曲線Ⅰ形ばりの複合非線形問題に関する一解析法

若 菜 啓 孝*・﨑 山 毅*

An Analytical Method for Geometrically and Materially Nonlinear Problems of Curved I-girders

by

Hirotaka WAKANA* and Takeshi SAKIYAMA*

In the case of horizontally curved bridge having short span and large radius of curvature, the torsional moments on main girder are small. Therefore, the thin-walled curved beams with open cross sections have been used for structual members of horizontally curved bridges for their rationality and lower cost on the faburication. The problems of the mechanical properties and behaviors of thin-walled curved beams have been studied in consideration of geometrical and material nonlinearities by many researchers.

Previously, we discussed the three dimensional stability problems of steel arches with closed cross sections.

In the present report the authors intend to expand this analytical method for studying the mechanical properties of the thin-walled curved beams with open cross sections. In order to confirm the convergencies and accuracies of the approximate solutions, the results of numerical analysis are compared with the existing experimental and theoretical ones.

1．序　言

本来は，ねじりに対して弱いとされている薄肉開断面材でも，近年の構造物の軽量化，複雑化に伴い，構造要素として使用される機会が多くなっている．そのような観点から，はりの弾塑性横倒れ座屈に関する研究は，多くの研究者によって実験的，理論的になされ，残留応力や初期変位などを考慮した，より現実的な解析が提案されてきた．[1)-3)]

また，薄肉曲線ばりを構造要素とするような曲線桁橋の場合，曲率に起因するねじり及び曲げモーメントが生じるため，ねじり剛性の大きい箱型断面のような閉断面を有するものが，耐荷力は大きい．しかしながら，曲率半径が大きい場合やスパン長が短い場合などにおいては開断面を用いた方が，合理的かつ経済的であることが知られている．[4)5)]この薄肉曲線ばりの力学的挙動に関する研究も数多くなされ，現在では，幾何学的ばかりでなく材料的非線形性をも考慮した複合非線形解析法へと進んでいる．

薄木ら[6)-8)]は，非線形のひずみ関係式と応力のつり合い式を基礎とし，曲線要素内で，座標の3次式で近似された剛性方程式を導き出し，薄肉線材の微小変位座屈解析と弾性および非弾性有限変位解析を行っている．福本，西田ら[9)10)]は，大きなねじり変形での曲線部材の終局荷重時の挙動の研究を目的とし，両端単純支持曲がりはりに集中荷重を載荷した耐荷力実験を行っている．さらには，曲げおよびねじりモーメント作用の下での曲線Ⅰ形ばりの基礎方程式を導き，非弾性域まで考慮し，伝達マトリックス法を用いて解析を行っている．また同様に，伝達マトリックス法を適用し，曲線Ⅰ形ばりの耐荷力曲線の性状について，検討を行っているものに，前川，吉田ら[11)-13)]の研究が挙げられる．

著者ら[14)]は，これまでに，材料の応力－ひずみ関係，

昭和60年9月30日受理
*構造工学科（Department of Structual Engineering）

部材軸線形状，支持条件などの任意性を考慮し，閉断面を有するアーチの立体的な複合非線形問題について，解析を行っている．

本研究は，この複合非線形解析法を開断面を有する曲線ばりに拡張し，薄肉曲線Ｉ形ばりの複合非線形問題に関する一解析法を提案するものである．

本解析における基礎微分方程式は，曲線材の変形状態における力の平衡方程式および仮想仕事の原理等から得られるねじれ率－ねじれモーメントの関係式に増分理論を適用することにより導き出した．

２．増分形基礎微分方程式の誘導

曲線部材の変形状態における力の釣り合い条件式および仮想仕事の原理等から得られるねじりの微分方程式に基づいて，有限変形解析における曲線部材の基礎微分方程式が誘導される．

座標系および断面力の定義を，Fig. 1 に示す．

曲線部材微小要素における変形前後の関係式および増分理論の応用により，断面力の増分量ΔQ_x～ΔM_ωを規定する増分形微分方程式は，次の７式で表わせる．

$$\frac{d\Delta Q_x}{ds}-\psi_{z0}\Delta Q_y+K_{y0}\Delta Q_z-Q_y\Delta\psi_z+Q_z\Delta\phi_y+\bar{P}_y\Delta\theta_z-\bar{P}_z\Delta\theta_y+\Delta p_x-\Delta Q_y\Delta\psi_z+\Delta Q_z\Delta\phi_y=0$$

$$\frac{d\Delta Q_y}{ds}-K_{x0}\Delta Q_z+\psi_{z0}\Delta Q_x-Q_x\Delta\psi_z-Q_z\Delta\phi_x-\bar{P}_x\Delta\theta_z+\Delta p_y+\bar{P}_z\Delta\theta_x-\Delta Q_x\Delta\psi_z-\Delta Q_z\Delta\phi_x=0$$

$$\frac{d\Delta Q_z}{ds}-K_{y0}\Delta Q_x+K_{x0}\Delta Q_y-Q_x\Delta\phi_y+Q_y\Delta\theta_x+\bar{P}_x\Delta\theta_y-\bar{P}_y\Delta\theta_x+\Delta p_z-\Delta Q_x\Delta\phi_y+\Delta Q_y\Delta\phi_x=0$$

$$\frac{d\Delta M_x}{ds}-\psi_{z0}\Delta M_y+K_{y0}\Delta M_z-M_y\Delta\psi_z+M_z\Delta\phi_y-\Delta Q_y-\Delta M_y\Delta\psi_z+\Delta\phi_y\Delta M_z=0$$

$$\frac{d\Delta M_y}{ds}+\psi_{z0}\Delta M_x-K_{x0}\Delta M_z+M_x\Delta\psi_z-M_z\Delta\phi_x+\Delta Q_x-\Delta\phi_x\Delta M_z+\Delta M_x\Delta\psi_z=0$$

$$\frac{d\Delta M_z}{ds}-K_{y0}\Delta M_x+K_{x0}\Delta M_y-M_x\Delta\phi_y-M_y\Delta\phi_x-\phi_y\Delta M_x+\Delta\phi_x\Delta M_y=0$$

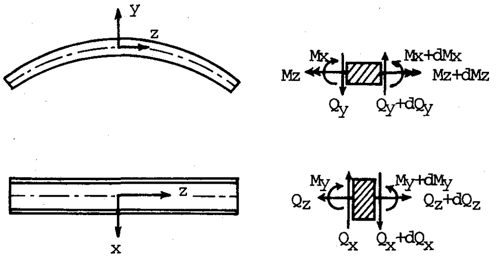

Fig. 1　Coodinate Systems.

$$\frac{d\Delta M_\omega}{ds}-\Delta M_z+GJ\Delta\psi_z=0$$

ただし，

$$\bar{P}_x=(p_x+\Delta p_x),\ \bar{P}_y=(p_y+\Delta p_y),\ \bar{P}_z=(p_z+\Delta p_z)\qquad(1.\mathrm{a}\sim1.\mathrm{g})$$

上式において，K_{x0}，K_{y0}は，x，y軸に関する曲率，ψ_{z0}は，ねじれ率であり，$\Delta\phi_x$等は，それらの増分量を表わす。また，GJは，St. Venant のねじり剛性，EI_ωは，曲げねじれ剛性である．

また，軸線の伸び率$\Delta\varepsilon_0$，曲率の変化量，曲げねじれ率および変位に関しては，次の関係式が成り立つ．

$$\Delta\varepsilon_0=\frac{d\Delta u_z}{ds}-K_{y0}\Delta u_x+K_{x0}\Delta u_y$$

$$\Delta\phi_x=K_{y0}\Delta\theta_z-\frac{d\Delta\theta_z}{ds}-\psi_{z0}\Delta\theta_y$$

$$\Delta\phi_y=-K_{x0}\Delta\theta_z+\frac{d\Delta\theta_y}{ds}-\psi_{z0}\Delta\theta_z$$

$$\Delta\theta_y=\frac{d\Delta u_x}{ds}-\psi_{z0}\Delta u_y+K_{y0}\Delta u_z$$

$$\Delta\theta_x=-\left(\frac{d\Delta u_y}{ds}-K_{x0}\Delta u_z+\psi_{z0}\Delta u_x\right)$$

$$\Delta\psi_z=\frac{d\Delta\theta_z}{ds}+K_{x0}\Delta\theta_y+K_{y0}\Delta\theta_x$$

$$\frac{d\Delta\psi_z}{ds}+\frac{1}{EI_\omega}\Delta M_\omega=0\qquad(2.\mathrm{a}\sim2.\mathrm{g})$$

３．離散的一般解

本研究においては，基礎微分方程式の積分方程式への変換と積分方程式の近似解法の応用とにより，曲線部材軸等分割点における基礎微分方程式の離散的な一般解を求めることとする．

まず，曲線部材の支間，軸長，断面の基準断面積および基準断面二次モーメントを各々，L，ℓ，A_0，I_0また，軸線座標をsとして，次のような無次元化を行う．

$$(X_1,X_2,X_3)=-(\Delta Q_x,\Delta Q_y,\Delta Q_z)L^2/EI_0$$

$$(X_4,X_5,X_6)=-(\Delta M_x,\Delta M_y,\Delta M_z)L/EI_0$$

$$X_7=-\Delta M_\omega L^2/EI_\omega,\ X_8=\Delta\psi_z\cdot L$$

$$(X_9,X_{10},X_{11})=(\Delta\theta_x,\Delta\theta_y,\Delta\theta_z)$$

$$(X_{12},X_{13},X_{14})=(\Delta u_x,\Delta u_y,\Delta u_z)/L,$$

$$\eta=s/l$$

上記の無次元量X_tおよび無次元座標ηを導入することにより，増分形基礎微分方程式（1．a～1．g）および（2．a～2．g）は，次のごとく整理縮小される．

$$\frac{dX_t}{d\eta}=\nu\sum_{k=1}^{15}G_{tk}X_k(t=1\sim14,\ X_{15}=1)\qquad(3)$$

ここに，$\nu=\ell/L$，G_{tk}は増分断面力および増分変

位の係数である．(Appendix 参照)

座標原点を部材左端にとり，式(3)を変域 $[0, \eta]$ で積分すれば，次の積分方程式が得られる．

$$X_t(\eta)=X_t(0)+\int_0^{\eta}\nu\sum_{k=1}^{15}G_{tk}(\xi)\cdot X_k(\xi)d\xi \tag{4}$$

積分方程式(4)に，等間隔の数値積分法（Simpson の多分割数値積分法）を繰り返し適用することにより，部材を m 等分した場合の分割点 i における X_t の離散的な一般解が求められ，次式となる．

$$X_{ti}=\sum_{n=1}^{15}d_{tni}X_{no}(i=1\sim m,\ X_{150}=1) \tag{5}$$

ここに，X_{no}：左支点の状態量を表わす積分定数．

$$d_{tni}=\delta_{nt}+\sum_{j=0}^{i}\sum_{k=1}^{15}a_{ij}G_{tkj}d_{knj}$$

δ_{nt}：クロネッカーのデルタ，a_{ij}：$\lambda_{ij}/24m$

λ_{ij}：積分公式の重み係数

次に，軸ひずみ，曲率の変化量を材料非線形性を考慮して，断面力の増分量で表わす．平面保持の仮定より，断面内任意点の軸ひずみ $\Delta\varepsilon$ は，図心からの距離をそれぞれ x，y とすると，次式にて考えられる．

$$\Delta\varepsilon=\Delta\varepsilon_0+\Delta\phi_x y-\Delta\phi_y x+\omega\phi_z \tag{6}$$

ここに，ω：そり関数

また，断面力は，次のごとく表わせる．

$$\Delta Q_z=\int\Delta\sigma dA,\ \Delta M_x=\int\Delta\sigma\cdot ydA,$$

$$\Delta M_y=-\int\Delta\sigma\cdot xdA,\ \Delta M_\omega=\int\Delta\sigma\cdot\omega dA$$

したがって，(6)式のごとく書き表わす．

$$\begin{Bmatrix}-X_3\\-X_4\\-X_5\\-X_7\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}a^2\bar{A}\gamma_1 & \bar{I}_x\gamma_5 & -\bar{I}_x\gamma_8 & \bar{I}_\omega\gamma_{10}\\ \bar{I}_x\gamma_5 & \bar{I}_x\gamma_2 & -\bar{I}_x\gamma_6 & -\bar{I}_\omega\gamma_9\\ -\bar{I}_x\gamma_8 & -\bar{I}_x\gamma_6 & \bar{I}_y\gamma_3 & \bar{I}_\omega\gamma_7\\ -\bar{I}_\omega\gamma_{10} & \bar{I}_\omega\gamma_9 & -\bar{I}_\omega\gamma_7 & -\bar{I}_\omega\gamma_4\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\Delta\varepsilon_0\\ \Delta\phi_x\\ \Delta\phi_y\\ \Delta\phi_z\end{Bmatrix} \tag{6}$$

ただし，

$$a=\sqrt{\frac{A_0}{I_0}}L,\ \bar{A}=\frac{A}{A_0},\ \bar{I}_x=\frac{I_x}{I_0},\ \bar{I}_y=\frac{I_y}{I_0},\ \bar{I}_\omega=\frac{I_\omega}{I_{\omega 0}}$$

$$\gamma_1=\frac{\int EdA}{EA},\ \gamma_2=\frac{\int Ey^2dA}{EI_x},\ \gamma_3=\frac{\int Ex^2dA}{EI_y}$$

$$\gamma_4=\frac{\int E\omega^2dA}{EI_\omega},\ \gamma_5=\frac{L\int EydA}{EI_x},\ \gamma_6=\frac{\int ExydA}{EI_x}$$

$$\gamma_7=\frac{L\int E\omega xdA}{EI_\omega},\ \gamma_8=\frac{L\int ExdA}{EI_x},\ \gamma_9=\frac{L\int E\omega ydA}{EI_\omega}$$

$$\gamma_{10}=\frac{L^2\int E\omega dA}{EI_\omega}$$

この(6)式より，$\Delta\varepsilon_0$，$\Delta\phi_x$，$\Delta\phi_y$，$\Delta\phi_z$ を求めると

$$\begin{Bmatrix}\Delta\varepsilon_0\\ \Delta\phi_x\\ \Delta\phi_y\\ \Delta\phi_z\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}\beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{13} & \beta_{14}\\ \beta_{21} & \beta_{22} & \beta_{23} & \beta_{24}\\ \beta_{31} & \beta_{32} & \beta_{33} & \beta_{34}\\ \beta_{41} & \beta_{42} & \beta_{43} & \beta_{44}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}-X_3\\-X_4\\-X_5\\-X_7\end{Bmatrix} \tag{8}$$

4．複合非線形問題

材料非線形性の導入にあたって，本解析で用いた主な仮定は次のとおりである．

①材料は完全弾塑性体である．また，除荷は起こらないものとする．

②弾塑性域において，平面保持の法則が成立する．断面内の非弾性域の拡大に伴う剛性の低下率等は断面細分割法によって求めることとする．

④断面を微小要素に分割した場合，弾塑性域における伸び剛性，曲げ剛性および曲げねじり剛性は，弾性域内にある要素のみ有効であるとし，St. Venant のねじり剛性は，弾塑性域内で全断面有効とする．

⑤断面の各要素の降伏は，直ひずみのみで決定するものとする．

また，断面細分割法こ計算手順は次に示すとおりである．(Fig. 2)

1）部材断面を微小長方形要素に分割する．

2）各荷重増分段階において，断面の微小要素に生じる $\Delta\varepsilon$ を(6)式より算定する．

3）残留ひずみ ε_r と増分ひずみ $\Delta\varepsilon$ を重ね合わせる．

$$\varepsilon=\varepsilon_r+\Delta\varepsilon \tag{9}$$

4）Von Mises の降伏条件式より，降伏の判定を行う．

$\varepsilon<\varepsilon_y$　：弾性域　(10. a)

$\varepsilon\geqq\varepsilon_y$　：塑性域　(10. b)

5）(10. a）の場合は，弾性域内の剛性を与え，(10. b)の場合は，剛性を零とおき，剛性の低下率を計算する．

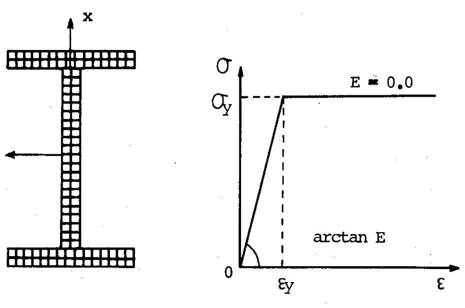

Fig. 2　Stress-Strain Relation and Section Divided into Finite Elements.

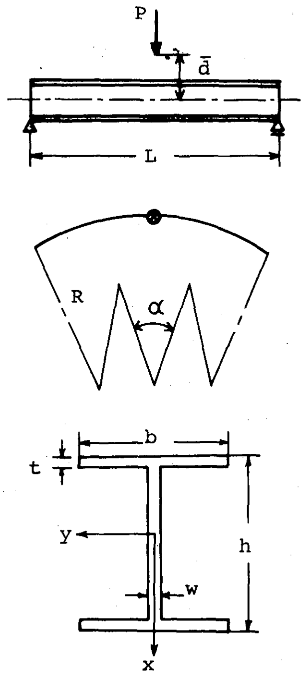

Fig. 3 Analytical Model of Curved Beam.

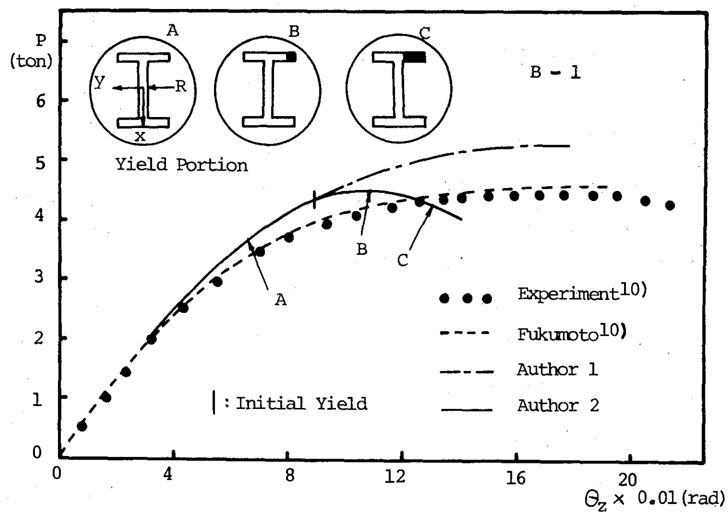

Fig. 4 Load-Displacement Relation and Partially Yield Section.

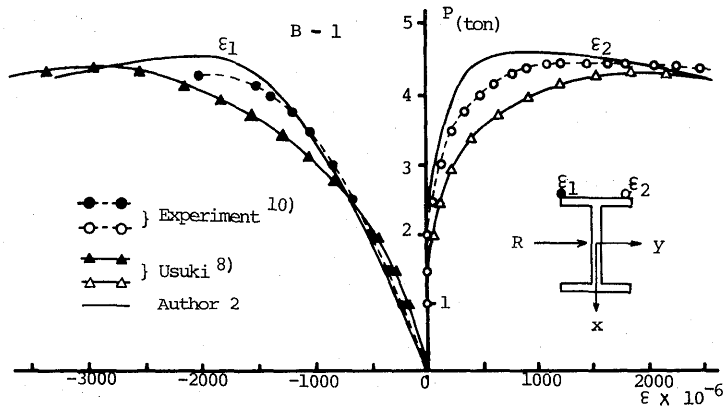

Fig. 5 Load-Strains at Flange Tips Relation of Curved Beam.

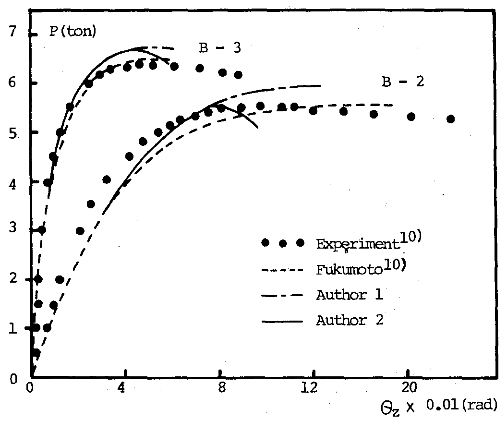

Fig. 6 Load-Displacement Relation.

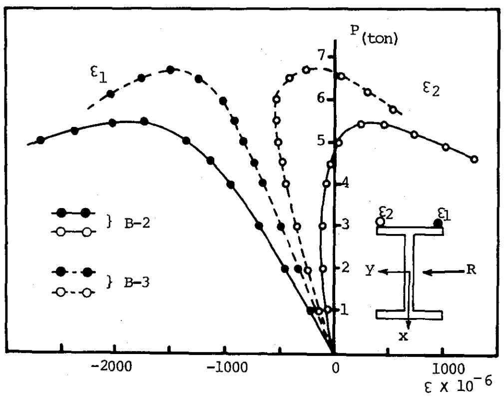

Fig. 7 Load-Strains at Flange Tips Relations of Curved Beam.

この方法により，任意の応力－ひずみ関係あるいは残留応力分布を考慮することができる．

5．数値計算例

薄肉曲線Ｉ形ばりの複合非線形問題に関する本解析法と，既往の理論値および実験値との比較を行う．

供試体は，両端単純支持で部材軸中央に単一集中荷重が作用する曲線ばりである．(Fig. 3) 供試体の諸寸法および材料定数は，Table. 1に示すとおりである．

Table. 1 Dimensions, Curvature and Material Constant of Analytical Models.

	R (cm)	b (cm)	h (cm)	t (cm)	w (cm)
$B-1$	350.0	10.06	25.01	0.84	0.55
$B-2$	425.0	10.06	25.18	0.83	0.57
$B-3$	700.0	10.09	25.04	0.83	0.56

L (cm)	d (cm)	E (kg/cm²)	σ_y (kg/cm²)
280.0	15.0	2.1×10^6	3200.0

Fig. 4は，Ｂ－１の荷重とスパン中央における断面回転角θ_zとの関係を示している．非弾性域の発生に伴って生じる断面二次そりモーメント（$I_{\omega x}, I_{\omega y}$）パラメータを考慮せず解析した場合を，Author 1とし，考慮した場合をAuthor 2として，福本ら[10]の実験値および理論値との比較を行った．図中の○内は，各荷重段階におけるスパン中央部での非弾性域の拡がりを表わしている．

また，Fig. 5は，荷重とスパン中央断面の上フランジのひずみとの関係を示したもので，実験値および薄木ら[8]の解析値との比較を行った．

同様に，曲率が異った供試体Ｂ－２，Ｂ－３の場合についての解析結果をFig. 6, Fig. 7に示した．

これらの図より，実験値と解解析値とは，終局耐荷力および変形挙動において，若干の差が生じているが，良好な傾向が得られ，本解析法の有効性が認められる．

6．結　論

幾何学的および材料非線形性を考慮し，増分形微分方程式の離散的一般解に基づく，直接的かつ半解析的解法を提示し，薄肉曲線Ｉ形ばりの複合非線形解析を行った．本解析値との既往研究との比較を行った結果，本解析法の妥当性が認められた．

この離散的一般解を用いることにより，直線要素集合体や円弧要素集合体などの置換系へのモデル化を要せず，直接的に解析できる．また，任意の支持条件，荷重条件のもとで，任意の軸線形状，断面形状および残留応力を有する薄肉曲線ばりの複合非線形解析が可能である．

参　考　文　献

1）吉田　博・井本芳宏：拘束をうけるはりの弾性および非弾性横倒れ座屈解析，土木学会論文報告集，第208号，pp. 1～12，1972年

2）吉田　博：プレートガーダーの非弾性横倒れ座屈強度，土木学会論文報告集，第220号，pp. 1～8，1973年

3）青島泰之：圧延Ｈ型鋼ばりの横だおれ座屈公式，土木学会論文報告集，第267号，pp. 1～8，1977年

4）稼農知徳・大島　久・新山　惇：曲線桁橋の構造特性について，土木学会論文報告集，第194号，pp21～28，1971年

5）Vlassov, V. Z（奥村敏恵ほか共訳）：薄肉弾性ばりの理論，技報堂，1967年

6）薄木征三・稼農知徳・渡辺　昇：有限なねじれを考慮した薄肉曲線部材の変形解析，土木学会論文報告集，第290号，pp. 1～15，1979年．

7）渡辺　昇・稼農知徳・薄木征三：薄肉曲線桁の変位場に基づく有限ねじれ変形解析，土木学会論文報告集，第317号，pp.31～45，1982年．

8）長谷部　薫・薄木征三：薄肉Ｉ形曲線桁の非弾性挙動について，土木学会第39回年次講演会概要集，Ｉ－64，Ｐ127～128，1984年．

9）西田　進・福本唀士：はりの横倒れ座屈挙動に関する一簡易算定法，土木学会論文報告集，第328号，pp.11～18，1982年．

10) Fukumoto, Y. and S. Nishida : Ultimate load Behavior of Curved I-Beams, ANCE, Vol. 107, No. EM2, April, 1981.

11) 前川幸次・吉田　博：伝達マトリックス法による曲線Ｉ形ばりの耐荷力解析，土木学会論文報告集，第312号，pp.22～37，1981年．

12) 吉田　博・前川幸次：薄肉開断面曲線ばりの弾塑性解析について，土木学会第34回年次講演会概要集，Ｉ-105，p208～209，1979年．

13) 前川幸次・吉田　博：曲線Ｉ形ばりの耐荷力曲線について，土木学会第35回年次講演会概要集，Ｉ-126，pp.249～250，1980年．

14) 若菜啓孝・﨑山　毅：鋼リブアーチの面外耐荷力解析，第９回構造工学における数値解析法シンポジウム論文集，pp.203～208，1985年．

〔Appendix〕

$G_{12}=\psi_{z0}$, $G_{13}=-K_{y0}+Q_z\beta_{31}$, $G_{14}=Q_z\beta_{32}$,

$G_{15}=Q_z\beta_{33}$, $G_{17}=Q_z\beta_{34}$,

$G_{18}=Q_y$, $G_{110}=-\bar{P}_z$, $G_{111}=\bar{P}_y$,

$G_{115}=\Delta p_x+\Delta\psi_z\Delta Q_y-\Delta Q_z H_2$,

$G_{21}=-\psi_{z0}$, $G_{22}=K_{x0}-Q_z\beta_{21}$, $G_{24}=-Q_z\beta_{22}$,

$G_{25}=-Q_z\beta_{23}$, $G_{27}=-Q_z\beta_{24}$,

$G_{28}=-Q_x$, $G_{29}=\bar{P}_z$, $G_{211}=\bar{P}_x$,

$G_{215}=\Delta p_y-\Delta\psi_z\Delta Q_x+\Delta Q_z H_1$,

$G_{31}=K_{y0}$, $G_{32}=-K_{x0}$, $G_{33}=-Q_x\beta_{31}+Q_y\beta_{21}$,

$G_{34}=-Q_x\beta_{32}+Q_y\beta_{22}$,

$G_{35}=-Q_x\beta_{33}+Q_y\beta_{23}$, $G_{37}=-Q_x\beta_{34}+Q_y\beta_{24}$,

$G_{39}=-\bar{P}_y$, $G_{310}=\bar{P}_x$,

$G_{315}=\Delta p_z+\Delta Q_x H_z-\Delta Q_y\ H_1$,

$G_{42}=1.0$, $G_{43}=M_z\beta_{31}$, $G_{44}=M_z\beta_{32}$,

$G_{45}=\psi_{z0}+M_z\beta_{33}$, $G_{46}=-K_{y0}$,

$G_{47}=M_z\beta_{34}$, $G_{48}=M_y$, $G_{415}=-\Delta M_z H_2+\Delta\psi_z\Delta M_y$,

$G_{51}=-1.0$, $G_{53}=-M_z\beta_{21}$, $G_{54}=-\psi_{z0}-M_z\beta_{22}$,

$G_{55}=-M_z\beta_{23}$, $G_{56}\doteq K_{x0}$,

$G_{57}=-M_z\beta_{24}$, $G_{58}=-M_x$, $G_{515}=-\Delta M_z H_1-\Delta\psi_z\Delta M_x$,

$G_{63}=-M_x\beta_{31}+M_y\beta_{21}$, $G_{64}=K_{y0}-M_x\beta_{32}$,

$G_{65}=-K_{x0}-M_x\beta_{33}+M_y\beta_{23}$,

$G_{67}=-M_x\beta_{34}+M_y\beta_{24}$, $G_{615}=\Delta M_x H_2-\Delta M_y H_1$,

$G_{76}=I_0 / I_{\omega 0}$, $G_{78}=J_0 / I_{\omega 0}$,

$G_{83}=-\beta_{41}$, $G_{84}=-\beta_{42}$, $G_{85}=-\beta_{43}$, $G_{87}=-\beta_{44}$,

$G_{93}=-\beta_{21}$, $G_{94}=-\beta_{22}$, $G_{95}=-\beta_{23}$,

$G_{97}=-\beta_{24}$, $G_{910}=\psi_{z0}$, $G_{911}=-K_{y0}$,

$G_{103}=-\beta_{31}$, $G_{104}=-\beta_{32}$, $G_{105}=-\beta_{33}$,

$G_{107}=-\beta_{34}$, $G_{109}=-\psi_{z0}$, $G_{1011}=K_{x0}$,

$G_{118}=1.0$, $G_{119}=K_{y0}$, $G_{1110}=-K_{x0}$,

$G_{1210}=1.0$, $G_{1213}=\psi_{z0}$, $G_{1214}=-K_{y0}$,

$G_{139}=-1.0$, $G_{1312}=-\psi_{z0}$, $G_{1314}=K_{x0}$,

$G_{143}=-\beta_{11}$, $G_{144}=-\beta_{12}$, $G_{145}=-\beta_{13}$, $G_{147}=-\beta_{14}$

$G_{1412}=K_{y0}$, $G_{1413}=-K_{x0}$,

$$H_1=-\beta_{21}\Delta Q_z-\beta_{22}\Delta M_x-\beta_{23}\Delta M_y-\beta_{24}\Delta M_\omega$$

$$H_2=-\beta_{31}\Delta Q_z-\beta_{32}\Delta M_x-\beta_{33}\Delta M_y-\beta_{34}\Delta M_\omega$$

other $G_{ik}=0.0$