程式

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (u_j \theta) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \kappa_i \frac{\partial \theta}{\partial x_j} \right) \quad (3)$$

ここに、 $\kappa_i (= \lambda_i / c\rho)$ は液相内の熱拡散係数、 $\lambda_i$ は熱伝導率、 $c$ は比熱である。

### (2) 固相内

凝固相の熱伝導を表わす式は(3)式において移流項がない次の方程式である。

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \kappa_s \frac{\partial \theta}{\partial x_j} \right) \quad (4)$$

ここに、 $\kappa_s (= \lambda_s / c\rho)$ は凝固相内の熱拡散係数である。

### (3) 固液相境界

相境界では、流出入する熱流束の差が融解潜熱に等しくなる、いわゆるステファン条件と呼ばれる次の熱収支方程式を満足しなければならない。

$$\lambda_s \left( \frac{\partial \theta}{\partial n} \right)_s - \lambda_l \left( \frac{\partial \theta}{\partial n} \right)_l = \rho q_L \frac{\partial m}{\partial t} \quad (5)$$

ここに、 $n$ は固相境界に対し外向き法線方向を表わし、添字 $s, l$ をそれぞれ固相側、液相側の値を示す。

$m$ は $n$ 方向の境界移動量、すなわち境界上の単位面積当りの融解量を意味する。また $q_L$ は融解潜熱である。

## 2. 2 デルタ列関数を用いた熱拡散方程式

### (1) エンタルピー関数

(5)式で表わされるステファン条件を相境界で厳密に満足させ、熱拡散方程式を解くことは困難なので、次のエンタルピー関数 $H(\theta)$ を用いて近似的に解析を行う。

$$H(\theta) = \int_0^\theta c(\theta) \rho(\theta) d\theta + \rho(\theta_m) q_L Y(\theta - \theta_m) \quad (6)$$

ここに、 $Y(x)$ はHeavisideのステップ関数であり、 $\theta_m$ は油の融点である。

高流動点原油のような混合体では融点にある程度の幅があり、また比熱、比重量の温度依存性が小さいことを考慮するとエンタルピー関数は次のように表わされる。

$$H(\theta) = c\rho\theta + \rho q_L \int_{-\infty}^{+\infty} w_k(\theta - \theta_m) d\theta \quad (7)$$

ここに、 $w_k(x)$ はデルタ列関数であり、Diracのデルタ関数 $\delta(x)$ との間には次の関係がある。

$$\delta(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} w_k(x) \quad (8)$$

デルタ列関数の例を3種類Fig.1に示す。ここでは最も扱い易い、

$$w_k(x) = k/\pi(1+k^2x^2) \quad (9)$$

を用い、 $k$ と $w_k(x)$ との関係およびこれに対応するエンタルピー関数 $H(\theta)$ をFig.2に示す。デルタ列関数を用いることにより、融点において潜熱のため不連続となるエンタルピーを連続的に扱うことができる。

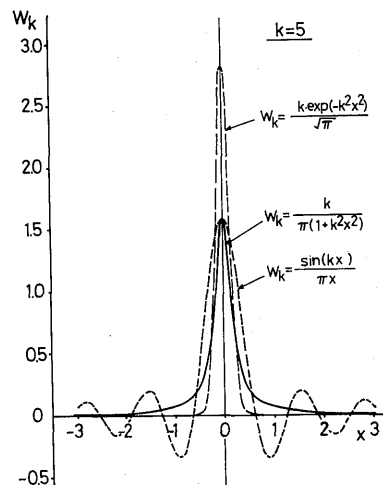


Fig.1 Three examples of function of delta-sequence.

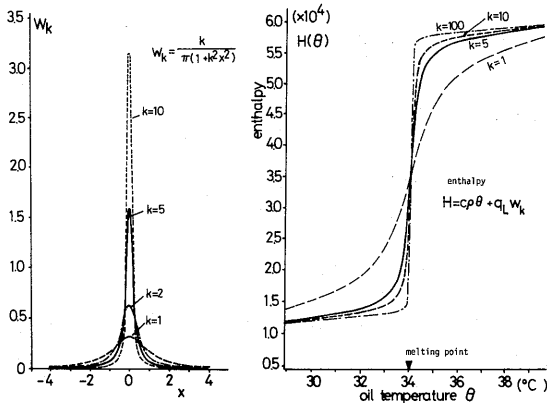


Fig.2 A function of delta-sequence and enthalpy function using it

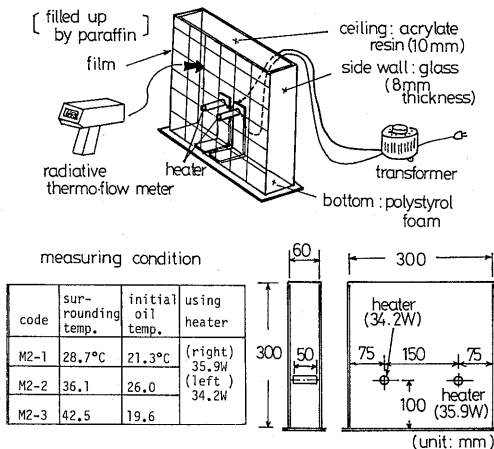


Fig.3 Quasi-two dimensional tank model and measuring condition.

なお、(9)式における  $k$  の値は  $H(\theta_m) = \rho \theta_m (c + q_L / \theta_m)$  と  $w_k$  の最大値  $w_k(0) = k/\pi$  との比較から  $k = \pi q_L / \theta_m$  とした。

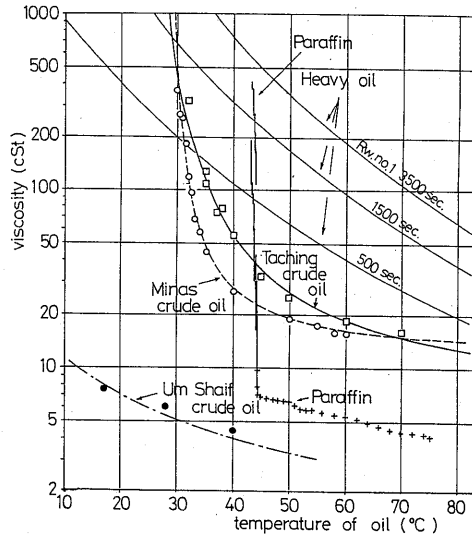
### (2) 熱拡散方程式

(7)式のエンタルピー関数を顕熱容量で割ると次のようになる。

$$h(\theta) = \frac{H(\theta)}{c\rho} = \theta + \frac{q_L}{c} \int_{-\infty}^{+\infty} w_k(\theta - \theta_m) d\theta \quad (10)$$

この  $h(\theta)$  を用いることにより、(3)式および(4)式で表わされる熱拡散方程式は、相境界における潜熱吸収の取扱いを考慮した、すなわち弱い意味においてステファン条件を満足する次の方程式に変換される。

$$\frac{Dh}{Dt} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \kappa \frac{\partial \theta}{\partial x_j} \right) \quad (11)$$



item	unit	symbol	Taching crude oil	Minas crude oil	Paraffin used for experiment
Pour point	°C	$\theta_p$	30	35	—
Melting point	°C	$\theta_m$	—	—	42~44
Specific weight	Kg/m <sup>3</sup>	$\rho_{15}$	$0.86 \times 10^3$	$0.85 \times 10^3$	$0.81 \times 10^3$
	Kg/m <sup>3</sup>	$\rho$	$\rho = \rho_{15} (1 - 0.7 \times 10^{-3} \theta)$		
Cubical expansion rate	1/K	$\beta$	$0.57/\rho$		
Specific heat	J/Kg·K	$C$	$C = 1740 / \sqrt{\rho / 1000} + 3.8(\theta - 15)$		
Latent heat of fusion	J/Kg	$q_L$	$2.09 \sim 2.26 \times 10^5$		
Thermal conductivity	W/m·K	$\lambda$	$\lambda = 117(1 - 0.54 \times 10^{-3} \theta) / \rho$		

note;  $\theta$ : oil temperature (°C),  $\theta_{15} = \theta - 15$

Fig.4 Physical properties of high pour point oil

ここに、 $D/Dt$  は流体力学的微分であり、固相では  $D/Dt = \partial/\partial t$ 、液相では  $D/Dt = \partial/\partial t + u_j \partial/\partial x_j$  となる。さらに(11)式は次のように書き改められる。

$$\left[ 1 + \frac{q_L}{c} w_k(\theta - \theta_m) \right] \frac{D\theta}{Dt} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \kappa \frac{\partial \theta}{\partial x_j} \right) \quad (12)$$

## 3. 解析結果

### 3.1 パラフィンによる溶融実験<sup>2)</sup>

#### (1) 実験方法

高流動点油の加熱による溶融範囲の拡がり方と温度分布を調べ、さらに2.2で述べたデルタ列関数を用いた解析法による解とを比較するために、ガラス製の凝似2次元タンクに融点42~44°Cの固形パラフィンを入れて、2本の円柱状電気ヒーター（加熱管と称する）により加熱を行い計測を行った。この実験装置と実験要目をFig.3に示す。

溶融域の拡がり方はガラス面に貼ったフィルム上に

相境界を直接記録した。温度分布は非接触型熱放射計を用いて、縦横11×13の格子点上の熱放射量を計測し、経験的に求めた熱放射量—温度の関係式により温度へ換算した。なお熱放射量は周囲の熱的環境に影響されるので、これを考慮して温度への換算式を作った。

実験に用いたパラフィンの粘度—温度特性およびその他の物性値を高流動点原油の代表例であるミナス原油（インドネシア産）および大慶原油（中国産）と比較して<sup>3), 4)</sup> Fig. 4に示す。

## (2) 溶融状態と温度分布

加熱時の溶融域の進展の様子をFig. 5(a)に示す。

なお、Fig. 5(b)は、3. 2で述べる数値解析法により求めた溶融域の時間的変化である。溶融は最初加熱管上方に向って起こり、上面に到達すると液相が固相より軽いことと膨脹により上面横方向に液相が拡がり、次に上面から下方に向って溶ける。加熱管より下部は対流が起らず移流の効果がなため、伝熱量が少ないので、加熱管より上部が完全に溶解するまで融解しない。

Fig. 6は油温分布の経時変化を示す。いずれも固液相境界では融解潜熱が大きいために、両相とも境界に対し法線方向の温度勾配が大きくなるのが見られる。

## 3. 2 数値解析

### (1) 計算法

相境界が移動する場合の熱拡散状態を解析する方法として、縦横8×9の固定メッシュによる有限要素法を用いる。ただし、固定メッシュのため移動する境界を完全には追従できないが、相境界付近では非常に高粘度のため流れはほとんど起らず、流速計算において境界位置のわずかな食い違いあまり問題にならないと

考えられる。

速度と温度に関する方程式(1), (2), (12)に対しGalerkin法を適用して有限要素法のための定式化を行い、2次元問題として扱った。有限要素としては8節点の2次要素を用い、定式化後の $u, p, \theta$ に関する非線形連立方程式はNewton-Raphson法により数値的に解き、時間微分項は差分で近似した。

計算対象はミナス原油とし、Fig. 7に示す計算条件により解析を行った。また加熱開始時には加熱管まわりの3×3の要素は液相要素とし、他を固相要素とした。固相要素はその平均温度が流動点以下であるか否かを判定し、超えている要素は液相要素に転換した。

### (2) 溶融状態

液相内対流について計算した流速分布の時間的変化の様子をFig. 7に示す。対流は加熱管上方への上昇流と側方の下降流から成り、溶融域の広さに応じて循環流の数が増えるのが見られる。

Fig. 8はFig. 7に対する温度等高線の時間的変化である。パラフィンによる計測でも見られるように、固

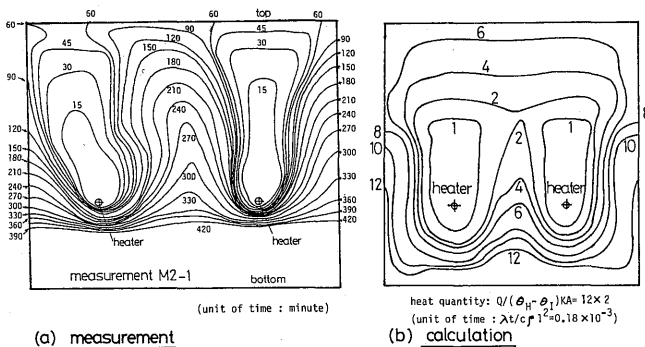


Fig. 5 Growth of melting zone in tank model with two heaters.

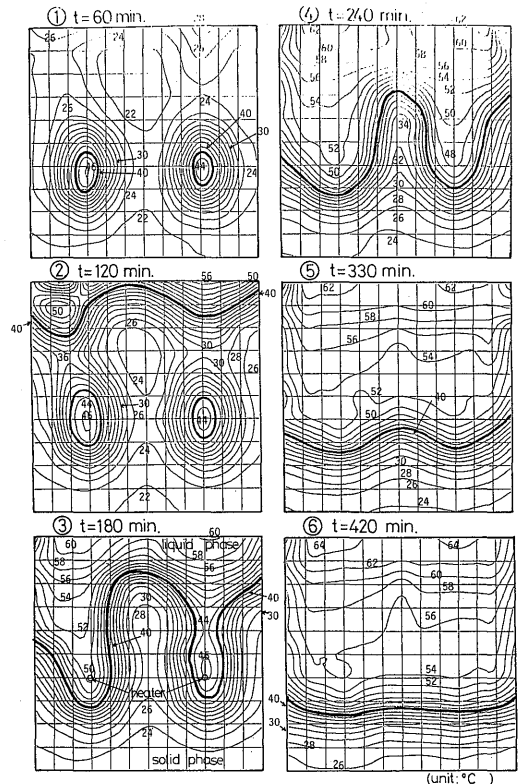


Fig. 6 Distributions of oil temperature in measurement M2-1

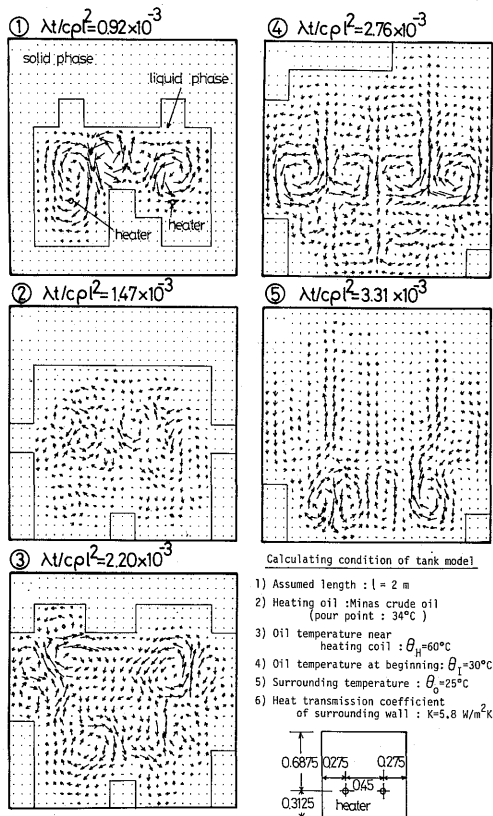


Fig. 7 Calculated flow pattern in model C2-2 and calculating condition.

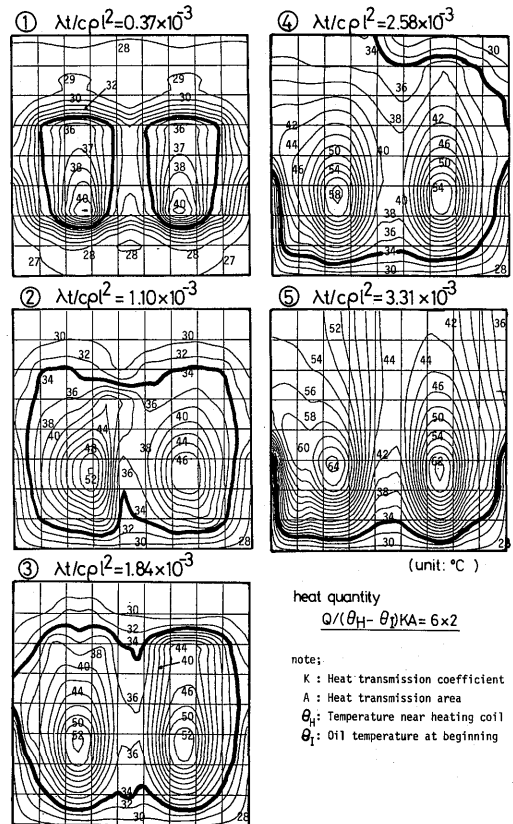


Fig. 8 Distributions of calculated oil temperature in model C2-2

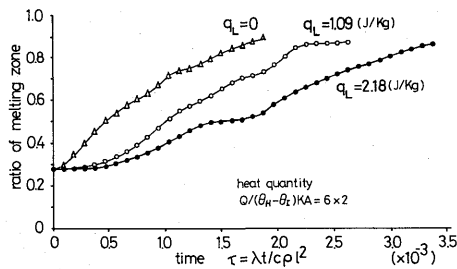


Fig. 9 Variations of calculated melting zone corresponding to three kinds of latent heat.

液相境界において両相の温度勾配は融解潜熱吸収のため大きい。これに反し、境界から離れた固相部では伝熱量が少ないため、また液相部では対流による攪乱のため温度が均一化し、温度勾配が小さくなっている。

2. 2で述べた、デルタ列関数を用いた熱拡散方程式により相境界の熱収支において潜熱の扱いが妥当で

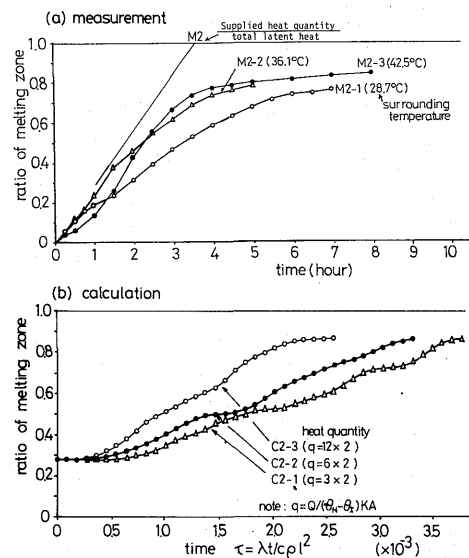


Fig. 10 Variations of melting zone corresponding to supplied heat quantity.

あるかを調べるために、高流動点原油の融解潜熱 $q_L=2.18 \times 10^5$  (J/kg) に対しその $\frac{1}{2}$ および0の場合について解析を行い、この3種類の場合についてタンク全体を1.0とした溶融量比の経時変化をFig.9に示す。溶融量比の曲線は固定メッシュのために波うっているが、潜熱の大きさの差による溶融速度の違いが現われている。

Fig.10(a) はパラフィン溶融実験における外周温度と溶融量比との関係であり、加熱開始2～3時間は初期油温に影響されるが、その後は周囲に逃げる熱量の多少により溶融速度が決っている。これに対して、外部への貫流でなく供給熱量を変化させた場合について計算した溶融量比の時間的変化をFig.10(b)に示す。

固相と液相およびタンク全体の各平均温度の経時変化を、計測値と計算値を比較して、Fig.11に示す。タンク全体の平均温度は溶融域が小さい初期には固相の温度に近く、溶融が進むに従って液相の温度に近づくが、加熱管より上部が全て溶け溶融速度が鈍ると潜熱に奪われていた熱が液相温度の上昇に使われ、油温が急激に上昇する。固相温度の時間的変化は小さく、この図からも伝導のみによる伝熱は少ないことが分かる。

#### 4. 結 言

高流動点油を対象に、凝固状態から加熱により溶融する際の相変化を含む熱拡散の状態を解析するために、熱拡散方程式においてエンタルピーをデルタ列関数を用いて温度に関する連続関数として表わし、固定メッシュの有限要素法による数値解析を行った。またこれに対応するパラフィンの溶融実験を行って解析解との比較を行った。これにより完全ではないが本解析法によるステファン問題の解析が可能であることが分った。

しかし、溶融域の進展が階段状になるなど、移動境界の取扱いやデルタ列関数における $k$ 値の選択法などに問題が残されている。

本研究は文部省科学研究補助金を得て行ったことを付記する。

#### 参考文献

- 1) 山口昌哉, 野木達夫: ステファン問題 (1977), 産業図書
- 2) 福地信義: 高流動点油の加熱による溶融と熱拡散について, 日本造船学会論文集, 第156号 (1984)
- 3) 渡辺, 他: 貨油タンクの高粘度原油洗浄, 昭58春季船舶技術研究所発表会講演集 (1983)
- 4) 日本造船研究協会: タンカーのタンクヒーティングに関する研究, 協会資料, No.79 (1968), No.99 (1969)

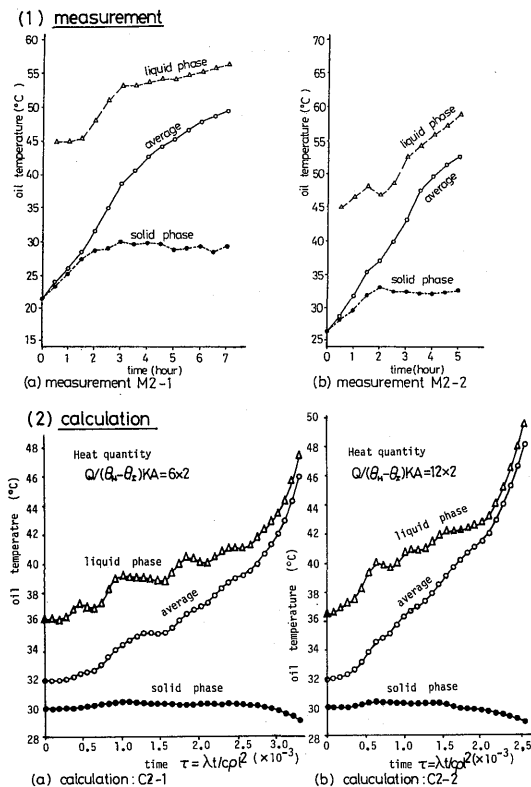


Fig.11 Variations of averaged oil temperatures in solid phase and liquid phase.