

# 面内変動曲げを受ける初期変形をもつ 長方形板の動的安定性

—静的曲げモーメントおよび減衰力の影響—

高橋和雄\* 小西保則\*  
川野隆太\*\* 夏秋義広\*\*\*

## Dynamic Stability of an Initially Deflected Rectangular Plate under Inplane Dynamic Moment

—Effects of Static Moment and Damping on Unstable Motions—

by

Kazuo TAKAHASHI\*, Yasunori KONISHI,\*  
Ryuta KAWANO\*\* and Yoshihiro NATSUAKI\*\*\*

In the present paper, the vibration of an initially deflected rectangular plate under sinusoidally time varying inplane moment is examined from the point of view of the dynamic instability.

The equation of motion describing the large deflection of the initially deflected plate is analyzed by the Galerkin method. The resulting equations for time variable are integrated by using the Runge-Kutta-Gill method. The dynamic unstable regions are analyzed by the small deflection theory which neglects nonlinear terms. The amplitudes of unstable regions are integrated by using large deflection theory.

Numerical results of an initially deflected plate are presented for static moment and damping.

### 1. まえがき

平板構造に面内変動曲げが作用すると、係数励振(パラメーター励振)によって面外振動が励振される。この問題については、面外不安定領域の種類、安定を失った後の応答および初期変形との相関など力学的に解明されていない点が認められる。そこで、著者らは面内変動曲げを受ける長方形板の面外係数励振振動問題を解析的に取り扱い、その力学的特徴を明らかにしてきた<sup>1)~5)</sup>。すなわち、まず微小変形理論より得られる線形理論を用いて、面外不安定振動の存在およびそのメカニズムなどの基本的な性質を把握し<sup>1), 2)</sup>、これより面内変動曲げを受ける長方形板の面外不安定領域は振動次数の和が奇数となる結合共振が支配的であり、境界

条件、辺長比に無関係に2つの固有振動数が接近している場合に領域の幅が広いことを示した。

次に、面外不安定振動の振幅を、平板の有限変形に関する Kármán の式を用いて決定した<sup>3), 4)</sup>。これより、2個の固有振動数の和が小さい場合の結合共振ほど、振幅が大きいこと、および静的曲げモーメントおよび減衰力は最大応答に大きな影響を及ぼすことを明らかにした。

以上は初期変形のない場合であるが、面内曲げを受ける平板の面外変形には、初期変形が大きな影響を及ぼすことが知られている<sup>5)</sup>。引き続き、初期変形と面外係数励振振動との関係を明確にするために、初期変形をもつ長方形板の面外係数励振振動を Marguerre<sup>6)</sup>

昭和62年4月30日

\*土木工学科 (Department of Civil Engineering)

\*\*鹿児島市役所 鹿児島市山下町 (Kagoshima City Office, Kagoshima-city)

\*\*\*片山鉄工所(株) 大阪市大正区 (Katayama Iron Works Limited, Taisho-ku, Osaka)

の式を用いて解析的に明らかにした<sup>7)</sup>。この結果、初期変形の形状と不安定振動の固有振動形が一致する場合に最大応答は初期変形の影響を著しく受けることが明らかとなった。

以上の研究によって、面内変動曲げを受ける長方形板の動的挙動が明確にされた。しかし、文献7)では、初期変形の形状および大きさの影響のみを評価するにとどまり、初期たわみと面内静的曲げの相関および減衰力の影響については言及することができなかった。そこで、本研究は、初期変形をもつ長方形板に静的曲げおよび減衰力が作用する場合の面外不安定領域および最大応答を求めるものである。

## 2. 基礎式および解法

Fig. 1に示すような初期変形  $w_0$  をもつ長方形板の  $x=0, a$  の2辺上に静的曲げモーメント  $M_0$  と変動曲げモーメント  $M_t \cos \Omega t$  からなる曲げモーメント  $M$  が作用する。この長方形板が安定を失った後の初期変形  $w_0$  をもつ長方形板の運動方程式は Marguerre の式<sup>8)</sup>を用いて次のように表わされる。

$$L(w, F) = \rho d \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + D \nabla^4 w - \frac{6}{b^2} \left( 1 - 2 \frac{y}{b} \right) (M_0 + M_t \cos \Omega t) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - d \left\{ \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \frac{\partial^2 (w + w_0)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \frac{\partial^2 (w + w_0)}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 (w + w_0)}{\partial x \partial y} \right\} = 0 \quad (1)$$

$$\nabla^4 F = E \left\{ \left[ \frac{\partial^2 (w + w_0)}{\partial x \partial y} \right]^2 - \frac{\partial^2 (w + w_0)}{\partial x^2} \frac{\partial^2 (w + w_0)}{\partial y^2} - \left[ \left( \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right] \right\} \quad (2)$$

ここに、 $\rho$ : 板の密度、 $d$ : 板厚、 $D = Ed^3/12(1 - \nu^2)$ : 板剛度、 $E$ : ヤング率、 $\nu$ : ポアソン比、 $F$ : Airy の応力関数

板の境界条件は、曲げに対して単純支持、面内変位に対して固定とする。

式(1)、(2)を解くために、式(1)の解を次のように仮定する。

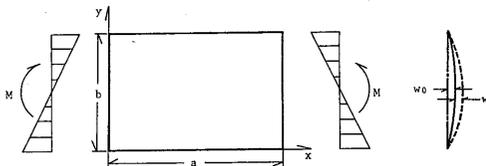


Fig. 1 Geometry and coordinate system

$$w = d \sum_{n=1} T_{Mn}(t) W_{Mn}(x, y) \quad (3)$$

ここに、 $T_{Mn}(t)$ : 未知の時間関数、 $W_{Mn}(x, y)$ : 境界条件を満足する座標関数、 $M=1, 2, \dots$ 。すなわち

$$W_{Mn}(x, y) = \sin \frac{M\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (4)$$

ここに、 $M$ :  $x$  方向の半波数、 $n$ :  $y$  方向の半波数  
初期変形も与えられた境界条件を満足しなければならない。本研究では初期変形の影響を評価することを目的とするから、解析的取り扱いの容易な次式で仮定する。

$$w_0 = e_0 d W_{CH}(x, y)$$

ここに、 $e_0$ : 板厚で無次元化した初期変形の大きさ、 $W_{CH} = \sin G\pi x/a \sin H\pi y/b$ :  $G=1, 2, \dots$   $x$  方向の半波数、 $H=1, 2, \dots$   $y$  方向の半波数

式(3)、(5)を式(2)に代入して、一般解  $F$  を求めた後、面内の境界条件を満足するように積分定数を決定する。得られた結果および式(3)を式(1)に代入して、ガラーキン法を適用すれば、次のような時間関数  $T_{Mn}$  の運動方程式に離散化される。すなわち、

$$\frac{\rho db^4}{D} I_{MP}^2 \dot{T}_{MP} + I_{MP}^2 T_{MP} + \frac{6}{D} (M_0 + M_t \cos \Omega t) \sum_{n=1} I_{Mpn} T_{Mn} + \sum_{n=1} \sum_{r=1} \sum_{s=1} I_{Mnrsp} T_{Mn} T_{Mr} T_{Ms} + e_0 \sum_{n=1} \sum_{r=1} I_{MnrCHP} T_{Mn} T_{Mr} + e_0^3 \sum_{n=1} I_{MnCHP} T_{Mn} = 0 \quad (6)$$

ここに、 $I_{MP}^2, I_{Mpn}, I_{Mnrsp}, I_{MnrCHP}, I_{MnCHP}$ : ガラーキン法の積分項

式(6)の曲げモーメント  $M_0, M_t$ 、励振円振動数  $\Omega$  および時間  $t$  の項を無次元化する。すなわち、

曲げモーメント  $M_0, M_t$ :

$$\bar{M}_0 = \frac{M_0}{M_{cr}}, \quad \bar{M}_t = \frac{M_t}{M_{cr}} \quad (7-a)$$

ここに、 $M_{cr} = \lambda_{cr} \pi^2 D/6$ : 初期変形がない場合の座屈曲げモーメント、 $\lambda_{cr}$ : 座屈固有値

励振円振動数  $\Omega$ :

$$\bar{\omega} = \Omega / \Omega_1^1 \quad (7-b)$$

ここに、 $\Omega_1^1 = \alpha_1^1 \pi^2 / b^2 \sqrt{D/\rho d}$ : 一次振動の固有円振動数、

$\alpha_1^1$ : 一次振動の固有値

時間  $t$ :

$$\tau = \Omega_1^1 t \quad (7-c)$$

各固有振動ごと分解される減衰項を付加すれば、式(6)は次のように表わされる。

$$\dot{T}_{MP} + 2h_p^M \left( \frac{\Omega_1^M}{\Omega_1^1} \right) \dot{T}_{MP} + \left( \frac{\Omega_1^M}{\Omega_1^1} \right)^2 T_{MP} + (\bar{M}_0 + \bar{M}_t \cos \bar{\omega} \tau) \sum_{n=1} A_{MP} T_{Mn} + \sum_{n=1} \sum_{r=1} \sum_{s=1} B_{Mnrsp} T_{Mn} T_{Mr} T_{Ms}$$

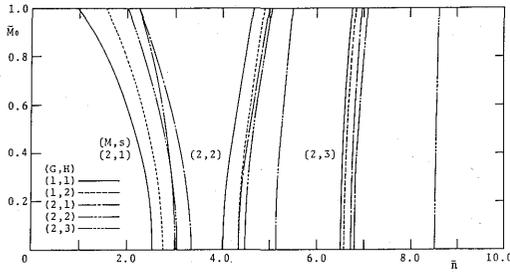


Fig. 2 Moment  $\bar{M}_0$  vs frequency  $n$ :  $\mu=1.0, e_0=0.5$  and  $M=1$

$$+ e_0 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{r=1}^{\infty} C_{MnrGHP} T_{Mn} T_{Mr} + e_0^2 \sum_{n=1}^{\infty} D_{MnGHP} T_{Mn} = 0 \quad (8)$$

ここに、 $h_p^M$ : 減衰定数

式(8)に含まれるパラメータは初期変形の形状 ( $G, H$ )、大きさ  $e_0$ 、減衰定数  $h_p^M$ 、静的曲げモーメント  $\bar{M}_0$ 、変動曲げモーメントの振幅  $\bar{M}_t$  および励振円振動数  $\bar{\omega}$  である。特定の初期変形 ( $G, H, e_0$ )、減衰定数  $h_p^M$  および静的曲げモーメント  $\bar{M}_0$  をもつ長方形板の動的安定性を  $(\bar{M}_t, \bar{\omega})$  の組合せのもとに評価することができる。式(8)において  $h_p^M=0, \bar{M}_t=0$  とし、非線形項を無視すれば、初期変形をもつ長方形板に静的曲げモーメント  $\bar{M}_0$  が作用する場合の固有振動数が得られる。また、式(8)において、非線形項のみを無視すれば、面外不安定領域が得られる。さらに、式(8)のすべての項を考慮すれば、面外不安定振動の振幅が定められる。

### 3. 静的曲げモーメントの影響

#### (1)固有振動数

不安定振動が生ずる励振振動数  $\bar{\omega}$  は、長方形板の無次元固有振動数  $\omega_n^M = \bar{\Omega}_n^M / \Omega_n^0$  (ここに、 $\bar{\Omega}_n^M$ : 初期変形をもつ長方形板に静的曲げモーメントが作用する場合の固有円振動数、 $M$ :  $x$  方向の半波数、 $s$ :  $y$  方向の半波数、 $\Omega_n^0$ : 初期変形がない長方形板の  $\bar{M}_0=0$  のとき最低次の固有円振動数) と密接な関係がある。すなわち、単純共振は  $\bar{\omega} = 2\omega_n^M/k$  ( $k=1, 2, \dots$ ) 付近、結合共振は  $\bar{\omega} = (\omega_n^M + \omega_s^M)/k$  付近にそれぞれ生ずる。したがって、不安定領域を計算するに先立って、固有振動数に及ぼす静的曲げモーメントの影響を明らかにすることが必要である。Fig. 2, 3 は初期変形を有する正方形板 ( $\mu=1.0, e_0=0.5$ ) に対する静的曲げモーメント  $\bar{M}_0$  と固有円振動数  $\bar{n}$  との関係、初期変形の形状 ( $G, H$ ) をパラメータに、 $x$  方向の半波数  $M=1, 2$  に対して示したものである。図中の記号  $(M, s)$  は  $\omega_n^M$ 、すなわち、 $x$  方向の半波数  $M, y$  方向の半波数  $s$  の振動形をもつ無次元固有振動数を意味する。また、実線、破線などの線の

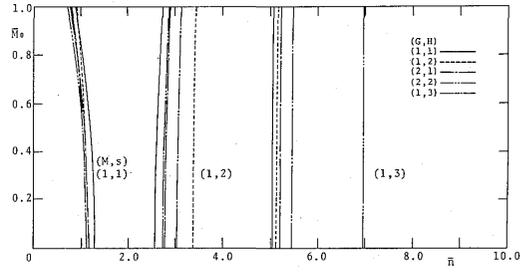


Fig. 3 Moment  $\bar{M}_0$  vs frequency  $\bar{n}$ :  $\mu=1.0, e_0=0.5$  and  $M=2$

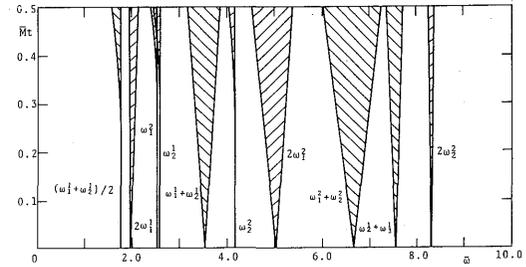


Fig. 4 Unstable regions of a square plate:  $\mu=1.0, \bar{M}_0=0.3, e_0=0.2$  and  $(G, H)=(2, 1)$

種類で区別している記号 ( $G, H$ ) は初期変形の形状を示し、 $G, H$  はそれぞれ、 $x, y$  方向の半波数に対応する。

静的曲げモーメント  $\bar{M}_0$  の影響として、 $y$  方向の半波数  $s=1$  の振動形をもつ固有振動数  $\omega_1^1, \omega_1^2$  は低下するが、 $\bar{M}_0=1.0$  すなわち、初期変形がない場合の座屈モーメントとなっても、 $\omega_1^2=0.0$  にならない。つまり、初期変形の存在によって平板の剛性が増大しているためである。また、 $s=1$  以外の振動形をもつ固有振動数はほとんど変化しないか逆に増大する。これより、1次振動と他の次数の固有振動数が離れるので、不安定領域の幅は静的曲げモーメント  $\bar{M}_0$  の影響を受けることが予想される。

#### (2)面外不安定領域

Fig. 4 は静的曲げモーメントが作用した場合 ( $\bar{M}_0=0.3$ ) の微小振動論から得られる面外不安定領域 ( $e_0=0.2, (G, H)=(1, 1)$ ) である。図中の右下りの斜線部が結合共振を、右上りの斜線部が単純共振を意味する。不安定領域に示した記号  $(\omega_n^M + \omega_s^M)/k, 2\omega_n^M/k$  はそれぞれ結合共振、単純共振の種類を示す。静的曲げモーメントが存在すると、 $\bar{M}_0=0.0$  のときに狭かった単純共振の不安定領域が現われてくる。Fig. 5 は結合共振  $\omega_1^1 + \omega_2^2$  の不安定領域に対する静的曲げモーメントの影響を初期変形の形状 (1, 1), (2, 2) について表示したものである。初期変形の形状に関係なく静的曲

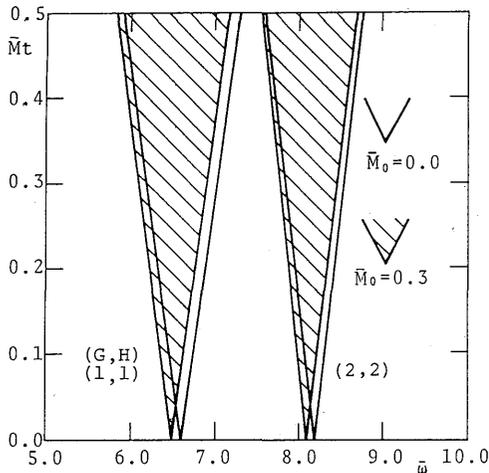


Fig. 5 Unstable regions of a square plate:  $\omega_1^2 + \omega_2^2$ ,  $\mu=1.0$  and  $e_0=0.5$

げモーメント  $\bar{M}_0$  の存在によって、不安定領域の発生位置は低い振動数側に移動する。

(3)最大応答

Fig. 6 は、 $\bar{M}_0=0.3$  が作用した場合 ( $e_0=0.2, (G,H)=(2,1)$ ) の非線形項まで考慮した最大応答である。図中の横軸  $\bar{M}_t$  は変動曲げモーメントの振幅を、縦軸  $A$  は面外振動の最大値を示している。図中において、実線は結合共振、破線は単純共振の最大応答を意味する。静的曲げモーメントの存在によって、単純共振  $2\omega_1^2, 2\omega_1^2$  などの最大応答が現われてくる。しかし、面内変動曲げを受ける場合の最大応答は結合共振の振幅が支配的で単純共振は狭い。次に結合共振に注目して、初期変形の形状をパラメーターに結合共振の  $\omega_1^2 + \omega_2^2$  の最大応答に及ぼす静的曲げモーメント  $\bar{M}_0$  の影響を Fig. 7 に示す。図のように、初期変形の形状  $(G,H)$  に無関係に静的曲げモーメントの存在によって応答が増大する。

4. 減衰力の影響

(1)面外不安定領域

初期変形をもつ長方形板の面外不安定領域に及ぼす減衰力の影響を明らかにする。Fig. 8 は、不安定領域  $\omega_1^2 + \omega_2^2 (e_0=0.5)$  を減衰のある場合 ( $h_1^2 = h_2^2 = 0.01$ ) と非減衰の場合 ( $h_1^2 = h_2^2 = 0.0$ ) に対して示したものである。図のように、減衰力の効果は、高い振動数側に現われる不安定領域に対して顕著となって来る。したがって、減衰力の効果は初期変形の形状と固有振動数が一致した場合に大きくなる。

(2)最大応答

Fig. 9 は、結合共振  $\omega_1^2 + \omega_2^2$  について、初期変形があ

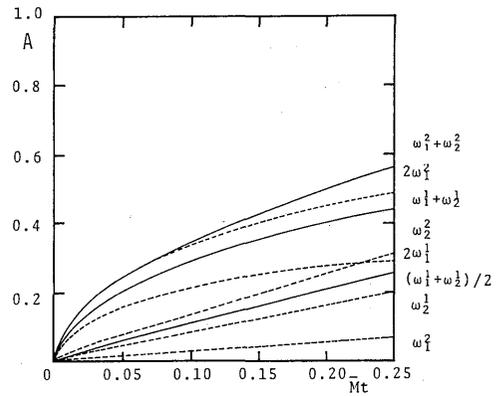


Fig. 6 Maximum amplitudes of a square plate:  $\mu=1.0, \bar{M}_0=0.3, e_0=0.2$  and  $(G,H)=(2,1)$

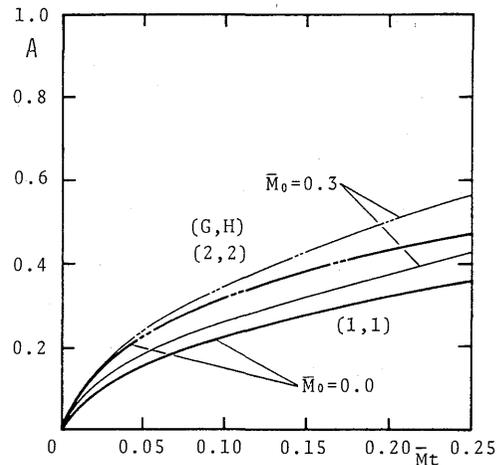


Fig. 7 Effect of moment  $\bar{M}_0$  on the maximum amplitudes:  $\omega_1^2 + \omega_2^2, \mu=1.0$  and  $e_0=0.2$

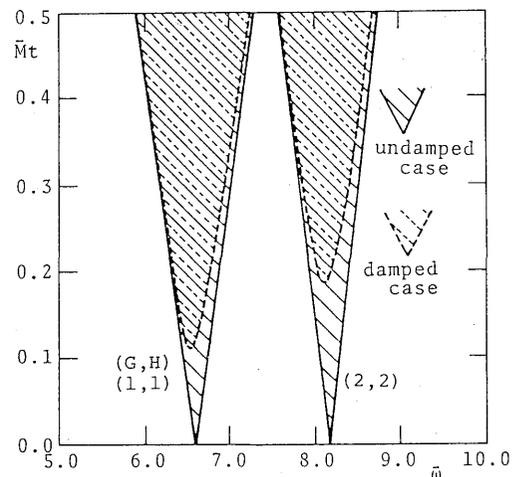


Fig. 8 Unstable regions of a square plate:  $\omega_1^2 + \omega_2^2, \mu=1.0, h_1^2 + h_2^2 = 0.01$  and  $e_0=0.5$

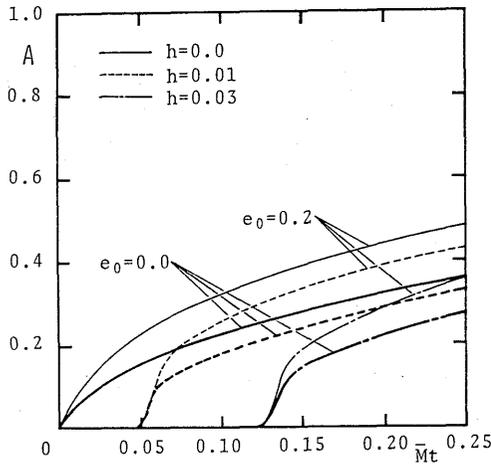


Fig. 9 Effect of damping on the maximum amplitudes:  $\omega_1^2 + \omega_2^2, \mu = 1.0, \bar{M}_0 = 0.3, e_0 = 0.2$  and  $(G, H) = (2, 2)$

る場合とない場合の減衰の効果を比較したものである。減衰力の効果は励振力の小さいところで効いてくる。減衰力があれば、ある程度の励振力がないと、振動が生じないと言える。また、減衰力は最大応答を小さくさせる効果をもつ。初期変形が存在すれば最大応答が増大するので、減衰の効果が小さくなると言える。

## 5. まとめ

本研究によって初期変形をもつ長方形板の面外不安定領域および最大応答に及ぼす減衰力の影響を評価した。得られた結果をまとめると、

静的曲げモーメントの存在によって

- (1)長方形板の固有振動数が変化し、その割合は振動形に依存する。したがって、2つの振動数の和で生ずる結合共振の不安定領域が影響を受ける。
- (2)静的曲げモーメントが作用しない場合に存在しなかった単純共振の主不安定領域が生ずる。結合共振の幅はわずかに減少する。
- (3)面外不安定振動の最大応答は初期変形の形状に無関

係に増大する。その割合はかなり大きく、静的曲げモーメントの存在は、最大応答に最も効くことがわかる。

また、減衰力の影響を評価したところ、

- (4)減衰力は高い振動数側の不安定領域に効いてくる。また、最大応答は励振力の小さい領域で影響を受ける。実橋を対象とした場合、静的曲げモーメントおよび減衰力が存在するから、これらの効果を考慮した取扱いが必要である。

## 参考文献

- 1) 高橋・田川・池田・松川：面内曲げを受ける長方形板の動的安定性，土木学会論文集，第341号，pp. 179~186，1984。
- 2) Takahashi, K., Tagawa, M. and Ikeda, T.: Dynamic Stability of a Rectangular Plate Subjected to Inplane Moment, Theoretical and Applied Mechanics, Vol. 33, pp. 311~318, 1985。
- 3) 高橋・池田・川野：幾何学的非線形性を考慮した面内変動曲げを受ける長方形板の動的安定性，構造工学論文集，Vol. 32A, pp. 705~714, 1986。
- 4) Takahashi, K., Konishi, Y., Ikeda, T. and Kawano, R.: Nonlinear Response of a Rectangular Plate Subjected to Inplane Dynamic Moment, Proc. of JSCE, No. 374/I-6, pp. 358~369, 1986。
- 5) 前田・大倉：プレートガーダーウェブの初期たわみと疲労亀裂に関する研究，土木学会論文集，第319号，pp. 1~12, 1982。
- 6) Marguerre, K.: Zur Theorie der gekrummten Platte grosser Formänderung, Proc. 5th International Congress for Applied Mechanics, pp. 93~101, 1938。
- 7) 高橋・小西・川野・浦川：面内変動曲げを受ける初期変形をもつ長方形板の動的安定性，構造工学論文集，Vol. 33A, pp. 485~494, 1987。