

飽和液体の上向き直交流中に置かれた水平円柱 まわりの層流膜沸騰熱伝達

茂 地 徹* 川 江 信 治*
金 丸 邦 康** 山 田 昭*

Laminar Film Boiling Heat Transfer on a Horizontal Cylinder Submerged in an Upward Crossflow of Saturated Liquids

by

Tohru SHIGECHI* , Nobuji KAWAE*
Kuniyasu KANEMARU** and Takashi YAMADA*

An analysis was made of the steady-state, forced convection film boiling heat transfer on an isothermal horizontal cylinder submerged in an upward crossflow of saturated liquids in the gravitational field. The boundary-layer equations of momentum and of energy for the laminar vapor film, including both the inertia force in the former and the convection term in the latter, were solved using an integral method. The analytical solution was obtained for the integrated boundary-layer equations. A theoretical correlating equation for the heat transfer rate, which was derived from the solution, agreed very well with the experimental data of ethanol by Bromley et al. The correlating equation and its approximate expression were tentatively recommended because of a scarcity of experimental data.

1. まえがき

膜沸騰熱伝達の理論解析の一つの方法である安定な蒸気膜に境界層の概念を適用する方法は、伝熱面寸法を特定の範囲に限れば十分正確な対流熱伝達係数の値を予測するので、今日でもその有効性は失われていない。水平円柱まわりの飽和膜沸騰熱伝達に関して、液体の近寄り速度が零つまりプール膜沸騰の場合には、Bromley¹⁾以後いくつかの解析が行われている。その中で、Nishikawaら²⁾は Bromley¹⁾が解析に際して無視した蒸気膜の運動方程式中の慣性項とエネルギー式中の対流項を考慮して積分境界層の方法で解析し、蒸気膜内の速度と温度のプロファイルをそれぞれ適当に仮定することにより、それまでに得られた多くの測定値とよく一致する理論解（解析解）を得ることに成功している。一方、液体の近寄り速度が十分に大きく重力の影響が無視できる強制対流飽和膜沸騰の場合には、液

体の流れをポテンシャル流と仮定して解析した Epstein-Hauser³⁾と Witte-Orozco⁴⁾の研究がある。前者は局所対流熱伝達係数が最大となる前方岐点を対象に解析し、得られた理論解（解析解）と Bromleyら⁵⁾の測定値とを比較しているが、理論と実験との間には約2倍の偏差がある。後者は彼らの理論解（数値解）が Yilmaz-Westwater⁶⁾のフロン113（R-113）の測定値とほぼ一致することを示しているが、熱伝達の整理式は提示していない。なお、Yilmaz-Westwater⁶⁾の実験ではR-113の小さい蒸発潜熱のため蒸気膜は厚くしかも液体の速度が非常に大きいので、蒸気の流れにはかなりの乱れが存在すると想像されるが、このような条件下で、層流蒸気膜を仮定した Witte-Orozcoの解析結果とR-113の測定値とが一致することに關しては、さらに詳細な検討を要するに思われる。

さて、重力の影響が無視できない程度に液体の近寄

昭和62年9月30日受理

*機械工学科 (Department of Mechanical Engineering)

**共通講座・工業物理学 (Applied Physics Laboratory)

り速度が小さい場合には、いわゆる体積力対流（自由対流）と強制対流とが共存した対流熱伝達の問題となる。このような場合に、Bromleyら⁵¹⁾は液体の流れをポテンシャル流と仮定して定式化を行い解析解を得ているが、その解と彼らの測定値とは異なる伝熱特性を示している。これは Bromleyらが定式化の過程で蒸発量の円柱まわりの変化を無視して一定としたためであると考えられる。さらに Bromleyらは強制対流が支配的な場合に対流熱伝達の整理式〔文献(5)の式(16)]を提案しているのであるが、この整理式には、「液体の流れはポテンシャル流である」ことに起因する流動方向の圧力勾配が蒸気の流れに及ぼす効果は考慮されていない。しかしながら、著者の一人が既に行った解析⁷¹⁾によれば、気液の密度比が大きい場合（約200以上）には、蒸気の流動を支配する重要な因子は液体のポテンシャル流に基づく流動方向の圧力勾配であり、この効果は最終的には、熱伝達の整理を行うに際して伝熱パラメータ間の依存性に重要な影響を及ぼすので、無視されない。

本研究では、重力場におかれた水平円柱から上向きに直交して流れる飽和液体への膜沸騰熱伝達を、蒸気膜を層流境界層、液体の流れをポテンシャル流とそれぞれ仮定し、特にこれまでの解析^{31, 41, 51, 71)}で無視された蒸気の慣性力とエネルギー式中の対流項を考慮して、上に述べたNishikawaら²¹⁾の解析と類似な積分境界層の方法で解析し、対流熱伝達に及ぼす近寄り速度の影響を明らかにした。さらに、速度と温度のプロファイルの最適な関数形を Bromleyら⁵¹⁾の測定値に基づいて決定し、これらのプロファイルに基づいた理論解（解析解）とその近似式を対流熱伝達の暫定的な整理式として提案するものである。

主 要 記 号

- a : 温度伝導率
- c_p : 定圧比熱
- D : 円柱の直径
- Fr : フルード数 式(30)
- g : 重力の加速度
- Ga : ガリレオ数 式(31)
- $G(\eta), H(\eta)$: 速度プロファイル, 温度プロファイル
- K : 密度比, 式(32)
- l, l^* : 蒸発潜熱, 修正蒸発潜熱 式(34)
- Nu : ヌセルト数
- P : 圧力
- q : 熱流束
- R : 円柱の半径

- Sp, Sp^* : 無次元過熱度 式(64),
修正無次元過熱度 式(33)

- T : 温度
- T_s : 飽和温度
- T_w : 伝熱面表面温度
- ΔT_s : 過熱度 ($= T_w - T_s$)
- u : 円周方向の速度
- u_c : 代表速度
- U_∞ : 近寄り速度
- v : 半径方向の速度
- y : 伝熱面表面から測った半径方向座標

- $\beta_1 \sim \beta_3$: 定数 式(19)~(21)
- $\gamma_1 \sim \gamma_3$: 定数 式(22)~(24)
- δ : 蒸気膜厚さ
- Δ : 無次元蒸気膜厚さ ($\equiv \delta/D$)
- η : 無次元座標 ($\equiv y/\delta$)
- λ : 熱伝導率
- μ : 粘性係数
- ν : 動粘性係数
- φ : 円周方向座標
- φ_s : はく離点
- ρ : 密度

添字

- L : 液体
- V : 蒸気
- δ : 気液界面
- co : 対流のみ

2. 解 析

Fig. 1 に示すように均一な表面温度 T_w の水平円柱から飽和液体への定常膜沸騰を考える。液体は一様な近寄り速度 U_∞ で垂直上向きに流れており、一様に系の圧力に相当する飽和温度 T_s に達しているものとする。膜沸騰においては通常、伝熱面表面温度が高いため、対流熱伝達と放射伝熱とを同時に考える必要があるが、両者の総括には Bromleyら⁵¹⁾の方法を採用することにして、ここでは対流熱伝達のみを対象とする。解析に際して次の仮定をおく。

- (1) 蒸気膜に対して層流境界層を、液体の流れに対してポテンシャル流を仮定し、両者の境界面（気液界面）は滑らかであるとする。また蒸気膜に関する各種保存式において流線の曲りを無視する。
- (2) 物性値は一定とし、蒸気の密度を液体の密度に比して無視する ($\rho_L - \rho_V \approx \rho_L$)。物性値は、伝熱面

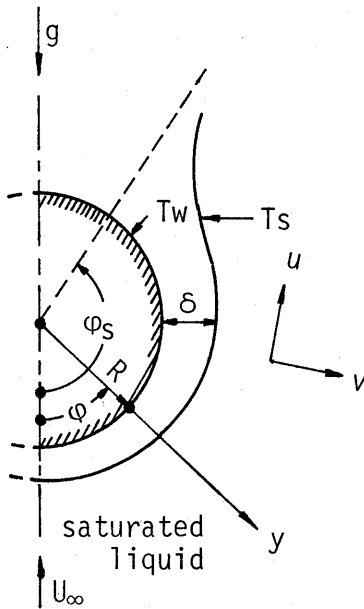


Fig. 1 Physical model and co-ordinate system

表面温度 T_w と飽和温度 T_s の算術平均値で評価する。

(3) 液体の流れがはく離する場合には、はく離点下流領域での円柱表面からの熱伝達を無視する。

(4) 対流熱伝達に及ぼす放射伝熱の寄与は考慮しない。

以上の仮定により蒸気膜に関する基礎式は次のようになる。

連続の式：

$$\frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

運動方程式：

$$\begin{aligned} \rho_V \left(u \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial \varphi} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) \\ = -g \rho_V \sin \varphi - \frac{1}{R} \frac{dP_V}{d\varphi} + \mu_V \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \end{aligned} \quad (2)$$

ここで式(2)の右辺第2項の圧力勾配は境界層の仮定〔仮定(1)〕により蒸気膜の外側を流れる液体の圧力勾配に等しくなる。液体のポテンシャル流にベルヌーイの定理を適用すると次式が得られる。

$$-\frac{1}{R} \frac{dP_L}{d\varphi} = \rho_L \left(g \sin \varphi + \frac{2 U_\infty^2}{R} \sin 2\varphi \right) \quad (3)$$

$P_V = P_L$ において式(3)を式(2)に代入し、仮定(2)〔 $\rho_L = \rho_V \approx \rho_L$ 〕を考慮すると、運動方程式は次式のようになる。

$$\begin{aligned} \rho_V \left(u \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial \varphi} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) \\ = g \rho_L \left(1 + \frac{4 U_\infty^2}{g R} \cos \varphi \right) \sin \varphi + \mu_V \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \end{aligned} \quad (4)$$

ただし、式(4)は液体の流れが加速される領域、つまり式(3)において $(dP_L / d\varphi) < 0$ となる φ の範囲に対してのみ適用し、 $(dP_L / d\varphi) = 0$ となる φ の値を近似的にはく離点 φ_s と定める。すなわち式(3)から、はく離の条件として次式が得られる。

$$1 + \frac{4 U_\infty^2}{g R} \cos \varphi_s = 0, \quad \left\{ \varphi_s = \cos^{-1} \left(-\frac{g R}{4 U_\infty^2} \right) \right\} \quad (5)$$

なお、はく離点は厳密には壁面における速度勾配が零つまり、 $(\partial u / \partial y)_{y=0} = 0$ の条件から決定されるべきであるが、著者の一人が行った詳細な検討⁷⁾によれば、大気圧の水、エタノールおよびヘキサンに対して、はく離点を式(5)で近似しても実際上差しつかえない。

エネルギー式：

$$\rho_V c_{pV} \left(u \frac{1}{R} \frac{\partial T}{\partial \varphi} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = \lambda_V \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (6)$$

境界条件と気液界面での条件を次のように与える。

$$y = 0 : u = v = 0 \quad (7)$$

$$T = T_w \quad (8)$$

$$y = \delta : u = u_\delta = 2 U_\infty \sin \varphi \quad (9)$$

$$T = T_s \quad (10)$$

$$-\lambda_V \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_\delta = l \rho_V \frac{1}{R} \frac{d}{d\varphi} \int_0^\delta u dy \quad (11)$$

以上の基礎式(1)、(4)、(6)および条件式(7)~(11)を積分境界層の方法で解く。

式(4)の左辺に連続の式(1)を適用して、式(4)を y に関して 0 から δ の範囲で積分し、連続の式(1)を y に関して 0 から δ の範囲で積分して得られる v_δ を代入すると、式(4)の積分形が次のように得られる。

$$\begin{aligned} \rho_V \frac{1}{R} \frac{d}{d\varphi} \int_0^\delta u^2 dy - \rho_V u_\delta \frac{1}{R} \frac{d}{d\varphi} \int_0^\delta u dy \\ = g \rho_L \delta \left(1 + \frac{4 U_\infty^2}{g R} \cos \varphi \right) \sin \varphi \\ + \mu_V \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_\delta - \mu_V \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_0 \end{aligned} \quad (12)$$

式(6)に関しても同様に積分し、気液界面でのエネルギー流束の連続性、式(11)、を代入すると次式が得られる。

$$\rho_V \frac{1}{R} \frac{d}{d\varphi} \int_0^\delta u \left\{ l + c_{pV}(T - T_s) \right\} dy$$

$$= -\lambda_V \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_0 \quad (13)$$

次に、速度 u と温度 T に関して、それぞれ次のような流動方向 (φ 方向) に相似な分布形を仮定する。

$$u = u_c \cdot G(\eta) \quad (14)$$

$$T - T_s = \Delta T_s \cdot H(\eta) \quad (15)$$

$$\eta \equiv y / \delta \quad (16)$$

積分された運動方程式、式(12)、と積分されたエネルギー式、式(13)、に式(14)~(16)を適用すると、次の δ と u_c に関する連立常微分方程式が得られる。

$$\beta_1 \frac{1}{R} \frac{d(\delta u_c^2)}{d\varphi} - \beta_2 u_c \frac{1}{R} \frac{d(\delta u_c)}{d\varphi}$$

$$= g \left(\frac{\rho_L}{\rho_V} \right) \delta \left(1 + \frac{4 U_\infty^2}{g R} \cos \varphi \right) \sin \varphi$$

$$+ \nu_V (\gamma_2 - \gamma_1) \frac{u_c}{\delta} \quad (17)$$

$$\left(\beta_3 + \beta_2 \frac{l}{c_{pV} \Delta T_s} \right) \frac{1}{R} \frac{d(\delta u_c)}{d\varphi} = -\gamma_3 \frac{a_V}{\delta} \quad (18)$$

ここに、 $\beta_1 \sim \beta_3$ および $\gamma_1 \sim \gamma_3$ は速度プロファイル $G(\eta)$ と温度プロファイル $H(\eta)$ とから決定される数値定数で次のように定義される。

$$\beta_1 \equiv \int_0^1 \{ G(\eta) \}^2 d\eta \quad (19)$$

$$\beta_2 \equiv \int_0^1 G(\eta) d\eta \quad (20)$$

$$\beta_3 \equiv \int_0^1 \{ G(\eta) H(\eta) \} d\eta \quad (21)$$

$$\gamma_1 \equiv \frac{dG}{d\eta} \Big|_0 \quad (22)$$

$$\gamma_2 \equiv \frac{dG}{d\eta} \Big|_1 \quad (23)$$

$$\gamma_3 \equiv \frac{dH}{d\eta} \Big|_0 \quad (24)$$

式(17)と(18)の連立微分方程式は、式(18)を形式的に積分して得られる u_c を式(17)に代入することにより、次の δ に関する微積分方程式に変換される。

$$\frac{A^2 \beta_1}{R \delta^2} \left\{ \left\{ 2 + \frac{(\gamma_1 - \gamma_2)}{\beta_1} \frac{R \nu_V}{A} \right\} \frac{d\delta}{d\varphi} \int_0^\delta \frac{1}{\delta} d\varphi \right\}$$

$$\times \int_0^\delta \frac{1}{\delta} d\varphi$$

$$= g \left(\frac{\rho_L}{\rho_V} \right) \delta \left(1 + \frac{4 U_\infty^2}{g R} \cos \varphi \right) \sin \varphi$$

$$+ \frac{2 A \beta_2}{R \delta} U_\infty \sin \varphi \quad (25)$$

ここに、 A は次式で定義される定数である。

$$A \equiv \frac{(-\gamma_3 / \beta_2) (a_V R) (c_{pV} \Delta T_s / l)}{1 + (\beta_3 / \beta_2) (c_{pV} \Delta T_s / l)} \quad (26)$$

式(25)の左辺を線形化するため次のように仮定する。

$$\left\{ 2 + \frac{(\gamma_1 - \gamma_2)}{\beta_1} \frac{R \nu_V}{A} \right\} \gg \frac{d\delta}{d\varphi} \int_0^\delta \frac{1}{\delta} d\varphi \quad (27)$$

この仮定の妥当性に関しては付録 I で検討する。式(27)を式(25)に適用して、両辺を φ で微分すると次の Δ に関する微分方程式が得られる。

$$\left\{ \frac{2 \beta_2}{(\gamma_1 - \gamma_2) (-\gamma_3)} \right\}$$

$$\times \left\{ \frac{Ga \cdot K}{Sp^* \left(1 + \frac{2 \beta_1 (-\gamma_3)}{\beta_2 (\gamma_1 - \gamma_2)} Sp^* \right)} \right\}$$

$$\times \frac{d}{d\varphi} \left\{ \Delta^3 (1 + 8 Fr \cos \varphi) \sin \varphi \right\}$$

$$+ \left\{ \frac{4 \beta_2}{(\gamma_1 - \gamma_2)} \right\} \left\{ \frac{(Ga \cdot Fr)^{1/2}}{\left(1 + \frac{2 \beta_1 (-\gamma_3)}{\beta_2 (\gamma_1 - \gamma_2)} Sp^* \right)} \right\}$$

$$\times \frac{d}{d\varphi} (\Delta \sin \varphi) = \frac{1}{\Delta} \quad (28)$$

ここに

$$\Delta \equiv \delta / D \quad (29)$$

$$Fr \equiv U_\infty^2 / (g D) \quad (\text{フルード数}) \quad (30)$$

$$Ga \equiv g D^3 / \nu_V^2 \quad (\text{ガリレオ数}) \quad (31)$$

$$K \equiv \rho_L / \rho_V \quad (\text{密度比}) \quad (32)$$

$$Sp^* \equiv c_{pV} \Delta T_s / (Pr_V l^*) \quad (\text{修正無次元過熱度}) \quad (33)$$

であり、 l^* は速度と温度のプロファイルから定まる修正蒸発潜熱で次式で定義される。

$$l^* \equiv l \left\{ 1 + (\beta_3 / \beta_2) c_{pV} \Delta T_s / l \right\} \quad (34)$$

式(28)を、前方岐点 ($\varphi = 0$) において Δ が有限であることを考慮して、無次元パラメータ Fr , Ga , K および Sp^* の指定された値に対して解けば、熱流束 q_{co} およびヌセルト数 Nu_{co} は次のように計算される。

局所熱流束：

$$q_{co, \varphi} = -\lambda_V \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_0 = -\lambda_V \frac{\Delta T_s}{\delta} \frac{dH}{d\eta} \Big|_0$$

$$= \frac{(-\gamma_3) \lambda_V \Delta T_s}{D \cdot \Delta} \quad (35)$$

局所ヌセルト数:

$$Nu_{co,\varphi} = \frac{q_{co,\varphi} D}{\lambda_V \Delta T_s} = \frac{(-\gamma_3)}{\Delta} \quad (36)$$

平均ヌセルト数:

$$\begin{aligned} \overline{Nu}_{co} &\equiv \frac{1}{\pi} \int_0^\pi Nu_{co,\varphi} d\varphi \\ &= (-\gamma_3) \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{1}{\Delta} d\varphi \end{aligned} \quad (37)$$

さて、式(28)より Δ は4個の無次元パラメータ、 K 、 Ga 、 Fr および Sp^* で決定されるから、式(37)より、平均ヌセルト数 \overline{Nu}_{co} はこれらの4個の無次元パラメータの関数となるはずである。ところが、式(28)を厳密に解くためには数値積分を必要とし、 \overline{Nu}_{co} に及ぼす各パラメータの依存性を明確にするには、各パラメータに対して広い範囲で数値計算を行わなければならない、その結果は線図でしか表現できない。本解析の目的は、測定値の整理に際して十分な精度を有する対流熱伝達の整理式を作成することにあるから、ここでは解の精度を多少犠牲にはするが、式(28)の近似理論解(解析解)を得ることを検討する。

式(28)の左辺において第2項は第1項に比して小さいと仮定して解けば次の解を得る。

$$\begin{aligned} \Delta &= \left[\frac{(\gamma_1 - \gamma_2)(-\gamma_3)}{2\beta_2} \right] \\ &\times \left[\frac{Sp^* \left(1 + \frac{2\beta_1(-\gamma_3)}{\beta_2(\gamma_1 - \gamma_2)} Sp^* \right)}{Ga \cdot K} \right]^{1/4} \\ &\times \left[\frac{4}{3} \frac{\int_0^{\varphi_s} \left\{ (1 + 8 Fr \cos \theta) \sin \theta \right\}^{1/3} d\theta}{\left\{ (1 + 8 Fr \cos \varphi) \sin \varphi \right\}^{4/3}} \right]^{1/4} \end{aligned} \quad (38)$$

式(28)は、もともと式(12)から誘導されたものであり、式(28)の左辺第1項は式(12)の右辺第1項に、式(28)の左辺第2項は式(12)の左辺第2項に相当する。すなわち、式(28)の左辺第1項は、蒸気の浮力と、液体のポテンシャル流に起因して生じる流動方向の圧力勾配による力との和であり、第2項は、気液界面で発生した蒸気が蒸気膜内に持ち込む流動方向の運動量である。著者の一人が行った検討⁷⁾によれば、大気圧の水、エタノールおよびヘキサンに対して(密度比 $K \geq 200$)、蒸気膜内の速度分布は、フルード数 Fr の大きさにかかわらず、常に最大値を有する上に凸の放物線であり、蒸気膜内

の最大速度は、はく離点付近を除けば、気液界面の速度よりかなり大きい(約10倍以上)。つまり、このような条件下では、液体のポテンシャル流に起因して生じる圧力勾配による力が蒸気膜内の流動を支配し、発生した蒸気の気液界面における運動量が蒸気の流れに及ぼす効果は小さいと考えられる。なお、この仮定に関しては付録Ⅱでさらに定量的な検討を加える。

式(38)からヌセルト数は次のように計算される。

(i)局所ヌセルト数: $Nu_{co,\varphi}$

$$\begin{aligned} Nu_{co,\varphi} &= \left[\frac{2\beta_2 \gamma_3^3}{(\gamma_2 - \gamma_1)} \right]^{1/4} \\ &\times \left[\frac{Ga \cdot K}{Sp^* \left(1 + \frac{2\beta_1 \gamma_3}{\beta_2(\gamma_2 - \gamma_1)} Sp^* \right)} \right]^{1/4} \\ &\times \left[\frac{3}{4} \frac{\left\{ (1 + 8 Fr \cos \varphi) \sin \varphi \right\}^{4/3}}{\int_0^{\varphi_s} \left\{ (1 + 8 Fr \cos \theta) \sin \theta \right\}^{1/3} d\theta} \right]^{1/4} \end{aligned} \quad (39)$$

前方岐点($\varphi = 0$)では、次のようになる。

$$\begin{aligned} Nu_{co,\varphi=0} &= \left[\frac{2\beta_2 \gamma_3^3}{(\gamma_2 - \gamma_1)} \right]^{1/4} \\ &\times \left[\frac{Ga \cdot K (1 + 8 Fr)}{Sp^* \left(1 + \frac{2\beta_1 \gamma_3}{\beta_2(\gamma_2 - \gamma_1)} Sp^* \right)} \right]^{1/4} \end{aligned} \quad (40)$$

(ii)平均ヌセルト数: \overline{Nu}_{co}

$$\begin{aligned} \overline{Nu}_{co} &= \left[\frac{2\beta_2 \gamma_3^3}{(\gamma_2 - \gamma_1)} \right]^{1/4} \\ &\times \left[\frac{Ga \cdot K}{Sp^* \left(1 + \frac{2\beta_1 \gamma_3}{\beta_2(\gamma_2 - \gamma_1)} Sp^* \right)} \right]^{1/4} I_{HC}(Fr) \end{aligned} \quad (41)$$

ここに $I_{HC}(Fr)$ はフルード数 Fr のみで定まる関数で次式で与えられる。

$$\begin{aligned} I_{HC}(Fr) &\equiv \frac{1}{\pi} \times \\ &\int_0^{\varphi_s} \left[\frac{3}{4} \frac{\left\{ (1 + 8 Fr \cos \varphi) \sin \varphi \right\}^{4/3}}{\int_0^{\varphi_s} \left\{ (1 + 8 Fr \cos \theta) \sin \theta \right\}^{1/3} d\theta} \right]^{1/4} d\varphi \end{aligned} \quad (42)$$

式(42)の定積分の上限の φ_s は、はく離点であり、式(5)から次のように計算される。

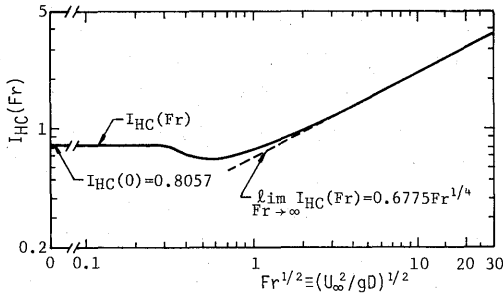


Fig. 2 Numerical evaluation of the function, $I_{HC}(Fr)$

$$\begin{cases} 0 \leq Fr \leq 1/8 & : \varphi_s = \pi \\ 1/8 < Fr & : \varphi_s = \cos^{-1} \{-1 / (8 Fr)\} \end{cases} \quad (43)$$

式(42)の $I_{HC}(Fr)$ の定積分を数値的に評価した結果を Fig. 2 に実線で示す。なお、 $Fr = 0$ (体積力対流) および $Fr \rightarrow \infty$ (強制対流支配) の場合の漸近関係は次のようになる。

$$(i) \quad Fr = 0 : I_{HC}(0) = 0.8057 \quad (44)$$

$$(ii) \quad Fr \rightarrow \infty : I_{HC}(Fr) = 0.6775 Fr^{1/4} \quad (45)$$

式(44)と(45)に対応する平均ヌセルト数はそれぞれ次のようになる。

(i) $Fr = 0$ (体積力対流) の場合

$$\begin{aligned} \overline{Nu}_{co} &= 0.8057 \left[\frac{2\beta_2 \gamma_3^3}{(\gamma_2 - \gamma_1)} \right]^{1/4} \\ &\times \left[\frac{Ga \cdot K}{Sp^* \left\{ 1 + \frac{2\beta_1 \gamma_3}{\beta_2 (\gamma_2 - \gamma_1)} Sp^* \right\}} \right]^{1/4} \end{aligned} \quad (46)$$

(ii) $Fr \rightarrow \infty$ (強制対流支配) の場合

$$\begin{aligned} \overline{Nu}_{co} &= 0.6775 \left[\frac{2\beta_2 \gamma_3^3}{(\gamma_2 - \gamma_1)} \right]^{1/4} \\ &\times \left[\frac{Ga \cdot K \cdot Fr}{Sp^* \left\{ 1 + \frac{2\beta_1 \gamma_3}{\beta_2 (\gamma_2 - \gamma_1)} Sp^* \right\}} \right]^{1/4} \end{aligned} \quad (47)$$

3. 理論解の検討

3. 1 速度プロファイルと温度プロファイルの選択

前章で得られた蒸気膜厚さの理論解およびそれから導かれる平均ヌセルト数の計算式には定数 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ および $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ が含まれているが、これらの値は速度プロファイル $G(\eta)$ と温度プロファイル $H(\eta)$ の関数形を指定することにより確定する。プロファイル $G(\eta)$ と $H(\eta)$ に対して、Table 1 に示すように、それ

$G(\eta) \backslash H(\eta)$	$\eta - \eta^2$	$2\eta - \eta^2$
$(1 - \eta)$	CASE A	CASE B
$(1 - \eta)^2$	CASE C	CASE D

Table 1 Combinations of velocity and temperature profiles

ぞれ2種類の関数を仮定し、あわせて4通りの組み合わせ (これらを、Table 1 のように CASE A, B, C および D と呼ぶ) に関して検討する。速度プロファイル $(\eta - \eta^2)$ と $(2\eta - \eta^2)$ は、それぞれ壁面で速度が零の条件を満足し、気液界面では、前者は速度が零、後者はせん断力が零である。一方、温度プロファイル $(1 - \eta)$ は蒸気膜内の熱伝達を熱伝導のみと考えた場合の直線温度分布を示す。対流がある場合には温度分布は直線とはならない。このことを表現する関数として $(1 - \eta)^2$ を採用した。Table 1 に示す4通りの組合せ (A, B, C, D) に対して、式(41)の平均ヌセルト数および式(33)の修正無次元過熱度 Sp^* は次のように計算される。

$$\overline{Nu}_{co} = k_1 \left[\frac{Ga \cdot K}{Sp^* (1 + k_2 Sp^*)} \right]^{1/4} I_{HC}(Fr) \quad (48)$$

$$Sp^* \equiv c_{pV} \Delta T_s / \{ Pr_V l (1 + k_3 c_{pV} \Delta T_s / l) \} \quad (49)$$

ここに

$$k_1 \equiv \{ 2\beta_2 \gamma_3^2 / (\gamma_2 - \gamma_1) \}^{1/4} \quad (50)$$

$$k_2 \equiv 2\beta_1 \gamma_3 / \{ \beta_2 (\gamma_2 - \gamma_1) \} \quad (51)$$

$$k_3 \equiv \beta_3 / \beta_2 \quad (52)$$

であり、CASE A, B, C, D に対する k_1, k_2 および k_3 の値を Table 2 に示す。

さて、速度プロファイルと温度プロファイルの4通りの組合せの中から最適な組合せを選択するために式(48)を

CASE	k_1	k_2	k_3
A	0.63894	0.2	0.5
B	0.90360	0.8	0.375
C	1.0746	0.4	0.3
D	1.5197	1.6	0.2

Table 2 Numerical values of constants k_1 , k_2 and k_3

次のように書きかえる。

$$\frac{\overline{Nu}_{co}}{[GaK/Sp]^{1/4} I_{HC}(Fr)} = k_1 \left[\frac{(1 + k_3 Pr_V Sp)^2}{1 + (k_2 + k_3 Pr_V) Sp} \right]^{1/4} \quad (53)$$

ここに、 Sp は無次元過熱度で次式で定義される。

$$Sp \equiv c_{pV} \Delta T_s / (Pr_V l) \quad (54)$$

式(53)の右边を CASE A, B, C, D に対して計算し、縦軸に式(53)の左边を、横軸に式(54)の Sp をとって示したのが Fig. 3 である。ここで、 Pr_V の値は、Bromley

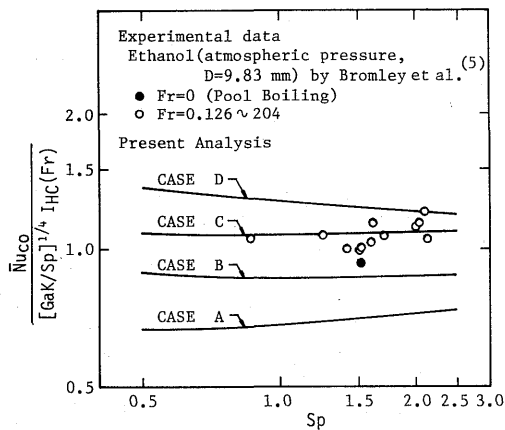


Fig. 3 Comparison of the present analysis with experimental data by Bromley et al.⁵⁾

ら⁵⁾の大気圧のエタノールの測定値と比較するために $Pr_V = 0.82$ にとってある。Fig. 3 にプロットしてある ●印および○印は、Bromley⁵⁾の直径 $D = 9.83$ mm の水平円柱から大気圧のエタノールへの対流熱伝達の測定値である。Fig. 3 から分るように、理論解は

CASE C の場合に Bromley⁵⁾の測定値と約±13%の精度で一致している。なお、プールの膜沸騰 ($Fr = 0$) に対する Nishikawa²⁾の解析によれば、やはり CASE C の場合に理論と測定値とがよく一致している。したがって、本研究では、速度と温度のプロファイルに対して CASE C の組合せを採用することにする。すなわち、平均ヌセルト数は次のようになる。

$$\overline{Nu}_{co} = 1.0746 \left[\frac{Ga \cdot K}{Sp^* (1 + 0.4 Sp^*)} \right]^{1/4} \times I_{HC}(Fr) \quad (55)$$

$$Sp^* \equiv c_{pV} \Delta T_s / \{ Pr_V l (1 + 0.3 c_{pV} \Delta T_s / l) \} \quad (56)$$

3. 2 対流熱伝達の暫定整理式

式(55)で Fr 数の影響をみるために、横軸に Fr 数の $1/2$ 乗をとって示したのが Fig. 4 である。Fig. 4 には、Bromley⁵⁾のエタノールの測定値と Yilmaz-Westwater⁶⁾の R-113 の測定値をプロットしている。Fig. 4 から分るように Bromley⁵⁾のエタノールの測定値は理論解、式(55)と(56)、とよく一致しているが、式(55)に含まれる関数 $I_{HC}(Fr)$ は Fig. 2 に示すように線図で提供されているため、式(55)の形式は実用的には不便である。そこで、 $I_{HC}(Fr)$ の近似式として、 $Fr = 0$ と $Fr \rightarrow \infty$ における漸近関係、式(44)および式(45)、との整合性および前方岐点における理論解、式(40)、の Fr 数への依存性を考慮して、次のように定めた。

$$I_{HC}(Fr) = 0.8057 (1 + 0.5 Fr)^{1/4} \quad (57)$$

式(57)で理論解を近似した結果を Fig. 4 に破線で示す。Bromley⁵⁾の測定値は破線で示す式(57)の近似解ともよく一致している。 $I_{HC}(Fr)$ として近似式(57)を採用すると、平均ヌセルト数は次のような簡単な関数形で表現される。

$$\overline{Nu}_{co} = 0.8658 \left[\frac{Ga \cdot K (1 + 0.5 Fr)}{Sp^* (1 + 0.4 Sp^*)} \right]^{1/4} \quad (58)$$

なお、Fig. 4 に示すように、Yilmaz-Westwater⁶⁾の大気圧の R-113 のデータは、強制対流支配域で縦軸の値が著者らの理論解より約 3 ~ 4 倍高くなっている。Yilmaz-Westwater⁶⁾の実験では、(i)円柱の直径は $D = 6.35$ mm とやや小さいこと、(ii)大気圧の R-113 の蒸発潜熱は小さく (大気圧エタノールの約 $1/4$) そのため蒸気膜が厚くなりやすいこと、および(iii)液体の近寄り速度が大きいこと ($U_\infty = 2.4 \sim 6.8$ m/s) のために気液界面が振動したり蒸気膜内の流れが乱流になっていると推測されるが、本解析では、気液界面は滑らか

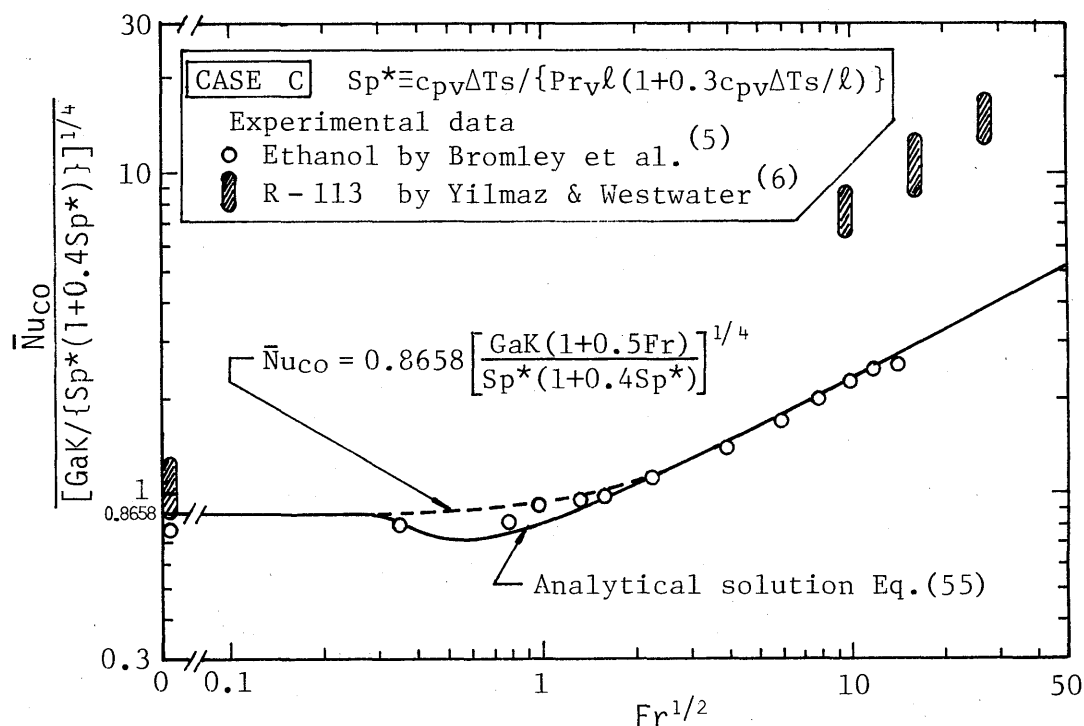


Fig. 4 Correlation of heat transfer

で蒸気の流れを層流境界層と仮定していることおよびはく離点下流での熱伝達の寄与を考慮していないことが本解析とR-113の測定値との大きな隔たりの原因と考えられる。

現状では測定値が少ないので一般的な整理式の提案は差し控えるが、 Fr 数の小さい領域におけるBromleyら⁵⁾のエタノールの測定値をよく表現する式(5)またはその近似式(6)を、暫定的な整理式として推奨する。

4. むすび

水平円柱から上向きに直交して流れる飽和液体への膜沸騰熱伝達を、体積力対流と強制対流とが共存した対流熱伝達問題として取り扱い、とくに蒸気膜に関する運動方程式中の慣性項とエネルギー式中の対流項を考慮して、積分境界層の方法で解析し、Bromleyら⁵⁾のエタノールの測定値と一致する理論解およびその近似式を得た。現状では測定値が少ないので、本解析で得られた式(5)およびその近似式(6)を暫定的な整理式として提案するが、今後、実験データが蓄積された時点で、本解析で得られた整理式の妥当性が明らかにされることを期待するとともに、本理論解析と隔たりの大きい

Yilmaz-Westwater⁶⁾のR-113の測定値を整理する理論の展開も必要とされる。

参考文献

- 1) Bromley, L. A.; Chem. Eng. Progr., 46 (1950), 221.
- 2) Nishikawa, K. et al.; Int. J. Heat Mass Transfer, 15 (1972), 853.
- 3) Epstein, M. and Hauser, G. M.; Int. J. Heat Mass Transfer, 23 (1980), 179.
- 4) Witte, L. C. and Orozco, J.; Trans. ASME, J. Heat Transfer, 106 (1984), 191.
- 5) Bromley, L. A. et al.; Ind. Eng. Chem., 45 (1953), 2639.
- 6) Yilmaz, S. and Westwater, J. W.; Trans. ASME, J. Heat Transfer, 102 (1980), 26.
- 7) 伊藤, 西川, 茂地; 日本機械学会論文集 (B編), 47 (1981), 666.

[付録 I : 式(7)の妥当性について]

式(7)の左辺は本文の無次元パラメータを用いて書き直すと

$$2 + \frac{\beta_2}{\beta_1} \frac{(\gamma_1 - \gamma_2)}{(-\gamma_3)} \frac{1}{Sp^*}$$

となる。CASE C の場合の β_1 , β_2 および $\gamma_1 \sim \gamma_3$ の値を代入すると、式(27)の左辺は次のように書かれる。

$$2 + 5/Sp^*$$

一方、式(27)の右辺の大きさを評価するために本解析で最終的に得られた解、式(38)を使う。Fig. A-1は、式

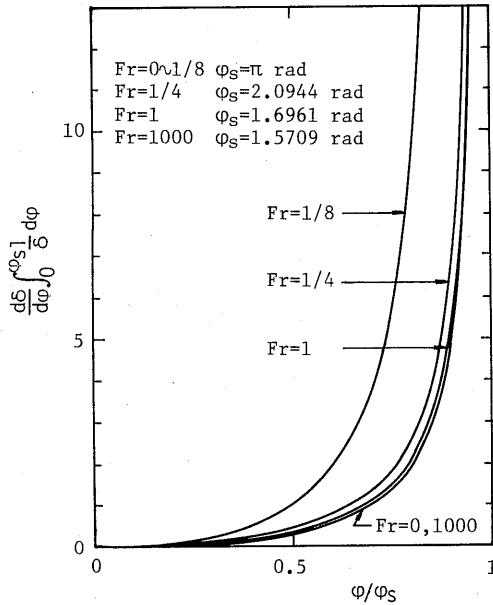


Fig. A-1

(27)の右辺を CASE C に対して計算した結果である。Bromleyら⁵⁾の大気圧のエタノールでは、 $Sp^* \approx 1$ であるから式(27)の左辺の大きさは7程度である。したがって、Fig. A-1より、式(27)の仮定は、 $0 \leq \varphi/\varphi_s \leq 0.5$ の前方岐点付近では十分満足されていることが分る。 $\varphi/\varphi_s > 0.5$ の領域、とくに $(d\delta/d\varphi)$ が無大となるのは離点($\varphi/\varphi_s = 1$)、では、式(27)の仮定は満足されないが、全体の熱伝達を支配するのは前方岐点での局所熱伝達であることを考えると、式(27)のように仮定しても、平均熱伝達係数の評価に際して大きい誤差は生じないと考えられる。

〔付録Ⅱ：式(38)の精度について〕

前方岐点($\varphi=0$)における蒸気膜厚さが全体の熱伝達を支配すると考えられるので、ここでは簡単なた

め前方岐点での Δ の解について検討する。

式(28)の $\varphi=0$ 近傍の解(厳密解)を次のように仮定する。

$$\Delta = a_0 + a_2 \varphi^2 + a_3 \varphi^3 + \dots \quad (A-1)$$

式(A-1)を式(28)に代入して、 φ^0 次の恒等式より a_0 を決定すると次のようになる。

$$a_0 \equiv \Delta_{\varphi=0} = \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{1/4} \left[\sqrt{1+\varepsilon} - \sqrt{\varepsilon}\right]^{1/2} \quad (A-2)$$

ここに

$$\begin{aligned} \alpha &\equiv \left\{ \frac{2\beta_2}{(\gamma_1 - \gamma_2)(-\gamma_3)} \right\} \\ &\times \left\{ \frac{Ga \cdot K(1 + 8Fr)}{Sp^* \left(1 + \frac{2\beta_1(-\gamma_3)}{\beta_2(\gamma_1 - \gamma_2)} Sp^*\right)} \right\} \quad (A-3) \\ \varepsilon &\equiv \left\{ \frac{2\beta_2(-\gamma_3)}{(\gamma_1 - \gamma_2)} \right\} \\ &\times \left\{ \frac{Sp^* \cdot Fr}{K \left(1 + \frac{2\beta_1(-\gamma_3)}{\beta_2(\gamma_1 - \gamma_2)} Sp^*\right) (1 + 8Fr)} \right\} \quad (A-4) \end{aligned}$$

である。式(28)で、左辺第2項を第1項に比して省略して解いた前方岐点解 $\Delta_{\varphi=0}$ は、式(A-2)で $\varepsilon=0$ とにおいて得られる。

$$\Delta_{\varphi=0} = (1/\alpha)^{1/4} \quad (A-5)$$

前方岐点において Δ' と Δ の比をとると

$$(\Delta'/\Delta)_{\varphi=0} = \{\sqrt{1+\varepsilon} + \sqrt{\varepsilon}\}^{1/2} \quad (A-6)$$

となる。式(28)で左辺の第2項を第1項に比して省略することによって得られた近似解、式(A-5)の精度を、式(A-6)から評価する。本研究で対象とする沸騰液の場合には、 $Sp^* \approx 1$, $K \geq 200$, $0 \leq Fr < \infty$ であるから、式(A-4)の ε の大きさは 10^{-3} 以下である。 $\varepsilon=10^{-3}$ の場合に、 $(\Delta'/\Delta)_{\varphi=0} \approx 1.02$ であるから、式(38)の Δ の解は微分方程式(28)の厳密解より高々+2%大きくなる。つまり、式(38)の解から得られる局所ヌセルト数の値は、式(28)の厳密解と比較してわずか(2%程度)小さくなる。