面内曲げを受ける扇形板の座屈特性

高橋和雄*・小西保則*
夏秋義広**・平川倫明***

Buckling of an Annular Sector Plate Subjected to Inplane Moment

by

Kazuo Takahashi*　Yasunori Konishi*
Yoshihiro Natsuaki**　and Michiaki Hirakawa***

Buckling of an annular sector plate subjected to equal and opposite moments at the radial edges examined. The governing differential equation of the plate is solved by a Galerkin method. Buckling moments and buckling modal shapes are obtained for annular sector plates with radial edges simply supported and arbitrary boundary conditions along the circular edges. Numerical results are shown for various boundary conditions along the circular edges and geometrical parameters of the annular sector plate and are compared with the buckling moments of the rectangular plate.

1．はじめに

面内曲げを受ける扇形板は，曲線構造物の基本部材として，アーチ系橋梁の腹板やラーメン構造の隅角部などに多用されている。扇形板の静的曲げや振動問題については数多くの研究[1)~4)]が見受けられる。しかし，座屈問題に関しては，きわめて少なく，わずかに直線辺が単純支持された扇形板が一様な圧縮力を受ける場合を取扱った Rubin の研究[5)]，周辺固定された扇形板の円周方向に一様な圧縮力が作用する場合を取扱った Srinivasan らの研究[6)]が見受けられる程度である。面内曲げを受ける扇形板を等価な長方形板に置換しているものと思われるが，力学的性質を抜きにした置換は場合によっては実情と離れた予測となりかねない。

限界状態設計法への移行を考えると，構造要素の座屈特性をモデルに忠実に解析していくことが望まれる。さらに，扇形板の動的安定性を調べるためには，まず，静的曲げを受ける場合の座屈特性を明らかにしておくことが必要である。

そこで，本研究は，面内曲げを受ける直線辺が単純支持される扇形板の座屈特性を，二次元弾性論から得られる面内力を受ける平板の平衡方程式を用いて，解析するものである。数値解析において，種々の境界条件，形状パラメーターのもとに扇形板の特性を明らかにし，長方形板の場合と比較・検討するものである。

2．基礎式および境界条件

(1)面内曲げによる面内力

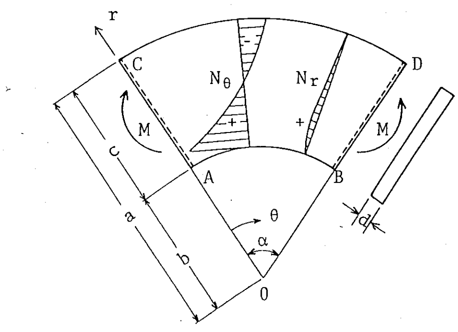

Fig. 1　Geometry and co－ordinate system

昭和62年9月30日受理
*土木工学科（Department of Civil Engineering）
**大学院博士課程海洋環境建設学専攻（Graduate Student, Marine Environmental Production and Construction Engineering）
***大学院修士課程土木工学専攻（Graduate Student, Department of Civil Engineering）

Fig. 1に示すような外径 a，内径 b，開き角αの扇形板を考える。この扇形板の直線辺 AC， BD に面内曲げモーメントMが作用している。座標系として，図に示す極座標系（r，θ）を採用する。

二次元弾性論によれば，平板中央面の面内力 N_r, N_θ, $N_{r\theta}$の間に次の関係が成立する。

$$\frac{\partial N_r}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial N_{r\theta}}{\partial \theta}+\frac{N_r-N_\theta}{r}=0 \tag{1}$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial N_\theta}{\partial \theta}+\frac{\partial N_{r\theta}}{\partial r}+\frac{2N_{r\theta}}{r}=0 \tag{2}$$

ここに，N_r, N_θ:r方向，θ方向の面内力，$N_{r\theta}$:せん断力

次式によって定義される応力関数Fを導入すれば，式(1), (2)は恒等的に満足される。

$$N_r=\frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} \tag{3}$$

$$N_\theta=\frac{\partial^2 F}{\partial r^2} \tag{4}$$

$$N_{r\theta}=-\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial \theta}\right) \tag{5}$$

平板の中央面内の半径および接線方向の変位成分をu, vとすると，ひずみ成分は次のように表わされる。

$$\varepsilon_r=\frac{\partial u}{\partial r} \tag{6}$$

$$\varepsilon_r=\frac{u}{r}+\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta} \tag{7}$$

$$\gamma_{r\theta}=\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{\partial v}{\partial r}-\frac{v}{r} \tag{8}$$

ここに，ε_r, ε_θ：r，θ方向のひずみ，$\gamma_{r\theta}$:せん断ひずみ

式(6), (7), (8)より，u, v を消去すれば，ひずみの適合条件式が次のように得られる。

$$\frac{\partial^2\varepsilon_\theta}{\partial r^2}+\frac{\partial^2\varepsilon_r}{r^2\partial\theta^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial\varepsilon_\theta}{\partial r}-\frac{1}{r}\frac{\partial\varepsilon_r}{\partial r}=\frac{1}{r}\frac{\partial^2\gamma_{r\theta}}{\partial r\partial\theta}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial\gamma_{r\theta}}{\partial\theta} \tag{9}$$

一方，ひずみ成分と面内力の関係は次式で与えられる。

$$\varepsilon_r=\frac{1}{Ed}(N_r-\nu N_\theta) \tag{10}$$

$$\varepsilon_\theta=\frac{1}{Ed}(N_\theta-\nu N_r) \tag{11}$$

$$\gamma_\theta=\frac{1}{Gd}N_{r\theta} \tag{12}$$

ここに，E：ヤング率，G：せん断弾性係数，ν：ポアッソン比

式(9)に式，(10), (11), (12)を代入し，式，(3), (4), (5)を用いて変形すれば，応力関数Fに関する基礎微分方程式が次のように得られる。

$$\nabla^4 F=0 \tag{13}$$

ここに，$\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}$

面内曲げを受ける場合には，面内力の分布はθに無関係（軸対称）であるので，式(13)の一般解は，次のように表わされる。

$$F=A\ln r+Br^2\ln r+Cr^2+D \tag{14}$$

こに，A，B，C，D：積分定数

Fig. 1の面内曲げが作用する場合の境界条件は次のとおりである。

円弧辺：$N_r=0$ $(r=b,\ a)$

直線辺：$d\int_b^a N_\theta dr=0$，$d\int_b^a N_\theta r dr=M(\theta=0,\ \alpha)$ (15)

全周辺：$N_{r\theta}=0$ $(r=b,\ a$および$\theta=0,\ \alpha)$

式(14)を式(3), (4), (5)に代入して，式(15)の条件を満足するように積分定数を決定すれば，面内力 N_r, N_θ, $N_{r\theta}$が次のように得られる。

$$N_r=-\frac{4M}{N}\left(\frac{a^2b^2}{r^2}\ln\frac{a}{b}+a^2\ln\frac{r}{a}+b^2\ln\frac{b}{r}\right) \tag{16}$$

$$N_\theta=-\frac{4M}{N}\left(-\frac{a^2b^2}{r^2}\ln\frac{a}{b}+a^2\ln\frac{r}{a}+b^2\ln\frac{a}{r}+a^2-b^2\right) \tag{17}$$

$$N_{r\theta}=0 \tag{18}$$

ここに，$N=(a^2-b^2)^2-4a^2b^2\ (\ln(a/b))^2$

(2)面内曲げを受ける扇形板のたわみの基礎式

微小扇形要素のつりあい式は次のように与えられる。

$$\frac{\partial}{\partial r}(rM_r)+\frac{\partial}{\partial\theta}(M_{r\theta})-M_\theta-rQ_r=0 \tag{19}$$

$$\frac{\partial}{\partial r}(rM_{r\theta})+\frac{\partial}{\partial\theta}(M_\theta)+M_{r\theta}-rQ_\theta=0 \tag{20}$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\left[rN_r\frac{\partial w}{\partial r}+N_{r\theta}\frac{\partial w}{\partial\theta}+rQ_r\right]+\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\frac{1}{r}N_\theta\frac{\partial w}{\partial\theta}+N_{r\theta}\frac{\partial w}{\partial\theta}+Q_\theta\right]=0 \tag{21}$$

ここに，M_r, M_θ:r，θ方向の曲げモーメント，$M_{r\theta}$:ねじりモーメント，w：たわみ

一方，たわみ w とモーメントM_r, M_θ, $M_{r\theta}$との関係は次式で定義される。

$$M_r=-D\left\{\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}+\nu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial\theta^2}\right)\right\} \tag{22}$$

$$M_\theta=-D\left\{\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial\theta^2}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}\right\} \tag{23}$$

$$M_{r\theta}=-D(1-\nu)\left\{\frac{1}{r}\frac{\partial^2 w}{\partial r\partial\theta}-\frac{1}{r^2}\frac{\partial w}{\partial\theta}\right\} \tag{24}$$

ここに，$D=Ed^3/\{12(1-\nu^2)\}$ ：板剛度

式(19), (20)からQ_r, Q_θを求め，これを式(21)に代入し

て，式(22)，(23)，(24)の関係を用いれば，面内力N_r, N_θ, $N_{r\theta}$を受ける平板のたわみの基礎式は次式となる。

$$D\nabla^4 w=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rN_r\frac{\partial w}{\partial r})+\frac{1}{r}\Big\{\frac{\partial}{\partial r}(N_{r\theta}\frac{\partial w}{\partial \theta})+\frac{\partial}{\partial \theta}(N_{r\theta}\frac{\partial w}{\partial \theta})\Big\}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}(\frac{1}{r}N_\theta\frac{\partial w}{\partial r}) \tag{25}$$

面内曲げを受ける場合の面内力はθに無関係であること，および$N_{r\theta}=0$の条件を考慮すると，式(25)は次のように簡略化される。

$$D\nabla^4 w=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rN_r\frac{\partial w}{\partial r})+\frac{1}{r^2}N_\theta\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \tag{26}$$

本論文の展開に必要な換算せん断力V_r ，V_θは次式で表わされる。

$$V_r=Q_r+\frac{1}{\mathrm{r}}\frac{\partial \mathrm{M}_{r\theta}}{\partial \theta}=-D\Big\{\frac{\partial^3 w}{\partial r^3}+\frac{1}{r}\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}-\frac{1}{r^2}\frac{\partial w}{\partial r}+\frac{1}{r^2}(2-\nu)\frac{\partial^3 w}{\partial r\partial \theta^2}-\frac{1}{r^3}(3-\nu)\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}\Big\} \tag{27}$$

$$V_\theta=Q_\theta+\frac{\partial M_{r\theta}}{\partial r}=-D\Big\{\frac{1}{r^3}\frac{\partial^3 w}{\partial \theta^3}+\frac{2}{r^3}(1-\nu)\frac{\partial w}{\partial \theta}+\frac{1}{r}(2-\nu)\frac{\partial^3 w}{\partial r^2\partial \theta}-\frac{1}{r^2}(1-2\nu)\frac{\partial^3 w}{\partial r\partial \theta}\Big\} \tag{28}$$

(3)　境界条件

Fig. 1の扇形板の境界条件は，直線辺（載荷辺）を単純支持とし，円弧辺については，次の3ケースを考える。

直線辺（$\theta=0$，α）

$$w=0,\ M_\theta=0 \tag{29}$$

円弧辺（$r=b,\ a$）

case Ⅰ（単純支持）

$$w=0,\ M_r=0 \tag{30}$$

case Ⅱ（固定）

$$w=0,\ \partial w/\partial r=0 \tag{31}$$

case Ⅲ（自由）

$$M_r=0,\ V_r=0 \tag{32}$$

(4)　無次元化

解析に先立って，変数rを扇形板の外径aを用いて無次元化する。すなわち，

$$\xi=r/a \tag{33}$$

このとき，式(26)は次のように書き改められる。

$$L(w)=\nabla^4 w+\frac{4M}{\bar{N}D}\Big[\frac{1}{\xi}\frac{\partial}{\partial \xi}\Big\{\xi f_1(\xi)\frac{\partial w}{\partial \xi}\Big\}+\frac{1}{\xi^2}f_2(\xi)\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}\Big]=0 \tag{34}$$

ここに$L(w)$:微分演算子，

$\bar{N}=(1-\beta^2)^2-4\beta^2(\ln(1/\beta))^2$,

$\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial \xi^2}+\frac{1}{\xi}\frac{\partial}{\partial \xi}+\frac{1}{\xi^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$,

$f_1(\xi)=\frac{\beta^2}{\xi^2}\ln\frac{1}{\beta}+\ln\xi+\beta^2\ln\frac{\beta}{\xi}$,

$f_2(\xi)=-\frac{\beta^2}{\xi^2}\ln\frac{1}{\beta}+\ln\xi+\beta^2\ln\frac{\beta}{\xi}+1-\beta^2$,

$\beta=b/a$(内外径比)

3．解　法

式(34)は変数係数の微分方程式であるから，厳密解を求めることは不可能である。本論文では，Galerkin法による近似解を求める。すなわち，式(34)の一般解を次のように仮定する。

$$w=\sum_{s=1}a_{sn}W_{sn}(\xi,\ \theta) \tag{35}$$

ここに，a_{sn}:未定定数，W_{sn}:境界条件を満足する座標関数，n＝1，2，……：θ方向半波数

式(35)の座標関数として，扇形板の自由振動の基準関数を用いるものとすれば$W_{sn}(\xi,\ \theta)$は次のように表わされる。

$$W_{sn}(\xi,\ \theta)=R_{sn}(\xi)\sin\alpha_n\theta \tag{36}$$

ここに，$R_{sn}=A_{sn}J_{\alpha n}(k_{sn}\xi)+B_{sn}\mathrm{Y}_{\alpha n}(k_{sn}\xi)+C_{sn}\mathrm{I}_{\alpha n}(k_{sn}\xi)+D_{sn}\mathrm{K}_{\alpha n}(k_{sn}\xi)$,

$A_{sn}, B_{sn}, C_{sn}, D_{sn}$　:境界条件によって定まる定数，$k_{sn}=\sqrt[4]{\rho d a^4\omega_s^{n2}/D}$:$s$次振動の固有値，$J_{\alpha n}$，$Y_{\alpha n}$:$\alpha_n$次の第1種，第2種 Bessel 関数，$I_{\alpha n}$，$k_{\alpha n}$:変形された$\alpha_n$次の第1種，第2種　Bessel　関数，$\alpha_n=n\pi/\alpha$, ω_s^n:固有円振動数

扇形板の基準関数W_{sn}に関して，次式が成り立つ。

$$\nabla^4 W_{sn}=k_{sn}^4 W_{sn} \tag{37}$$

式(36)を式(35)に代入して，式(37)の関係を用いれば，

$$L(w)=\sum_{s=1}a_{sn}k_{sn}^4W_{sn}+\frac{4M}{\bar{N}D}\sum_{s=1}a_{sn}\Big[\frac{1}{\xi}\frac{\partial}{\partial \xi}\Big\{\xi f_1(\xi)\frac{\partial W_{sn}}{\partial \xi}\Big\}+\frac{1}{\xi^2}f_2(\xi)\frac{\partial^2 W_{sn}}{\partial \theta^2}\Big] \tag{38}$$

式(36)は仮定した解で，式(26)の厳密解ではない。したがって，式(38)の右辺は一般にゼロにならない。そこで，仮定した基底関数が不平衡力に対して仕事をしないという条件を用いる。すなわち，微分方程式の近似解法として知られている Galerkin 法に対応する。

つまり，

$$\int_\beta^1\int_0^\alpha L(w)W_{pm}\xi d\xi d\theta=0 \tag{39}$$

ここに，$p=1,2\cdots\cdots$，$m=1,2,\cdots\cdots$

Appendix A に示すような固有振動形の直交性および定積分の演算を部分積分を用いて簡潔にすると，次式が得られる。

$$k_{pn}^4 I_{pn} a_{pn} - (M/D)\Sigma a_{pn} I_{spn} = 0 \tag{40}$$

ここに，$I_{pn}=\int_{\beta}^{1} R_{pn}^2 \xi d\xi$

$$I_{spn}=\frac{4}{N}\int_{\beta}^{1}\left\{\xi f_1(\xi)\frac{dR_{sn}}{d\xi}\frac{dR_{pn}}{d\xi}+\frac{\alpha_n^2}{\xi}f_2(\xi)R_{sn}R_{pn}\right\}d\xi$$

式(40)を行列表示すれば，次のように書き改められる。

$$[\mathrm{I}]\{X\}=(M/D)[G]\{X\} \tag{41}$$

ここに，$[\mathrm{I}]$：単位行列，$[G]$：$I_{jim}/k_{in}^4 I_{in}$を要素とする行列，$\{X\}=\{a_{1n}a_{2n}a_{3n}\cdots\cdots a_{Nn}\}^T$

上式において，$M/D=1/\lambda$とおけば，固有値問題

$$[G]\{X\}=\lambda\{X\} \tag{42}$$

に帰着される。式(42)の固有値λと固有ベクトルXは通常の行列の固有値問題のプログラムを用いて求められる。固有ベクトルを用いて，式(35)より座屈波形が得られる。

式(42)に含まれる形状パラメーターは，扇形板の開き角αと内外径比β（$=b/a$）の２個である。面内曲げを受ける長方形板の座屈特性と比較するために，次式で定義される扇形板の縦横比を導入する。

$$\mu=\frac{\text{平均円弧長}}{\text{載荷辺長}}=\frac{\ell}{c}=\frac{\alpha(1+\beta)}{2(1-\beta)} \tag{43}$$

4．　数値結果

(1)　面内力の分布

Fig. 1に示すように，面内曲げを受ける扇形板の円周方向の面内力N_θの分布形状は，直線を保たない。また，円周方向の面内力N_θの他に，半径方向の面内力N_rも存在する。この事実は，N_θに対応する直線分布を保つ面内力のみを有する長方形板の場合とは根本的に異なる。内外径比βの変化に伴う面内力N_r，N_θの変化をFig. 2に示す。βが小さくなるにしたがって，内径側のN_θの値が急激に増大し，逆に外径側の値が小さくなる。また，半径方向の面内力N_rもβが小さくなるにしたがって増加する。βが１に近い場合，すなわちその形状が長方形板に近い場合には，長方形板の縁応力$N_\theta/d=6M/c^2d$の係数６に漸近する。

このように，内外径比βの変化による面内力の分布性状は，扇形板の座屈特性に影響を及ぼすことが予想される。

(2)解の収束性

本解析では，自由振動の固有振動形を重ね合せて，座屈波形を近似する手法を用いて座屈荷重および座屈波形を求めるものである。数値解析に先立って，本解法の解の収束性を検討する。開き角$\alpha=60°$，縦横比$\mu=1.0$，ポアッソン比$\nu=0.3$の扇形板に対して，採用した項数Nに伴う最低次の座屈固有値の収束状況をFig. 3に示す。case Ⅲの自由の場合には，１項で十分である。case Ⅰ(単純支持)および case Ⅱ(固定)の場合には，５項程度を必要とする。この理由は，case Ⅲの場合は，座屈波形が１次の固有振動形と似ているが，case ⅠおよびⅡでは両者の間に差があるためである。一般に負の座屈固有値の場合の座屈波形の最大値（腹の位置）は固有振動形のそれよりも内径側に寄ってくる。

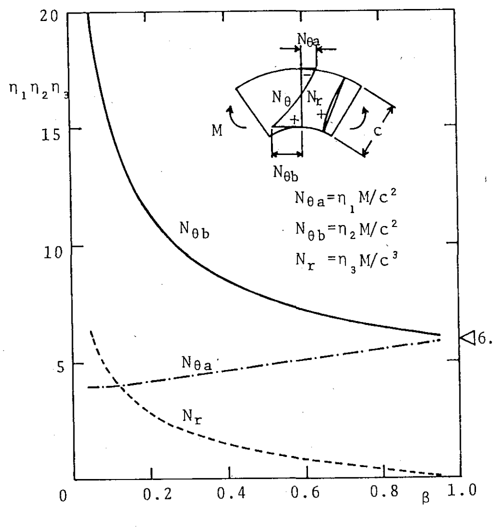

Fig. 2　Maximum inplane force, N_θ and N_r

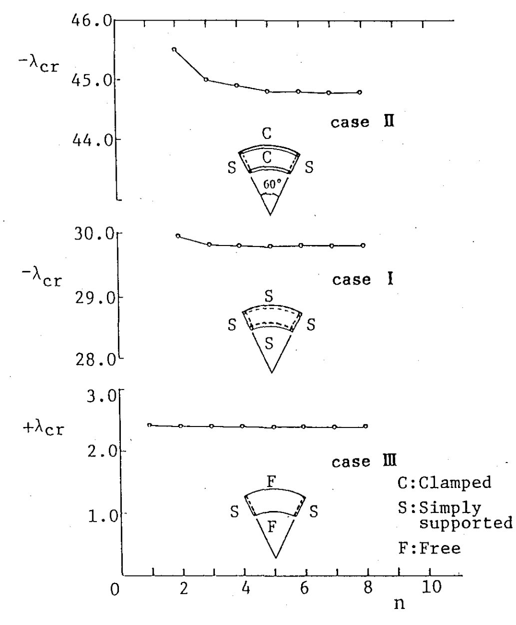

Fig. 3　Convergence of buckling eigenvalue

(3) **座屈解析**

扇形板の座屈特性を明らかにするために，載荷辺の長さcを一定に保って，開き角αを変化させた計算を行い，形状パラメーターである縦横比$\mu=\ell/c$の形でデータの整理を行う。座屈強度の表現法として，長方形板の場合には，応力表示$\sigma_{ck}=k\pi^2D/b^2d$(ここに$k=\frac{6}{\pi^2}\lambda_{cr}$，$b$:載荷辺長，$d$:板厚）の座屈係数$k$を定義している。Fig. 2 に示すように，扇形板では内外径比βによって，面内力N_θの分布形状が異なる。このため，圧縮側の縁応力を内外径比βに対して計算して表示する必要がある。そこで，本論文では，換算せずに応力の合力，すなわち$\lambda_{cr}=M/D$の形で座屈荷重を表現する。

内外経比$\beta=0.8$，0.6，0.4，0.2の各ケースについて，縦横比μの変化に伴う最低次の座屈モーメント$\lambda_{cr}=M/D$を，各境界条件に対して求めれば，Fig. 4～7のとおりである。図中のnはθ方向の半波数を示す。各ケースとも，正，負の曲げモーメントに対する座屈モーメントを併記してある。

まず，Fig. 4に示している$\beta=0.8$すなわち面内力の分布が長方形板に近い場合を考察の対象とする。単純支持（case I），固定（case II）の境界条件とも，

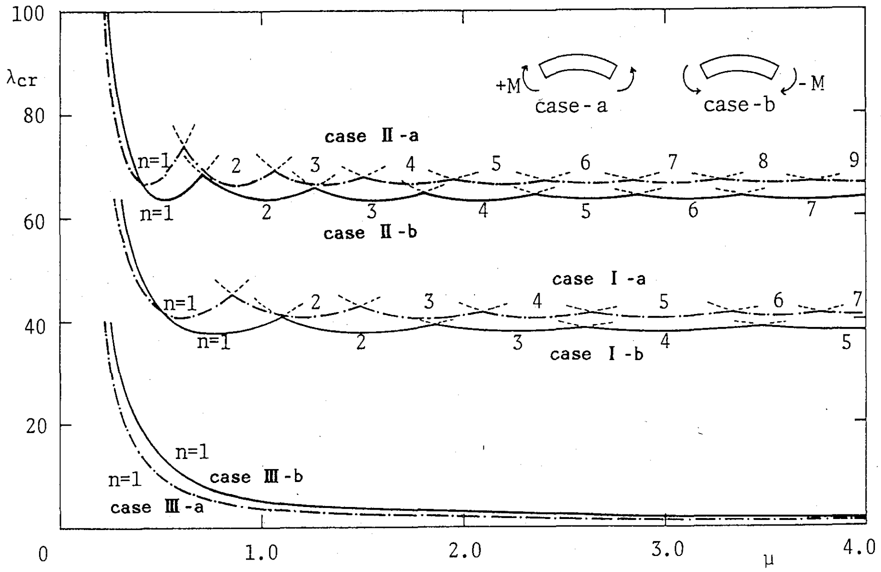

Fig. 4 Buckling eigenvalue λ_{cr} as a function of μ for $\beta=0.8$

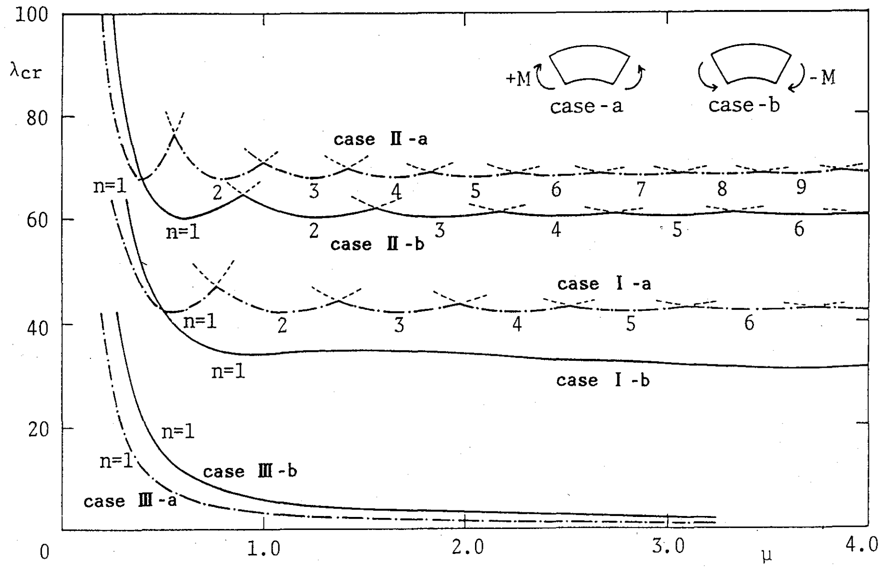

Fig. 5 Buckling eigenvalue λ_{cr} as a function of μ for $\beta=0.6$

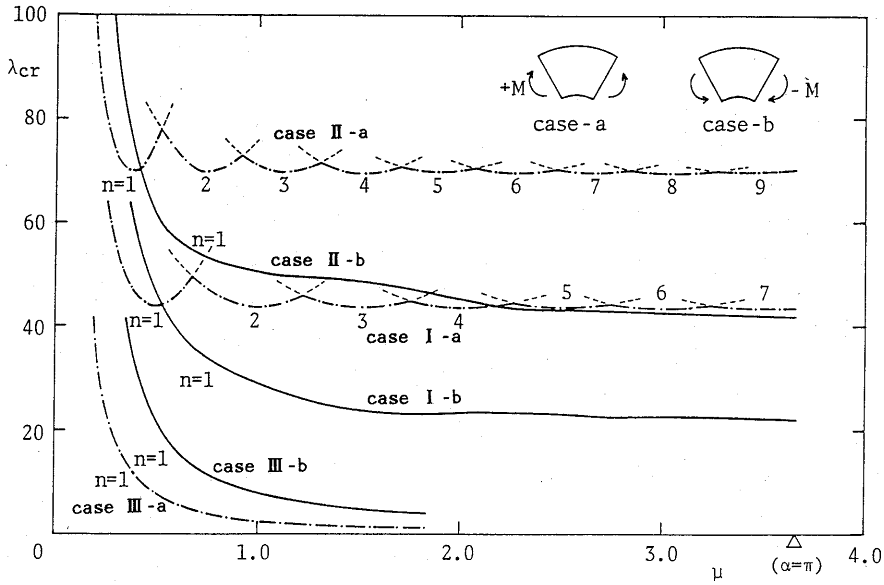

Fig. 6　Buckling eigenvalue λ_{cr} as a function of μ for $\beta=0.4$

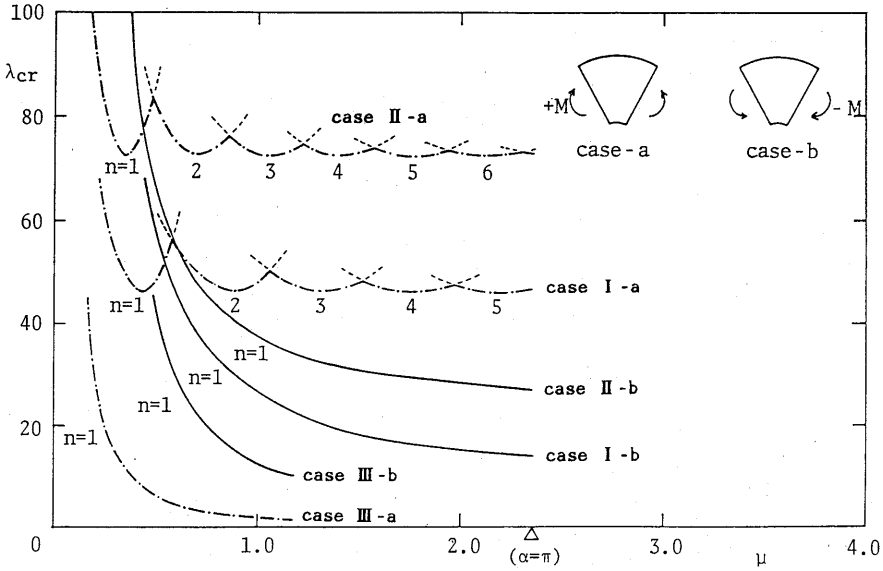

Fig. 7　Buckling eigenvalue λ_{cr} as a function of μ for $\beta=0.2$

座屈曲線に極値が在存し，極値を与える円周方向の半波数 n は縦横比 μ によって変化する。また，極値の値は半波数 n に無関係に一定である。負の座屈モーメントが正の座屈モーメントよりも小さい値をとる。すなわち，扇形板の応力分布は，内径側が大きいために，内径側が圧縮力となる場合の座屈モーメントの値が小さい。座屈曲線の半波数に注目すると，座屈モーメントの値が大きいほど，波数が大きくなる特性をもつ。これに対して，自由（caseⅢ）の場合には，θ方向の半波数$n=1$ の座屈モーメントが最小値を取り，$n \geqq 2$ の座屈曲線が$n=1$ の座屈曲線と交わることはない。caseⅢの場合，caseⅠ，Ⅱの場合と異なって，正の座屈モーメントの方が小さい。$\beta=0.8$に対する座屈曲線の特性は，caseⅠ，Ⅱ，Ⅲいずれの場合も，一様圧縮力および面内曲げを受ける長方形板のそれと同じである。

βの値が小さくなるにつれて（Fig. 4→Fig. 7），扇形板としての力学的特性が現われてくる。すなわち，正，負の座屈曲線の値の差が大きくなるとともに，caseⅠ，Ⅱの負の座屈曲線の極値の配列の規則性がなくなる。この結果，$n=1$ すなわち，半波数が 1 の場合の座屈曲線が最小値を取るようになる（caseⅠで

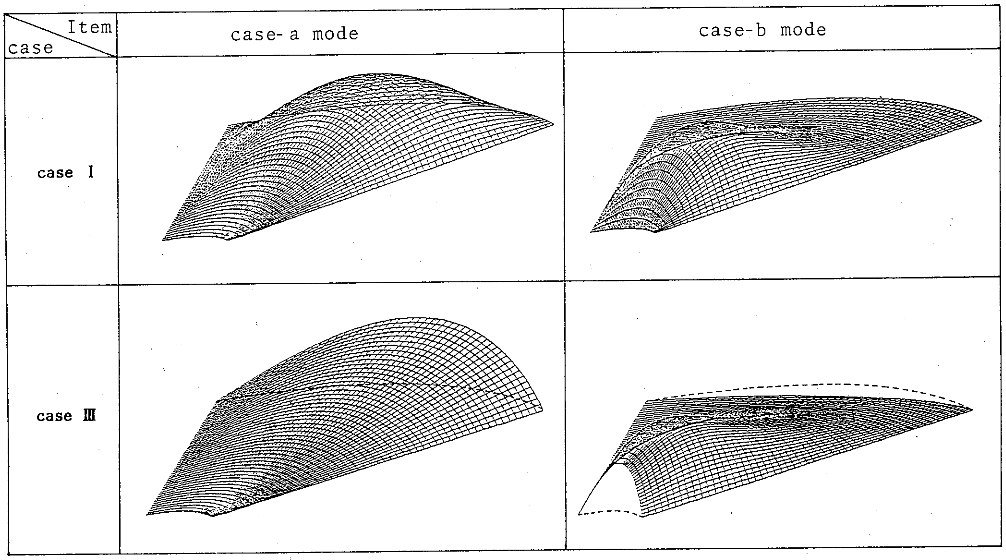

Fig. 8　Comparison between case−a mode and case−b mode(α=60°, β=0.2)

0.6, caseⅡで0.4)。つまり，caseⅠ，Ⅱの座屈曲線が caseⅢ（自由）と同じパターンとなる。しかし，caseⅠ，Ⅱの正の座屈曲線の極値をもつ特性は，βが小さくなっても失われない。

βが小さく，かつ縦横比μが小さい領域では，caseⅠ，Ⅱの正の座屈曲線が，負のそれよりも小さくなっていることがわかる（Fig. 6，7参照)。

Fig. 8は内外径比β=0.2，α=60°（縦横比μ= 0.786）の扇形板の正，負の座屈モーメントに対する座屈波形を caseⅠおよびⅢの2ケースについて示したものである。いずれも圧縮面内力側の変形が大きく，引張側の変形が小さい（正の場合：外径側圧縮，負の場合：内径側圧縮)。 caseⅢの自由の場合には，正の曲げのもとでは，Fig. 8のように，扇形板は剛体変形に近い座屈波形をもつのに対して，負の場合は弾性変形が優勢な座屈波形となる。このような事実から，正の曲げによる座屈荷重が小さくなるものと予想される。

次に，長方形板と同一の座屈パターンを示す扇形板について，長方形板との比較を行う。最低次の座屈曲げモーメントと内外径比βとの結果を示せば，Fig. 9の結果が得られる。比較対照のために，長方形板の座屈係数[8]23.9×π^2／6=39.3（caseⅠ），39.6×π^2／6=65.0（caseⅡ）を併記している。図に示すように，正の曲げモーメントの場合は，内外径比βの変化に無関係に長方形板と同様な極値を持つパターンとなる。一方，負の曲げモーメントの場合は，内外径比が大きいときに同じ挙動を示す。正，負いずれの曲げモーメントとも，内外径比βが大きくなると同じ値，すなわち，長方形板の値に近づくことが予想される。この図からも明らかなように，扇形板では，内外径比が大きい場合を除いて,長方形板で近似することは不可能で，扇形板として解析する必要があることが確かめられる。

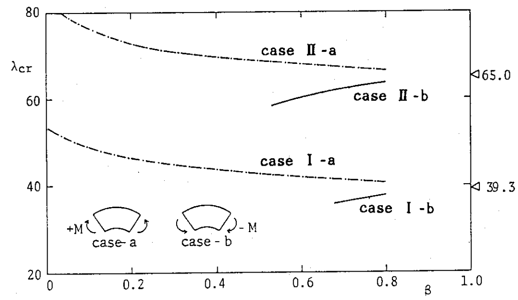

Fig. 9　Buckling eigenvalue λ_{cr} as a function of β

Table 1は，各内外径比βに対する正負の座屈曲げモーメントとそのときの縦横比（n= 1の場合）との関係を示したものである。座屈曲げモーメントが長方形板の値よりも高い正の面内曲げの場合には，長方形板よりも小さい縦横比で極値をとり，逆に低い負の面内曲げの場合には，大きな縦横比で極値をとる。

5．　まとめ

本研究は，面内曲げを受ける直線辺が単純支持された扇形板の座屈特性を，二次元弾性論と薄板の曲げ理論を用いて解析したものである。得られた結果を要約すると次のとおりである。

Table 1 Summary of the minimum buckling moment and aspect ratio for case I and II

β	case-I				cace-II			
	case-a	μ	case-b	μ	case-a	μ	case-b	μ
0.2	46.3	0.45	−		72.6	0.35	−	
0.3	44.9	0.47	−		70.8	0.37	−	
0.4	43.7	0.51	−		69.5	0.38	−	
0.5	42.9	0.52	−		68.5	0.39	−	
0.6	42.0	0.56	−		67.7	0.41	−60.1	0.61
0.7	41.3	0.57	−36.2	0.84	67.0	0.42	−62.0	0.56
0.8	40.6	0.61	−37.6	0.77	66.4	0.43	−63.5	0.52
*	39.3	0.67	−39.3	0.67	65.0	0.47	−65.0	0.47

*:Buckling eigenvalue of the rectangular plate

(1)面内曲げを受ける扇形板の面内力の分布形状は，直線とならない。内外径比が減少すると，内径側の値が急激に増大する。このような応力分布形状の特性によって，面内曲げの作用方向によって座屈固有値が異なる。

(2)円弧辺が単純支持および固定の場合には，円周方向の面内力が卓越する内径側を圧縮する負の曲げモーメントの座屈固有値が，一般に，正の曲げによる値よりもその絶対値が小さい。縦横比をパラメーターとした正の曲げモーメントによる座屈曲線には長方形板と同様に各円周方向の半波数に対して同じ値をもつ極値が存在する。一方，負の曲げモーメントによる座屈曲線においては，この性質が内外径比が小さくなると存在しなくなる。つまり，縦横比に無関係に円周方向の半波数が1の座屈波形を持つ座屈曲げモーメントが最低次となる。

(3)円弧辺が自由の場合には，正の曲げモーメントによる座屈曲線が負の場合よりも小さい。正，負いずれの座屈曲線も円周方向の半波数が1の座屈波形をもつ固有値が最低次となる。

(4)扇形板の座屈特性は，内外経比が大きく，その形状が長方形板に近い場合には，長方形板と同様な座屈特性を示す。しかし，内外経比が小さくなると，扇形板としての特性が現われ，独持の座屈特性を示す。扇形板を等価な長方形板に置換して座屈モーメントを推定することは，一般に困難で，扇形板としての取扱いが必要である。

以上によって，面内曲げを受ける扇形板の座屈特性が明確にされた。

今後，扇形板の動的安定性，座屈後の幾荷学的非線形挙動，初期たわみの影響など逐時発表していく予定である。

Appendix A Galerkin 法に含まれる定積分

(1)基準振動形の直交性

$$\int_0^{\alpha}\sin\alpha_n\theta\sin\alpha_m\theta d\theta\begin{cases}=0 & (n \neq m)\\ =\alpha_n/2 & (n=m)\end{cases} \qquad \text{(A−1)}$$

$$\int_{\beta}^{1}R_{sn}R_{pn}\xi d\xi\begin{cases}=0 & (s \neq p)\\ I_{sn}(s=p)\end{cases} \qquad \text{(A−2)}$$

(2)定積分

$$\int_{\beta}^{1}\frac{1}{\xi}\frac{d}{d\xi}\left\{\xi f_1(\xi)\frac{dR_{sn}}{d\xi}\right\}R_{pn}\xi d\xi$$

$$=\left|\xi f_1(\xi)\frac{dR_{sn}}{d\xi}R_{pn}\right|_{\beta}^{1}-\int_{\beta}^{1}\xi f_1(\xi)\frac{dR_{sn}}{d\xi}\frac{dR_{pn}}{d\xi}d\xi$$

$$=-\int_{\beta}^{1}\xi f_1(\xi)\frac{dR_{sn}}{d\xi}\frac{dR_{pn}}{d\xi}d\xi$$

$$(\because f_1(\beta)=f_1(1)=0) \qquad \text{(A−3)}$$

参 考 文 献

1）芳村：曲線直交異方性平板の曲げについて，土木学会論文集，第82号，pp. 1－8，1962.

2）Harik, Issam E. : Analytical Solution to Orthotropic Sector, Journal of the Structural Division, Proceeding of the American Society of Civil Engineers, Vol. 110, No. 4, pp.554～568, 1984.

3）山崎・樗木・金子：扇形板の自由振動解析，九州大学工学集報，第42巻，第4号，pp.379～388, 1969.

4）Swaminadham M., Danielski, J. and Mahrenholtz, O. : Free Vibration Analysis of Annular Sector Plates by Holographic Experiments, Journal of Sound and Vibraiton, Vol.95, pp.333～340, 1984.

5）Rubin, C. :Stability of Polar－Orthotropic Sector Plates, Journal of Applied Mechanics, ASME, Vol. 45, No. 2, pp. 448～450, 1978.

6）Srinivasan, R.S. and Thiruvenkatachari, V. : Stability of Annular Sector Plates with Variable Thickness, American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal, Vol. 22, No. 2, pp. 315～317, 1984.

7）小松：構造解析学Ⅲ，丸善，pp. 52～54, 1986.

8）福本：構造物の座屈・安定解析，技報堂出版，pp.286～287, 1982.