

# 立体骨組構造物の非線形解析法 (I)

修行 稔\*・堀田 緑\*  
大崎 尚哉\*\*

## A New Plastic Hinge Method for the Nonlinear Analysis of Steel Space Frames (I)

by

Minoru SHUGYO\*, Midori HORITA\*  
and Hisaya OHSAKI \*\*

A numerical method for the nonlinear analysis of steel space frames subjected to cyclic loading is presented. It is a kind of plastic hinge method, and plastic deformations in the plastic hinge are obtained by integration of generalized plastic strains (axial plastic strain  $\epsilon_p^o$ , biaxial plastic curvatures  $\phi_y^o$  and  $\phi_z^o$  and warping plastic curvature  $\phi_w^o$ ) of the member along the assumed length  $l_p$  of elastic-plastic region respect to the member axis. The non-stationary hysteretic stress-strain relation of material and the effects of large deflection are taken into account.

In the present paper the fundamental theory of the method is given in detail showing a few analytical results to examine propriety of the basic concept of the method on (1) ultimate load behavior of curved I-beams; (2) inelastic behavior of wide flange beam-columns under constant vertical and two-dimensional alternating horizontal loads.

### 1. 序

骨組構造物の挙動は、本来三次元的な取扱いによって明らかにされねばならない<sup>1)~4)</sup>。特に弾塑性性状については二方向応力の相互作用効果という問題があるため、これまで軸力と二軸曲げ荷重を受ける鋼柱の弾塑性挙動に関して、多くの実験的な研究あるいは解析法についての研究が行われてきた<sup>5)~8)</sup>。解析法は、精度を重視したもの、簡略さを目指したものなど数多く提案されているが、近年の電子計算機の飛躍的な性能向上を反映して、一方向載荷・繰返し載荷を問わず、部材軸方向・断面ともに分割して微小要素とし、各要素の応力ひずみ履歴関係に基づいて塑性域の拡がりを逐

次追跡しつつ解析を進めるCDC法<sup>9)</sup>、差分法<sup>9)</sup>、有限要素法<sup>10)</sup>等が使用されることが多い。

複数部材で構成される立体骨組の解析法は、この単一部材に対する解析法をそのまま拡張して適用するものと<sup>4), 11)~13)</sup>、塑性域の拡がりを材端に縮約する塑性調節法<sup>13)~16)</sup>の二つに大別される。鋼材は、降伏荷重を越える繰返し荷重に対して複雑な応力ひずみ履歴関係を示すため<sup>5), 22)</sup>、骨組の解析においてもできるだけこれを考慮できることが望ましいが、前者はこの繰返し応力ひずみ関係を直接適用できると同時に、塑性域の拡がりを考慮できる特長がある。しかし、反面、素材の応力ひずみ履歴曲線のパラメータが一つ一つの繊維

昭和59年10月1日受理

\*構造工学科(Department of Structural Engineering)

\*\*長崎県庁(Nagasaki Prefectural Office)

で異なるため、必然的に膨大な記憶量と計算量とが必要となり、最近の大型計算機をもってしても現実的な解法とは言い難い。部材を微小要素に分割することなしに塑性域の拡がりを考慮する簡略な解法も提案されているが<sup>6)</sup>、二軸曲げモーメント～曲率関係に大胆な仮定を導入しているため精度的な難点があるように思われる。

一方、塑性関節法の最大の利点はその簡略さにあるが、降伏曲面と塑性流れ則を用いて塑性変形成分を計算するため、部材が徐々に降伏していく過程が無視され、素材の応力ひずみ履歴関係の評価も困難であるという精度上の問題を抱えている。降伏曲面については、鋼材の降伏後のひずみ硬化やバウシング効果を曲面の移動によって表現しようとするPrager<sup>17)</sup>、Ziegler<sup>18)</sup>の研究、複数の曲面を用いるMroz<sup>19)</sup>の研究および曲面の膨張をも考慮した田中ら<sup>20)</sup>、山田ら<sup>21)</sup>の研究があり、これを塑性関節にとり入れた研究<sup>15)</sup>もあるが、例えばH型断面部材の場合、純二軸曲げでも前負荷後の降伏曲面はかなりの形状変化を起こすことが明らかになっており<sup>22)</sup>、加えてそり拘束の影響もあることを考えると、立体骨組の三次元的な繰返し挙動の解析に適用した場合、かなりの誤差が生じることは避けられない。

以上の観点から、本論文では、鋼構造立体骨組の複合非線形解析法として、従来の塑性関節法の簡便さを保ちつつ素材の応力ひずみ履歴関係をも考慮し得る手法を提示し、既往の研究結果との比較によってその妥当性を検証する。定式化に際しては部材を線材として取扱い、弾性剛性としてはその影響を考慮した幾何学的非線形剛性を用いる。また、部材の有限な回転を考慮し<sup>23)</sup>、<sup>24)</sup>部材の変形成分と剛体変位成分とを明確に分離するとともに、変形後の座標変換行列を更新している。数値解法として変位制御荷重増分法を用いることによって、最高荷重点以降の繰返し挙動を安定に解析し得る。本報では解法の基礎理論を提示し、次報でその簡略化をはかる。

## 2. 部材の幾何学的剛性

本論文で用いた幾何学的非線形剛性行列の誘導過程は前田ら<sup>23)</sup>とほとんど同じであるが、そり変形を考慮するため材軸回りのねじり変形を三次のベキ級数で仮定している。

部材座標系  $(x, y, z$  系) を Fig.1(a) のように定義し、各座標軸方向の変位成分を  $u, v, w$  で表わすと、ここで用いたひずみ成分は次の通りである。

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \\ \gamma_{xz} &= \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Fig.1(a) のように、 $x$  軸上の  $x, y, z$  方向の変位成分を  $u_0, v_0, w_0$ 、 $x$  軸まわりの回転を  $\phi_0$ 、そり関数を  $\omega$  で表すと、断面上の任意の点  $(x, y, z)$  の変位は、断面の回転を微小として次式で表わされる。

$$\left. \begin{aligned} u &= u_0 - y \frac{dw_0}{dx} - z \frac{dv_0}{dx} + \omega \frac{d\phi_0}{dx} \\ v &= v_0 - z\phi_0 \\ w &= w_0 + z\phi_0 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

(1)、(2)式を用いて前田らの方法を適用すれば、次式を満足する幾何学的非線形剛性  $K^e$  が得られる。

$$dQ = K^e dq \quad (3)$$

(3)式において、 $Q$  および  $q$  は部材端力と部材端変位であり、その成分は次の通りである。(Fig.2 参照)

$$\left. \begin{aligned} Q &= \{ F_{xi} \ F_{yi} \ F_{zi} \ M_{xi} \ M_{yi} \ M_{zi} \ \tilde{M}_{\omega i} \\ &\quad F_{xj} \ F_{yj} \ F_{zj} \ M_{xj} \ M_{yj} \ M_{zj} \ \tilde{M}_{\omega j} \}^T \\ q &= \{ u_i \ v_i \ w_i \ \theta_{xi} \ \theta_{yi} \ \theta_{zi} \ \theta'_{xi} \\ &\quad u_j \ v_j \ w_j \ \theta_{xj} \ \theta_{yj} \ \theta_{zj} \ \theta'_{xj} \}^T \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

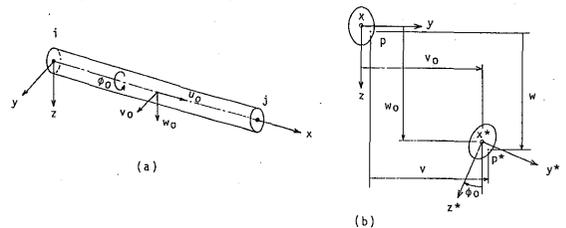


Fig.1 Displacements of Member

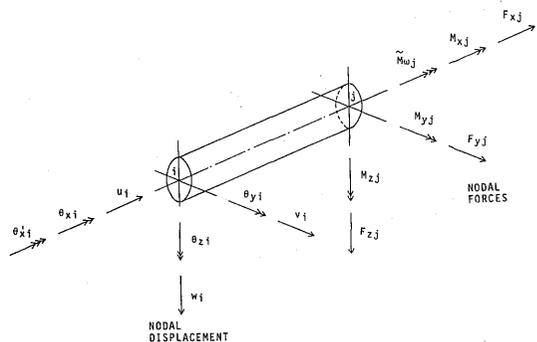


Fig.2 Nodal Displacements and Nodal Forces

ここに、 $\bar{M}_{\omega i}$ ,  $\bar{M}_{\omega j}$  : そりモーメント,  $\nu \equiv \frac{d}{dx}$

なお、本論文では  $K^e$  の導出に際してひずみエネルギーに含まれる変位の四次項を全て考慮している。

3. 塑性関節部の塑性接線剛性

本解法では、塑性関節の力学的挙動をW.F.Chenらの示した接線剛性<sup>9)</sup>を利用して評価する。この接線剛性は単位長さ部材の一般化応力増分と一般化ひずみ増分とを関係づけるものであり、部材を微小要素に分割して各繊維の応力~ひずみ履歴曲線の接線係数を断面について数値積分することにより得られる。断面形状は任意でよいが、ここではH形断面について述べる。

Fig.3 にH形部材の座標系および一般化応力  $F$  と一般化ひずみ  $\Delta$  の成分を示す。  $F$  と  $\Delta$  をそれぞれ断面の単一荷重時の初期降伏値  $F_{yx}, M_{yy}, M_{yz}, \bar{M}_{y\omega}, \epsilon_{oy}, \phi_{yy}, \phi_{yz}, \bar{\phi}_{y\omega}$  で無次元化したものの増分を

$$\left. \begin{aligned} df &= \{df_x \ dm_y \ dm_z \ d\bar{m}_\omega\}^T \\ d\delta &= \{d\bar{\epsilon}_o \ d\bar{\phi}_y \ d\bar{\phi}_z \ d\bar{\phi}_\omega\}^T \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

とすると、 $df$  と  $d\delta$  の間に次のような関係が成り立つ。

$$df = \bar{S} d\delta \quad (6)$$

ここに、

$$\bar{S} = \begin{pmatrix} \int \bar{E}_t \frac{da}{A} & \int \bar{E}_t \bar{z} \frac{da}{A} & - \int \bar{E}_t \bar{y} \frac{da}{A} \\ \int \bar{E}_t \bar{z} \frac{da}{I_y} & \int \bar{E}_t \bar{z}^2 \frac{da}{I_y} & - \int \bar{E}_t \bar{y} \bar{z} \frac{da}{I_y} \\ - \int \bar{E}_t \bar{y} \frac{da}{I_z} & - \int \bar{E}_t \bar{y} \bar{z} \frac{da}{I_z} & \int \bar{E}_t \bar{y}^2 \frac{da}{I_z} \\ \int \bar{E}_t \bar{y} \bar{z} \frac{da}{I_\omega} & \int \bar{E}_t \bar{y} \bar{z}^2 \frac{da}{I_\omega} & - \int \bar{E}_t \bar{y}^2 \bar{z} \frac{da}{I_\omega} \end{pmatrix} \quad (7)$$

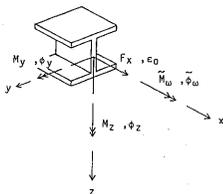


Fig.3 Generalized Stresses and Strains

$$\bar{E}_t = E_t/E, \quad \bar{y} = y/(B/2), \quad \bar{z} = z/(D/2),$$

$$da = d\bar{y}d\bar{z}, \quad \bar{A} = \iint d\bar{y}d\bar{z}, \quad \bar{I}_y = \iint \bar{z}^2 d\bar{y}d\bar{z}, \quad (8)$$

$$\bar{I}_z = \iint \bar{y}^2 d\bar{y}d\bar{z}, \quad \bar{I}_\omega = \iint \bar{y}^2 \bar{z}^2 d\bar{y}d\bar{z}$$

であり、 $E_t$  は応力~ひずみ履歴曲線の接線係数、 $E$  は弾性係数、 $B$  は断面の幅、 $D$  は断面の高さである。 $\bar{A}$ ,  $\bar{I}_y$  等は、(7)式の数値積分に用いる断面分割によって数値的に計算したものをを用いる。こうすることによって、断面が完全に弾性域にある場合には  $\bar{S}$  は単位行列となる。

さて、収斂計算によって  $\bar{S}$  が定まれば、一般化ひずみ増分の塑性成分  $d\delta^p$

$$d\delta^p = \{d\bar{\epsilon}_o^p \ d\bar{\phi}_y^p \ d\bar{\phi}_z^p \ d\bar{\phi}_\omega^p\}^T \quad (9)$$

に対して

$$df = \bar{S}^p d\delta^p \quad (10)$$

を満足する塑性接線剛性  $\bar{S}^p$  は次のようにして得られる。まず、 $\bar{S}$  を(11)式のように表す。

$$\bar{S} = \begin{pmatrix} \bar{S}_{11} & \bar{S}_{12} & \bar{S}_{13} & \bar{S}_{14} \\ \bar{S}_{21} & \bar{S}_{22} & \bar{S}_{23} & \bar{S}_{24} \\ \bar{S}_{31} & \bar{S}_{32} & \bar{S}_{33} & \bar{S}_{34} \\ \bar{S}_{41} & \bar{S}_{42} & \bar{S}_{43} & \bar{S}_{44} \end{pmatrix} \quad (11)$$

いま、 $df_x$  と  $d\bar{\epsilon}_o$  の関係に注目すると

$$df_x = \bar{S}_{11} d\bar{\epsilon}_o \quad (12)$$

ところが、弾性成分  $d\bar{\epsilon}_o^e$  については前述のように、

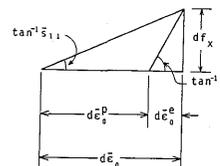
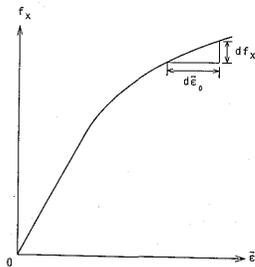


Fig.4  $f_x \sim \bar{\epsilon}_o$  relation

$$df_x = 1d\bar{\varepsilon}_0^p \quad (13)$$

となるから、Fig.4 を参照して、

$$df_x = \frac{\bar{s}_{11}}{1-\bar{s}_{11}} d\bar{\varepsilon}_0^p \quad (14)$$

従って、

$$d\bar{\varepsilon}_0 = \frac{1}{1-\bar{s}_{11}} d\bar{\varepsilon}_0^p \quad (15)$$

同様に、

$$\left. \begin{aligned} d\bar{\phi}_y &= \frac{1}{1-\bar{s}_{22}} d\bar{\phi}_y^p \\ d\bar{\phi}_z &= \frac{1}{1-\bar{s}_{33}} d\bar{\phi}_z^p \\ d\bar{\phi}_\omega &= \frac{1}{1-\bar{s}_{44}} d\bar{\phi}_\omega^p \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

(15), (16)式を(6)式に代入すると、(10)式を満足する $\bar{S}^p$ が得られる。

$$\bar{S}^p = \begin{bmatrix} \frac{\bar{s}_{11}}{1-\bar{s}_{11}} & \frac{\bar{s}_{12}}{1-\bar{s}_{22}} & \frac{\bar{s}_{13}}{1-\bar{s}_{33}} & \frac{\bar{s}_{14}}{1-\bar{s}_{44}} \\ \frac{\bar{s}_{21}}{1-\bar{s}_{11}} & \frac{\bar{s}_{22}}{1-\bar{s}_{22}} & \frac{\bar{s}_{23}}{1-\bar{s}_{33}} & \frac{\bar{s}_{24}}{1-\bar{s}_{44}} \\ \frac{\bar{s}_{31}}{1-\bar{s}_{11}} & \frac{\bar{s}_{32}}{1-\bar{s}_{22}} & \frac{\bar{s}_{33}}{1-\bar{s}_{33}} & \frac{\bar{s}_{34}}{1-\bar{s}_{44}} \\ \frac{\bar{s}_{41}}{1-\bar{s}_{11}} & \frac{\bar{s}_{42}}{1-\bar{s}_{22}} & \frac{\bar{s}_{43}}{1-\bar{s}_{33}} & \frac{\bar{s}_{44}}{1-\bar{s}_{44}} \end{bmatrix} \quad (17)$$

断面が完全に弾性状態にある場合には(17)式が計算できないため、 $\bar{S}^p$ の非対角要素を零として、対角要素に大きな数値を入れればよい。

$\bar{S}^p$ が求まれば、実際の接線剛性 $S^p$ は次元を回復させることによって次の式で得られる。 $\bar{S}^p$ の要素を $\bar{s}_{kl}$  ( $k, l = 1, 2, 3, 4$ ) とすると

$$S^p = \begin{bmatrix} \bar{s}_{11} \times EA & \bar{s}_{12} \times EA \frac{D}{2} & \bar{s}_{13} \times EA \frac{B}{2} & \bar{s}_{14} \times EA \frac{BD}{4} \\ \bar{s}_{21} \times EI_y \frac{D}{2} & \bar{s}_{22} \times EI_y & \bar{s}_{23} \times EI_y \frac{D}{B} & \bar{s}_{24} \times EI_y \frac{B}{2} \\ \bar{s}_{31} \times EI_z \frac{D}{B} & \bar{s}_{32} \times EI_z \frac{D}{B} & \bar{s}_{33} \times EI_z & \bar{s}_{34} \times EI_z \frac{D}{2} \\ \bar{s}_{41} \times EI_\omega \frac{4}{BD} & \bar{s}_{42} \times EI_\omega \frac{2}{B} & \bar{s}_{43} \times EI_\omega \frac{2}{D} & \bar{s}_{44} \times EI_\omega \end{bmatrix} \quad (18)$$

ここに、 $A, I_y, I_z, I_\omega$  はそれぞれ断面積、断面二次モーメント、そり定数であるが、数値積分によるのではなく、真の値を用いるのがよい。なお、本論文では、(7)式の $\bar{S}$ の対角要素のすべてが0.98よりも小さくなるまでは、断面を弾性状態とみなしている。

#### 4. 部材の弾塑性剛性行列

鋼素材の繰返し応力ひずみ履歴特性と、軸力・二軸

曲げ・そりモーメントの相互作用を考慮した塑性関節を両端部を持つ立体骨組要素の弾塑性剛性行列を以下に導く。

##### 4. 1 塑性関節部の力学的特性

塑性関節部の挙動について次のように仮定する。

(1) 塑性変形成分は、軸力・二軸まわりの曲げモーメントおよびそりモーメントに対応する成分のみである。

(2) サンプナンねじり剛性は、部材端降伏後も不変である。

(3) 断面の形は降伏後も不変であり、そり関数も弾性時と同じである。

(4) せん断応力は、関節の降伏に寄与しない。

(5) 一般に、部材の一般化ひずみの分布はFig.5(a)のようになると思われるが、これを同(b)のように、ある仮定された長さ $l_0$ の内部で各塑性ひずみ成分が材端部の値のまま一様であるとする。

(6)  $l_0$ 部分の両断面間の相対変位の塑性成分は、部材端 $i$  または $j$  側に集約されて生じるものとする。

さて、 $i, j$  端の塑性変位増分 $dq_i^p, dq_j^p$ を(4)式に準じて次のように定義する。

$$\left. \begin{aligned} dq_i^p &= \{ du_i^p, d\theta_{y_i}^p, d\theta_{z_i}^p, d\theta_{\omega_i}^p \}^T \\ dq_j^p &= \{ du_j^p, d\theta_{y_j}^p, d\theta_{z_j}^p, d\theta_{\omega_j}^p \}^T \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

仮定(1)から、上記以外の成分は常に零となる。また、 $dq_i^p, dq_j^p$ に対応する部材端力増分 $dQ_i^p, dQ_j^p$ を次のように定義する。

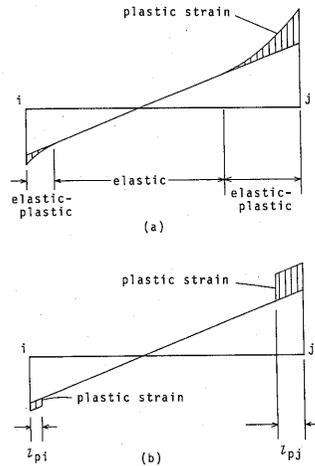


Fig.5 Assumption of Generalized Plastic Strain Distribution

$$\left. \begin{aligned} d\mathbf{Q}_i^p &= \{ dF_{xi}^p, dM_{yi}^p, dM_{zi}^p, d\tilde{M}_{\omega_i}^p \}^T \\ d\mathbf{Q}_j^p &= \{ dF_{xj}^p, dM_{yj}^p, dM_{zj}^p, d\tilde{M}_{\omega_j}^p \}^T \end{aligned} \right\} (20)$$

ここに、 $dF_{xi}^p$ ,  $dM_{yi}^p$ 等は実質的には $dF_{xi}$ ,  $dM_{yi}$ 等と同じであるが、後述の部材剛性を導く際に便利のように添字 $p$ を付けて区別している。ここで、3項に述べた方法を用いると、以下のようにして $d\mathbf{Q}_i^p \sim dq_i^p$ 関係、 $d\mathbf{Q}_j^p \sim dq_j^p$ 関係が求められる。

いま、(4)式の部材端力 $\mathbf{Q}$ が与えられたとすると、その成分である軸力、二軸回りの曲げモーメントおよびそりモーメントによって、

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{Q}_i' &= \{ F_{xi}, M_{yi}, M_{zi}, \tilde{M}_{\omega_i} \}^T \\ \mathbf{Q}_j' &= \{ F_{xj}, M_{yj}, M_{zj}, \tilde{M}_{\omega_j} \}^T \end{aligned} \right\} (21)$$

が定まる。次に、Fig.1(a)とFig.3を参照して $i, j$ 両端の一般化応力 $F_i, F_j$ が次式で得られる。

$$\left. \begin{aligned} F_i &= \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{Q}_i' \equiv R_i \mathbf{Q}_i' \\ F_j &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{Q}_j' \equiv R_j \mathbf{Q}_j' \end{aligned} \right\} (22)$$

この $F_i, F_j$ を用いることによって、3項で述べた方法で $i, j$ 端の接線剛性 $S_i^p, S_j^p$ が得られ、 $i, j$ 端の一般化ひずみ $\Delta_i, \Delta_j$ の塑性成分 $\Delta_i^p, \Delta_j^p$ を(23)式のように定義すると、(24)式の関係が得られる。

$$\left. \begin{aligned} \Delta_i^p &= \{ \varepsilon_{xi}^p, \phi_{yi}^p, \phi_{zi}^p, \tilde{\phi}_{\omega_i}^p \}^T \\ \Delta_j^p &= \{ \varepsilon_{xj}^p, \phi_{yj}^p, \phi_{zj}^p, \tilde{\phi}_{\omega_j}^p \}^T \end{aligned} \right\} (23)$$

$$\left. \begin{aligned} dF_i &= S_i^p d\Delta_i^p \\ dF_j &= S_j^p d\Delta_j^p \end{aligned} \right\} (24)$$

$F_i, F_j$ および $\Delta_i^p, \Delta_j^p$ は応力とひずみであるから、これらをFig.1(a)の部材座標系に座標変換する。(22)式中の $\mathbf{Q}_i', \mathbf{Q}_j'$ の増分がそれぞれ $d\mathbf{Q}_i^p, d\mathbf{Q}_j^p$ に等しいから、

$$\left. \begin{aligned} d\mathbf{Q}_i^p &= R_i^{-1} dF_i = R_i^{-1} S_i^p d\Delta_i^p \\ d\mathbf{Q}_j^p &= R_j^{-1} dF_j = R_j^{-1} S_j^p d\Delta_j^p \end{aligned} \right\} (25)$$

さらに、仮定(5)によって、 $l_p$ 部分の両断面間の相対塑性変形増分はそれぞれ $l_{pi} d\Delta_i^p, l_{pj} d\Delta_j^p$ で表され、仮定

(6)によってこれらは部材端に集約されて生じるから、

$$\left. \begin{aligned} l_{pi} d\Delta_i^p &= R_i d\mathbf{Q}_i^p \\ l_{pj} d\Delta_j^p &= R_j d\mathbf{Q}_j^p \end{aligned} \right\} (26)$$

となり、(25), (26)式より次式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} d\mathbf{Q}_i^p &= R_i^{-1} S_i^p R_i \frac{1}{l_{pi}} d\mathbf{Q}_i^p = \frac{1}{l_{pi}} S_i^p d\mathbf{Q}_i^p \\ d\mathbf{Q}_j^p &= R_j^{-1} S_j^p R_j \frac{1}{l_{pj}} d\mathbf{Q}_j^p = \frac{1}{l_{pj}} S_j^p d\mathbf{Q}_j^p \end{aligned} \right\} (27)$$

#### 4. 2 部材の弾塑性接線剛性行列

立体骨組のはりや柱などを適当な長さに分割して単位部材とし、その両端を $i, j$ とする。まず、部材の剛性行列を導くのに便利のように、部材端変位と部材端力の増分を次のように再定義する。なお、本項では煩雑さを避けるため、増分を表す $d$ を省略する。

$$\left. \begin{aligned} & i, j \text{ 端の全変位} \\ & \mathbf{q}_i = \{ u_i, v_i, w_i, \theta_{xi}, \theta_{yi}, \theta_{zi}, \theta_{\omega_i} \}^T \\ & \mathbf{q}_j = \{ u_j, v_j, w_j, \theta_{xj}, \theta_{yj}, \theta_{zj}, \theta_{\omega_j} \}^T \\ & i, j \text{ 端の弾性変位} \\ & \mathbf{q}_i^e = \{ u_i^e, v_i^e, w_i^e, \theta_{xi}^e, \theta_{yi}^e, \theta_{zi}^e, \theta_{\omega_i}^e \}^T \\ & \mathbf{q}_j^e = \{ u_j^e, v_j^e, w_j^e, \theta_{xj}^e, \theta_{yj}^e, \theta_{zj}^e, \theta_{\omega_j}^e \}^T \\ & i, j \text{ 端の塑性変位} \\ & \mathbf{q}_i^p = \{ u_i^p, \theta_{xi}^p, \theta_{zi}^p, \theta_{\omega_i}^p \}^T \\ & \mathbf{q}_j^p = \{ u_j^p, \theta_{xj}^p, \theta_{zj}^p, \theta_{\omega_j}^p \}^T \\ & i, j \text{ 端の材端力} \\ & \mathbf{Q}_i = \{ F_{xi}, F_{yj}, F_{zj}, M_{xi}, M_{yj}, M_{zj}, \tilde{M}_{\omega_i} \}^T \\ & \mathbf{Q}_j = \{ F_{xj}, F_{yj}, F_{zj}, M_{xj}, M_{yj}, M_{zj}, \tilde{M}_{\omega_j} \}^T \\ & i, j \text{ 端の弾性変位に対応する材端力} \\ & \mathbf{Q}_i^e = \{ F_{xi}^e, F_{yj}^e, F_{zj}^e, M_{xi}^e, M_{yj}^e, M_{zj}^e, \tilde{M}_{\omega_i}^e \}^T \\ & \mathbf{Q}_j^e = \{ F_{xj}^e, F_{yj}^e, F_{zj}^e, M_{xj}^e, M_{yj}^e, M_{zj}^e, \tilde{M}_{\omega_j}^e \}^T \\ & i, j \text{ 端の塑性変位に対応する材端力} \\ & \mathbf{Q}_i^p = \{ F_{xi}^p, M_{xi}^p, M_{zi}^p, \tilde{M}_{\omega_i}^p \}^T \\ & \mathbf{Q}_j^p = \{ F_{xj}^p, M_{xj}^p, M_{zj}^p, \tilde{M}_{\omega_j}^p \}^T \end{aligned} \right\} (28)$$

さらに、 $\mathbf{q}_i, \mathbf{q}_j$ の成分と $\mathbf{q}_i^p, \mathbf{q}_j^p$ を用いて $\bar{\mathbf{q}}_i, \bar{\mathbf{q}}_j$ を、また、 $\mathbf{Q}_i^e, \mathbf{Q}_j^e$ の成分と $\mathbf{Q}_i^p, \mathbf{Q}_j^p$ を用いて $\bar{\mathbf{Q}}_i, \bar{\mathbf{Q}}_j$ をそれぞれ次のように定義する。

$$\bar{q}_i = \begin{Bmatrix} u_i - u_i^p \\ \theta_{y_i} - \theta_{y_i}^p \\ \theta_{z_i} - \theta_{z_i}^p \\ \theta_{x_i}^e - \theta_{x_i}^p \end{Bmatrix}; \quad \bar{q}_j = \begin{Bmatrix} u_j - u_j^p \\ \theta_{y_j} - \theta_{y_j}^p \\ \theta_{z_j} - \theta_{z_j}^p \\ \theta_{x_j}^e - \theta_{x_j}^p \end{Bmatrix} \quad (30)$$

$$\bar{Q}_i = \begin{Bmatrix} F_{xi}^e - F_{xi}^p \\ M_{yi}^e - M_{yi}^p \\ M_{zi}^e - M_{zi}^p \\ \tilde{M}_{\omega_i}^e - \tilde{M}_{\omega_i}^p \end{Bmatrix}; \quad \bar{Q}_j = \begin{Bmatrix} F_{xj}^e - F_{xj}^p \\ M_{yj}^e - M_{yj}^p \\ M_{zj}^e - M_{zj}^p \\ \tilde{M}_{\omega_j}^e - \tilde{M}_{\omega_j}^p \end{Bmatrix} \quad (31)$$

(30), (31)式の  $\bar{q}$ ,  $\bar{Q}$  の意味はFig.6 により明らかである。図では便宜上、塑性関節に長さを与えており、平面

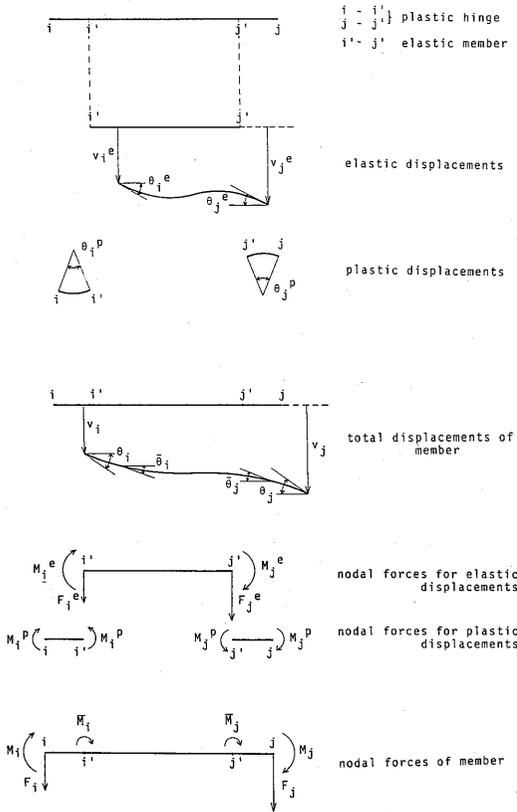


Fig.6 Displacements and Forces of a Member

部材について示した。  $\bar{q}$ ,  $\bar{Q}$  は弾性部材と塑性関節の接合部における変位および節点力という物理的意味を持っている。

さて、塑性変形は材端部に集約されて生じるという仮定によって、塑性関節の長さは零となることを考慮すると、直ちに次の関係式が得られる。

$$\begin{Bmatrix} q_i^e \\ q_j^e \\ q_i^p \\ q_j^p \end{Bmatrix} = T \begin{Bmatrix} q_i \\ q_j \\ \bar{q}_i \\ \bar{q}_j \end{Bmatrix}; \quad \begin{Bmatrix} Q_i \\ Q_j \\ \bar{Q}_i \\ \bar{Q}_j \end{Bmatrix} = T \begin{Bmatrix} Q_i^e \\ Q_j^e \\ Q_i^p \\ Q_j^p \end{Bmatrix} \quad (32)$$

ただし、 $T$  の成分を  $t_{kl}$  で表すと

$$\left. \begin{aligned} t_{1,15} &= t_{2,2} = t_{3,3} = t_{4,4} = t_{5,16} = t_{6,17} = t_{7,18} = t_{8,19} \\ &= t_{9,9} = t_{10,10} = t_{11,11} = t_{12,20} = t_{13,21} = t_{14,22} = 1 \\ t_{15,15} &= t_{16,16} = t_{17,17} = t_{18,18} = t_{19,19} = t_{20,20} = t_{21,21} \\ &= t_{22,22} = -1 \\ t_{i,i} &= t_{i,i} \text{ その他の成分は } 0 \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

ところで、弾性成分に対しては(3)式が成り立つから、 $i, j$  成分に分けて書くと、

$$\begin{Bmatrix} Q_i^e \\ Q_j^e \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} K_{ii}^e & K_{ij}^e \\ K_{ji}^e & K_{jj}^e \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} q_i^e \\ q_j^e \end{Bmatrix} \quad (34)$$

また、塑性成分に対しては、(27)式より、

$$\begin{Bmatrix} Q_i^p \\ Q_j^p \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{l_{pi}} S_p & 0 \\ 0 & \frac{1}{l_{pj}} S_p \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} q_i^p \\ q_j^p \end{Bmatrix} \quad (35)$$

であるから、(32), (34), (35)式より、

$$\begin{Bmatrix} Q_i \\ Q_j \\ \bar{Q}_i \\ \bar{Q}_j \end{Bmatrix} = T \begin{Bmatrix} K_{ii}^e & K_{ij}^e & 0 & 0 \\ K_{ji}^e & K_{jj}^e & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{l_{pi}} S_p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{l_{pj}} S_p \end{Bmatrix} T \cdot$$

$$\begin{Bmatrix} q_i \\ q_j \\ \bar{q}_i \\ \bar{q}_j \end{Bmatrix} \equiv \begin{Bmatrix} K_{ii}^e & K_{ij}^e \\ K_{ji}^e & K_{jj}^e \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} q_i \\ q_j \\ \bar{q}_i \\ \bar{q}_j \end{Bmatrix} \quad (37)$$

が得られる。ここで、 $\bar{Q}_i = \bar{Q}_j = 0$  という条件を用いると、部材の弾塑性接線剛性行列が次のように求められる。

$$\begin{Bmatrix} Q_i \\ Q_j \end{Bmatrix} = [K_{ii}^e - K_{ij}^e [K_{jj}^e]^{-1} K_{ji}^e] \begin{Bmatrix} q_i \\ q_j \end{Bmatrix} \quad (38)$$

なお、薄肉円管断面部材については、一般化応力増分と一般化塑性ひずみ増分の関係を与える(24)式のかわりに、文献(22)で述べた、降伏曲面と塑性流れ則によって得られる関係を用いることも可能である。ただし、このときは定式化の方法としては従来の手法(例えば、文献(25)の第4編)をそのまま適用する方がよい。また、解法としてはより簡略化されるものの、(24)式を用いる場合に較べて精度の劣化は免れないこと、および繊維の応力ひずみ関係の追跡が不可能であることは言うまでもない。

### 4. 3 塑性関節部の除荷の判定

除荷は、関節部の断面力のなす塑性仕事増分 $dW_i^p$ ,  $dW_j^p$ の正負で判別する。 $dW_i^p$ ,  $dW_j^p$ は次式で計算できる。

$$\left. \begin{aligned} dW_i^p &= \mathbf{Q}_i^T dq_i^p \\ dW_j^p &= \mathbf{Q}_j^T dq_j^p \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

従って、次の条件を満たすとき*i* または *j* 端は除荷となる。

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{Q}_i^T dq_i^p &< 0 \\ \mathbf{Q}_j^T dq_j^p &< 0 \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

実際には、数値計算を行っているため一度弾塑性状態を経験した関節の塑性仕事増分は、除荷後も完全には零とならない。このため、除荷状態にある関節を再び除荷と判断してしまう危険があるので、除荷の判別を次式で行っている。

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{Q}_i^T dq_i^p &< -e \\ \mathbf{Q}_j^T dq_j^p &< -e \end{aligned} \right\} \quad (41)$$

ここに、*e* は正の微小量であり、目安としてはその関節が過去に経験した塑性仕事増分の最大値の10%程度でよい。

### 5. 部材剛性の全体座標系への座標変換

本解法では、大変形問題への適用を考えて、部材の変形成分と剛体変位成分とを分離し、変形後の部材の座標変換行列を更新しているが、方法としては前田ら<sup>23)</sup>の提示したものを踏襲した。また、材軸方向の回転の微分項 $\theta'_{xi}$ ,  $\theta'_{xj}$ の取扱いについては藤本ら<sup>12)</sup>に準じた。

### 6. 解析手順

解析には変位制御形荷重増分法<sup>5)</sup>を用いた。具体的な解析手順を示せば次の通りである。

(i) 全体座標系において計算された変位増分を部材座標系における変位増分に変換し、これから(38)式を用いて部材端力増分を計算して前ステップまでの部材端力に加えこむ。また、(41)式によって除荷の判定を行う。

全ての関節で除荷が生じていなければ(iii)にとぶ。一関節でも除荷があれば次の(ii)に進む。

(ii) 新しい部材端力によって収斂計算を行い、除荷関節の $S_i^p$ ( $S_j^p$ )を計算する。その後、関節の繊維の全ての状態を前ステップの状態にもどす。この除荷後の $S_i^p$ ( $S_j^p$ )を用いて部材の剛性を作製し、再度骨組の挙

動を計算して(i)にもどる。

(iii) 新しい部材端力を全体座標系に変換する。全体座標系における変位増分を前ステップまでの変位に加えこみ、これを用いて新しい部材座標系およびその座標系における真の変位成分 $q_i$ ,  $q_j$ を求める<sup>23), 24)</sup>。その後、(37), (32)式を利用して計算される $dq_i^p$ ,  $dq_j^p$ を積算した $q_i^p$ ,  $q_j^p$ を差し引いて、弾性成分 $q_i^e$ ,  $q_j^e$ を求めておく。部材端力を再度新しい部材座標系に変換し、これを用いて収斂計算を行い、 $S_i^p$ ,  $S_j^p$ を求める。剛性行列の計算には $l_{pi}$ ,  $l_{pj}$ の値が必要であるが、これについては後に検討することとし、とりあえず1要素の長さを充分小さくすることを前提に、要素の長さを*l*として $l_{pi}=l_{pj}=l/2$ と置く。これらの $S_i^p$ ,  $S_j^p$ ,  $l_{pi}$ ,  $l_{pj}$ および $q_i^e$ ,  $q_j^e$ を用いて新しい部材剛性行列を作製し、骨組全体の増分計算を行って(i)にもどる。

概略以上のものであるが、 $S_i^p$ ,  $S_j^p$ の収斂計算時に関節の繊維にひずみのもどりが生じた場合の取扱いについて触れておく。繊維の除荷は、前ステップにおいて収斂した状態を基準として考える。従って、収斂計算中に単にひずみのもどりが生じただけでは弾性回復とは考えず、前ステップでのひずみ値よりも更にもどったとき、はじめて弾性回復が起こるとする。

## 7. 解 析 例

### 7. 1 曲線 I 形はりの耐荷力解析

曲線 I 形はりの耐荷力解析を行い、福本ら<sup>26)</sup>の実験値および解析値と比較する。供試体は、曲率半径一定で両端単純支持の I 形はりである。Fig.7 に座標系を示す。X 軸と Y 軸を断面の二つの主軸に一致させ、Z 軸をはりの軸の接線方向にとる。供試体の各部寸法は Table.1 に示す通りである。解析に用いた諸量は、断面積  $A=30.04\text{cm}^2$ , 強軸および弱軸回りの断面二次モーメント  $I_y=2984.0\text{cm}^4$ ,  $I_z=133.7\text{cm}^4$ , そり定数  $I_w=20830.0\text{cm}^6$ , サンプナンのねじれ定数  $J=5.21\text{cm}^4$ ,  $I_r=\int(y^2+z^2)^2 dy dz=437400.0\text{cm}^6$ , 素材の降伏応力  $\sigma_y=2.4\text{t/cm}^2$ , ヤング率  $E=2100.0\text{t/cm}^2$ , 横弾性係数  $=810.0\text{t/cm}^2$ , 素材の応力ひずみ関係は Fig.8 のものを用いた。Fig.9 は塑性関節部の数値積分を行うための断面分割図である。応力ひずみ関係は繊維の重心について追跡した。支持端は、X, Y 方向変位および材軸方向のねじりを拘束し、他は自由として計算した。また、負荷は Fig.10 に示すように、圧縮フランジの中央上部に集中荷重を、図心から15cmの距離を保って常に垂直に与えている。解析に際しては、はりの半分を14要素に等分割した。

Fig.11 にBR-1の荷重とスパン中央での変位  $u, v, \phi$  との関係を示す。福本らの実験値をそれぞれ□, △, ○印で、同じく福本らによる伝達マトリクス法を用いた解析値をそれぞれ細い破線, 実線, 一点鎖線で、本解法による解を太線で示している。Fig.12 はBRシリーズの荷重対スパン中央での回転角  $\phi$  との関係である。実験値を○印, 解析値を一点鎖線で表し、福本らの解を細線で、本解法を太線で示している。本

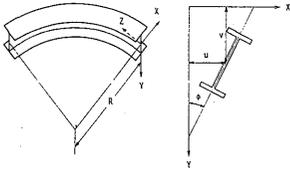


Fig.7 Curved I-Beam<sup>26)</sup>

Table 1 Dimensions and Curvatures of Curved I-Beam<sup>26)</sup>

Beam.No	d	b	w	t	(L/BR)N	(L/BR)M	L	Remarks
BR-1	250.1	100.6	5.5	8.4	1/100	1/97	2800	
BR-2	251.8	100.6	5.7	8.3	1/200	1/206	2800	
BR-3	250.4	100.9	5.6	8.3	1/1000	1/1379	2800	
Nominal	250.0	100.0	6.0	8.0				

L=Length of Span along the Curved Web Center Line  
N,M=Nominal Value and Measured Value

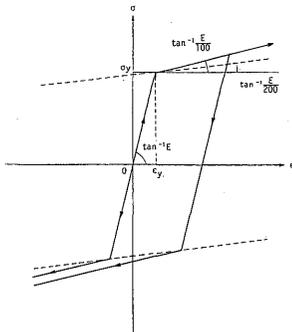


Fig.8 Stress-Strain Relationship

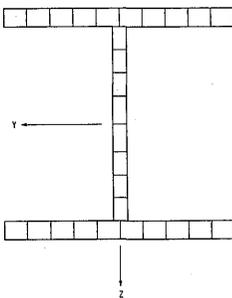


Fig.9 Partitioning of Cross Section for Numerical Calculations

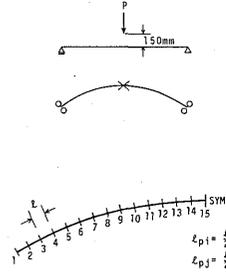


Fig.10 Loading Condition and Finite Elements

解法は直線材近似であること、大変形の影響を比較的厳密に考慮していること、サンプナンのねじれ剛性に及ぼす断面降伏の影響を考慮していないこと、などの理由から福本らの解析値とは必ずしも一致していないが、いずれも実験値の傾向をよく表現していると言える。Fig.13 は、BR-1の塑性域の拡がりの様子およびスパン中央部断面の応力分布を示す。上フランジが全塑性状態となって崩壊に至っている。

## 7. 2 軸力と任意方向水平力を受けるH形断面柱

最高荷重点以降の繰返し挙動の解析例として、軸力と任意方向水平力を受けるH-100×100×6×8の片持ばり形H形鋼柱の挙動を解析し、松井ら<sup>7)</sup>の実験結果と比較する。解析では以下の諸元を用いた。A = 21.9cm<sup>2</sup>, I<sub>y</sub> = 383.0cm<sup>4</sup>, I<sub>z</sub> = 134.0cm<sup>4</sup>, I<sub>ω</sub> = 2821.0cm<sup>6</sup>, J = 4.02cm<sup>4</sup>, I<sub>r</sub> = 14807.0cm<sup>6</sup>, σ<sub>y</sub> = 2.87t/cm<sup>2</sup>, E = 2100t/cm<sup>2</sup>, G = 810.0t/cm<sup>2</sup>, 素材の応力ひずみ関係はFig.8のもの、断面分割はFig.9の通りとした。要素分割は柱を10等分割し、そり変形は上下端とも拘束した。Fig.14において、座標系ならびに以下の表示に

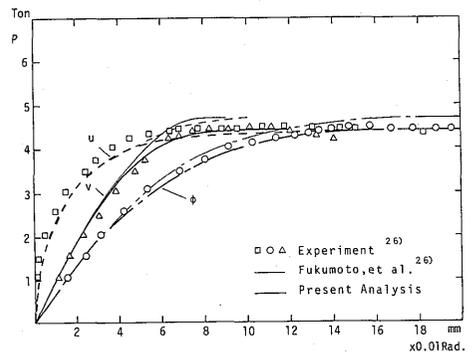


Fig.11 Load versus Deflection Relationships (BR-1)

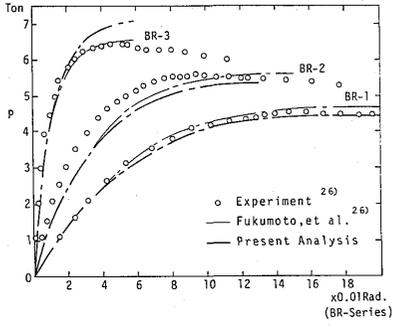


Fig.12 Load versus Torional Angle Relationships

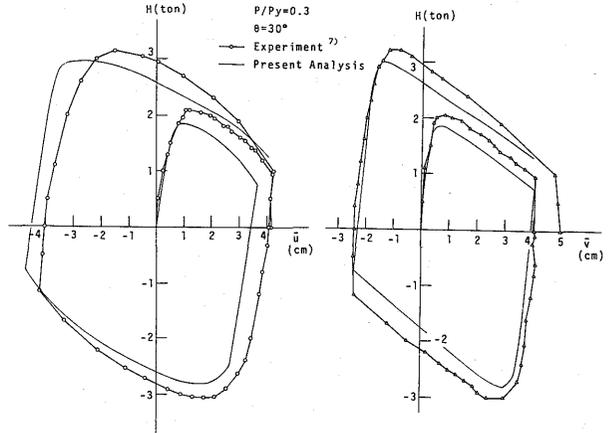


Fig.15 Lateral Force versus Displacement Relationship ( $P/P_y=0.3, \theta=30^\circ$ )

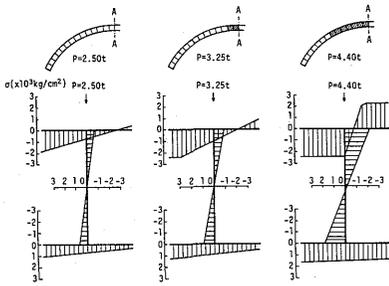


Fig.13 Yield Elements and Stress Distribution at the Center Section

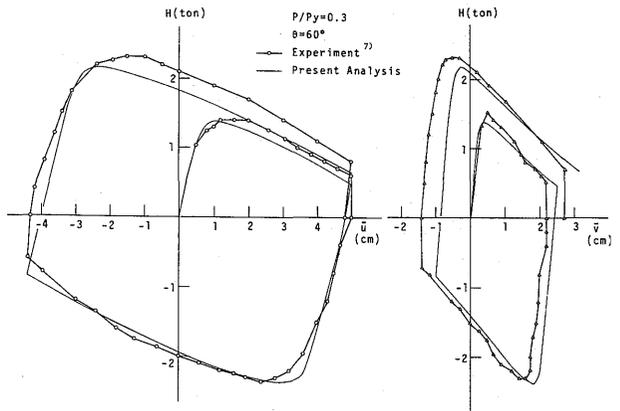


Fig.16 Do. ( $P/P_y=0.3, \theta=60^\circ$ )

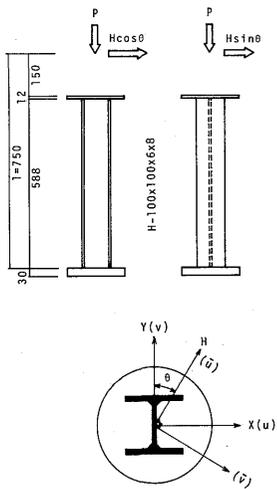


Fig.14 H-column and Notation<sup>7)</sup>

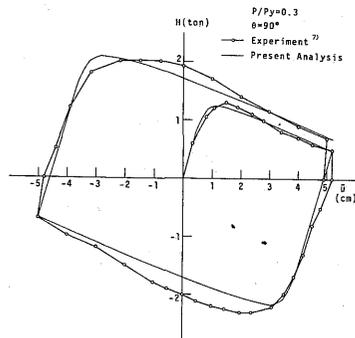


Fig.17 Do. ( $P/P_y=0.3, \theta=90^\circ$ )

用いる諸量を定義する。

Fig.15 ~Fig.17 に荷重変形曲線を示す。  $P/P_y$  は降伏軸力  $P_y$  に対する軸力  $P$  の比,  $\theta$ ,  $H$ ,  $\bar{u}$ ,  $\bar{v}$  等についてはFig.12 を参照されたい。 Fig.15 の  $\theta = 30^\circ$  は  $\bar{v}$  で制御し, Fig.16 の  $\theta = 60^\circ$  は  $\bar{u}$  で制御してそれぞれ実験値の除荷点に一致させた。本解法の結果は, 繰返しによる硬化や曲線の形状など実験値の傾向をよく表現し得ている。

## 8. 結 語

鋼構造立体骨組の簡略な非線形解析法の提案を目的とする論文の第一報として本稿では基礎理論を提示した。本解法は, 基本的には塑性関節法であって従来適当な降伏関数と塑性流れ則で得ていた関節部の塑性変形成分を, 断面の接線係数行列を利用して計算しようとするものであり, 部材の剛性行列の中に仮想の弾塑性域の長さ  $l_p$  を含んでいる。この  $l_p$  の値は解析結果の精度に大きな影響を及ぼすが, 理論的には一要素の長さ  $l$  を充分小さくして要素両端の  $l_p$  の値をそれぞれ  $l/2$  とすれば, 解析結果は厳密な解に極めて近いものとなることが期待できる。本稿では, 曲線 I 形はりの耐荷力解析<sup>26)</sup> と軸力および任意方向水平力を受ける H 形断面柱<sup>7)</sup> に対応する解析を充分な要素分割数を以って行い, それぞれ既往の研究結果と比較して基礎理論の妥当性を検証した。

## 参考文献

- 1) Nigam, N.C., Howsner, G.W. : Elastic and Inelastic Response of Framed Structures during Earthquakes, Proc. 4th WCEE, 1969
- 2) 小堀鐸二, 南井良一郎, 藤原悌三: 降伏曲面を考慮した構造物の振れ応答, 京都大学防災研究所年報第13号A, 昭和45年3月
- 3) 藤本盛久, 岡田久志: 鋼構造骨組の三次元弾塑性挙動に関する研究, その1 三次元鋼構造骨組の模型実験, 日本建築学会論文報告集, 第244号, 昭和51年6月, その2 三次元弾塑性解析法(I), 同, 第245号, 昭和51年7月, その3 三次元弾塑性解析法(II), 同, 第246号, 昭和51年8月
- 4) 藤本盛久, 緑川光正: 鋼構造立体骨組の動的弾塑性応答に関する研究, その1—H形断面柱および箱形断面柱から成る1層1スパン剛節立体骨組, 日本建築学会論文報告集, 第282号, 昭和54年8月
- 5) 日本鋼構造協会, 成岡昌夫, 中村恒善編: 骨組構造解析法要覧, 培風館, 昭和51年4月

- 6) 藤本盛久, 岡田久志, 原田昭穂: 定軸力と繰返し二軸曲げモーメントを受けるH形断面部材の弾塑性解析法に関する研究, 日本建築学会大会学術講演梗概集, 昭和53年9月
- 7) 松井千秋, 森野捷輔, 津田恵吾: 軸力と任意方向水平力を受けるH形鋼柱材の弾塑性性状に関する研究(その3), 日本建築学会大会学術講演梗概集, 昭和54年9月
- 8) 田中 尚, 高梨晃一, 谷口英武, 岩田延功: 定軸力下で2方向水平力を受けるH形鋼柱の弾塑性挙動(その1, 繰返し載荷実験および数値解析法), 日本建築学会大会学術講演梗概集, 昭和55年9月
- 9) Chen, W.F., Atsuta, T. : Theory of Beam-Columns, Vol.2 Space Behavior and Design, McGraw-Hill, 1977
- 10) 中村恒善, 上谷宏二: 完全両振り繰返し曲げを受ける鋼片持梁一柱の対称限界解析法(その1: 基礎理論), 中村恒善, 上谷宏二, 以頭秀司: 同(その2: 一次元有限要素法による数値解析), 日本建築学会大会講演梗概集, 昭和56年9月
- 11) 藤田 謙, 大坪英臣, 湯原哲夫: 構造物の塑性設計(その10), 日本造船学会論文集, 第126号, 昭和44年12月, 同(その11), 同, 第129号, 昭和46年6月
- 12) 藤本盛久, 和田 章, 岩田 衛, 中谷文俊: 鋼構造骨組の三次元非線形解析, 日本建築学会論文報告集, 第227号, 昭和50年1月
- 13) 近藤一夫: 骨組構造解析における一離散化手法(その1) 平面骨組の弾塑性崩壊解析, 日本建築学会論文報告集, 第304号, 昭和56年6月
- 14) 上田幸雄, 松石正克, 山川武人, 赤松毅人: マトリックス法による骨組構造物の弾塑性解析, 日本造船学会論文集, 第124号, 昭和43年12月
- 15) 花井正実, 賀来正義, 松藤一秋: 繰返し荷重を受ける鋼構造骨組の弾塑性解析, 日本建築学会論文報告集, 第214号, 昭和48年12月
- 16) 児島弘行, 平尾 潔, 矢野照雄: 立体骨組の一弾塑性解析, 土木学会論文報告集, 第240号, 昭和50年8月
- 17) Prager, W. : A New Method of Analyzing Stresses and Strains in Work-Hardening Plastic Solids, Jour. Appl. Mech., Trans. ASME, Dec., 1956
- 18) Ziegler, H. : A Modification of Prager's Hardening Rule, Quart. Appl. Math., Vol. 17,

No.7, 1959

- 19) Mroz, Z. : An Attempt to Describe the Behavior of Metals under Cyclic Loads Using a More General Workhardening Model, Acta Mechanica, Vol.7, 1969
- 20) 田中正隆, 中谷高久, 浜田 実: 降伏曲面の膨張と移動を考慮した応力-ひずみ関係式と降伏条件式についての一考察, 日本機械学会論文集, 第39巻, 第325号, 昭和48年9月
- 21) 山田 稔, 辻 文三: 鋼材の応力-歪関係に関する研究 (I: 等方+移動硬化モデル), 日本建築学会論文報告集, 第270号, 昭和53年8月
- 22) 修行 稔: 定軸力と繰返し二軸曲げ荷重を受ける鋼構造部材断面の弾塑性挙動について (その1), 日本建築学会論文報告集, 第323号, 昭和58年1月, 同 (その2), 同, 第329号, 昭和58年7月
- 23) 前田幸雄, 林 正: 立体骨組構造物の有限変位解析, 土木学会論文報告集, 第253号, 1976年9月
- 24) 吉田 裕, 増田陳紀, 森本 剛, 広次規行: 立体骨組構造の増分つり合い方程式とその解法, 土木学会論文報告集, 第300号, 1980年8月
- 25) 成岡昌夫, 服部 正, 加藤 進, 後藤茂夫, 上田幸雄: コンピュータによる構造工学講座 II-1-B 骨組構造解析, 培風館, 昭和46年
- 26) Fukumoto, Y., Nishida, S. : Ultimate Load Behavior of Curved I-Beams, ASCE, Vol. 107, No. EM 2, April, 1981

