扇形板の固有振動特性

高橋和雄*・平川倫明**
夏秋義広***・小西保則*

Vibration Properties of an Annular Sector Plate

by

Kazuo TAKAHASHI*, Michiaki HIRAKAWA**
Yoshihiro NATSUAKI*** and Yasunori KONISHI*

Free vibration of an annular sector plate simply supported along the radial edges is examined. Natural frequencies of the annular sector plate with different boundary conditions along the circular edges are obtained for wide ranges of the aspect ratio. Numerical results are compared with the frequency of the corresponding rectangular plate. It is concluded that the frequency of the annular sector plate with free circular edges cannot be estimated by the rectangular plate analogy.

1．はじめに

扇形板はアーチ橋の腹板やラーメンの隅角部などに使用されている．著者等は扇形板の座屈特性[1]および動的安定性[2]を解析している．これまでの結果によれば，座屈および動的安定性は，面内力の分布形状が長方形板と異なるために，内外径比が0.8以上にならないと長方形板に近似できないことを述べた．一方，振動の場合，扇形板の縦横比を等価な長方形板に近似すれば，扇形板の振動は，長方形板にある程度近似できることが示されている[3]．

そこで，本研究では，各種の境界条件をもつ扇形板の固有振動特性を広い縦横比のもとに計算して，長方形板との比較を試みたものである．

2．解　法

(1)　一般解[3]

Fig. 1に示すように扇形板を対象とする．扇形板の境界条件については，直線辺は単純支持されているものとし，円弧辺は任意とする．この扇形板の微小振動の運動方程式は次のように表される[3]．

$$\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+D\nabla^4 w=0 \tag{1}$$

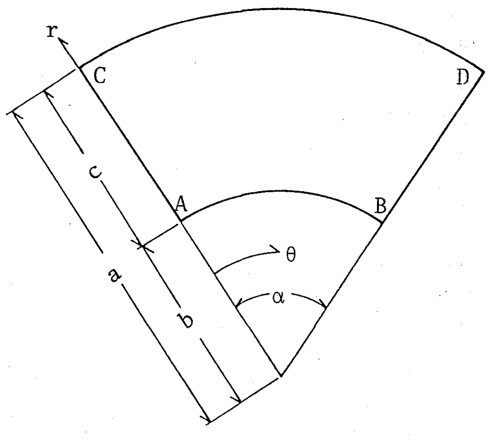

Fig. 1　Geometry of an annular sector plate.

昭和63年9月30日受理
*土木工学科（Department of Civil Engineering）
**大学院修士課程土木工学専攻（Graduate Student, Department of Civil Engineering）
***大学院博士課程海洋環境建設学専攻（Graduate Student, Marine Environmental Production and Construction Engineering）
㈱片山鉄工所（Katayama Iron Works, Co., Ltd.）

ここに，w：たわみ，ρ：板の密度，h：板の厚さ，t：時間，$D=Eh^3/12(1-\nu^2)$：板剛度，E：ヤング率，ν：ポアッソン比，$\nabla^2=\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1\partial}{r\partial r}+\frac{1\partial^2}{r^2\partial\theta^2}\right)$.

この運動方程式の詳しい解法は，文献3）に示されているので，本論文では，その概要のみを示す．$w=W(r,\theta)\exp(i\omega t)$ とおけば，次のような空間のみの微分方程式に変換される．

$$-\rho h\omega^2 W+D\nabla^4 W=0 \tag{2}$$

扇形板の直線辺が単純支持されているので，式(2)の一般解は次のように仮定できる．

$$W=(r,\theta)=R(r)\sin(n\pi\theta/\alpha) \tag{3}$$

ここに，$n=1,2,\cdots$：θ 方向の半波数，α：扇形板の開き角，$R(r)$：r のみの関数．

R についての微分方程式は，Bessel の微分方程式で与えられ，その一般解は，次のように与えられる．

$$R_n(\xi)=A_nJ\alpha_n(k_n\xi)+B_nY\alpha_n(k_n\xi)$$
$$+C_nI\alpha_n(k_n\xi)+D_nK\alpha_n(k_n\xi) \tag{4}$$

ここに，$\xi=r/a$，$k_n=\sqrt[4]{\rho h a^4\omega_n^2/D}$：固有値，

$\alpha_n=n\pi/\alpha$,

$J\alpha_n$：α_n 次の第1種 Bessel 関数，

$Y\alpha_n$：α_n 次の第2種 Bessel 関数，

$I\alpha_n$：変形された α_n 次の第1種 Bessel 関数，

$K\alpha_n$：変形された α_n 次の第2種 Bessel 関数，

A_n，B_n，C_n，D_n：積分定数．

(2) 境界条件

式(4)の積分定数 A_n，B_n，C_n，D_n は扇形板の円弧辺の AB, CD の境界条件により決定される．円弧辺の境界条件は，次の3種類を考える．

case Ⅰ：単純支持

case Ⅱ：固定

case Ⅲ：自由

各境界条件に対して得られる条件式より，振動数方程式が得られる[3]．

(3) 固有振動数

扇形板の固有振動数 f_i は，固有値 k_{in} がわかれば，次式によって計算される．

$$f_i=\frac{\omega_i}{2\pi}=\frac{1}{2\pi}\frac{k_{in}^2}{a^2}\sqrt{\frac{D}{\rho h}} \tag{5}$$

扇形板の固有振動特性を長方形板のそれと比較するために，縦横比 μ を用いる．扇形板の縦横比 μ は次のように定義される．

$$\mu=\frac{\text{平均円弧長}}{\text{直線辺の長さ}}=\frac{\alpha(1+\beta)}{2(1-\beta)} \tag{6}$$

ここに，$\beta=b/a$(内外径比)．

上式は，扇形板を等価な長方形板に置き換えるためのパラメーターである．ここでは，直線辺の長さ (c) を基準としているために，式(5)の固有振動数を c を用いて表現する必要がある．このとき，式(5)は次のように書き換えられる．

$$f_i=\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{(1-\beta)^2k_{in}^2}{\pi^2}\cdot\frac{\pi^2}{c^2}\sqrt{\frac{D}{\rho h}} \tag{7}$$

一方，長方形板の固有振動数は，直交座標系のもとに導かれた運動方程式を解くことによって得られる[4]．

$$f_i'=\frac{1}{2\pi}\cdot\delta_i^2\cdot\frac{\pi^2}{c^2}\sqrt{\frac{D}{\rho h}} \tag{8}$$

ここに，δ_i は境界条件によって定まる定数．case Ⅰの単純支持の場合は次のように与えられる．

$$\delta_i=\sqrt{\frac{m^2}{\mu^2}+n^2} \tag{9}$$

ここに，$m=1$，2，…，$n=1$，2，……．

他の境界条件の場合は，超越方程式を解く必要がある．

扇形板の固有振動数と長方形板の固有振動数の相違を検討するために，以下の数値計算の整理には，扇形板の固有振動数を長方形板の値で割った振動数比 η を用いる．すなわち

$$\eta=\frac{f_i}{f_i'}=\frac{(1-\beta)^2k_{in}^2}{\delta_i^2\pi^2} \tag{10}$$

3．数値結果

Fig. 2は内外径比 $\beta=0.5$ の扇形板の1次振動の無次元固有振動数 η と縦横比 μ の関係を case Ⅰ, Ⅱ, Ⅲの3つの境界条件に対して示したものである．ここで無次元固有振動数 η は，扇形板の固有振動数 f_i を対応する長方形板の固有振動数 f_i' で割った値である．図のように，case Ⅰ，Ⅱの場合には，μ が0.6以上であれば長方形板とよく一致する．しかし，case Ⅲの自由の場合には扇形板と長方形板の間にはかなり差がある．この理由は次のように考えられる．Fig. 3に示すように，円弧辺が支持される case Ⅰ（Ⅱ）の場合には，扇形板の振動モードは長方形板と根本的に変わらないが，

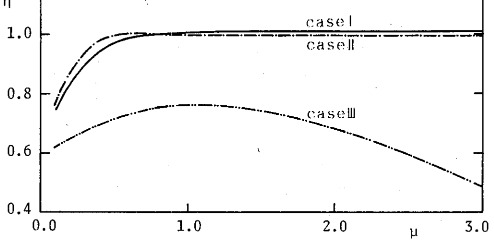

Fig. 2　First non-dimensional frequency vs. aspect ratio: case I, II and III for $\beta=0.5$.

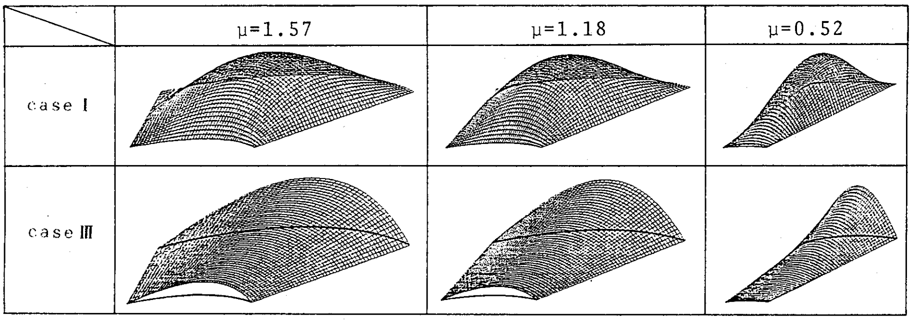

Fig. 3　Modal shapes of the annular sector plate: case I and III for $\beta=0.5$.

case IIIの自由の場合には，両者が異なる．長方形板の1次の固有振動形は，自由辺の方向に剛体変位に近い．しかし，扇形板では，内径側と外径側の円弧辺の長さが異なるために，剛性が内径辺と外径辺では等しくない．振動振幅が最大となる外径辺の剛性は，対応する長方形板の剛性より小さい．このために，扇形板の振動数が，長方形板のそれより低くなるものと思われる．また，case IIIの場合，辺長比が大きくなっても，長方形板に近づかない．

Fig. 4 は，case I の $\beta=0.25$, 0.50, 0.75 に対する扇形板の1次振動の無次元固有振動数を示したものである．縦横比 μ が0.7以上であれば，β が大きい場合 ($\beta>$ 0.50) には，長方形板とよく対応している．β が小さい場合 ($\beta=0.25$) においても，正方形板に近い $\mu=1.0$ 付近はよく一致している．μ が小さい場合には，Fig. 3 に示すように振動モードの腹の位置が剛性の小さい外径側へ移動してくるために，長方形板よりも固有振動数が低くなる．

Fig. 5 は case IIIの $\beta=0.25$, 0.50, 0.75 に対する扇形板の1次振動の無次元固有振動数である．case IIIの場合，長方形板の場合とかなり差がある．しかし，β が大きくなると，扇形板の固有振動数は，長方形板の値に

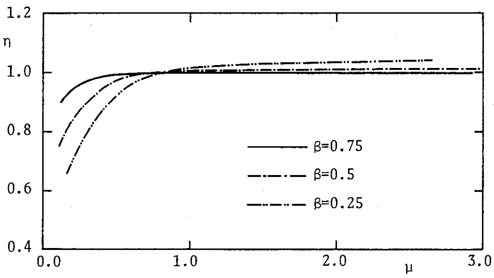

Fig. 4　First non-dimensional frequency vs. aspect ratio: case I for $\beta=0.25$, 0.50 and 0.75.

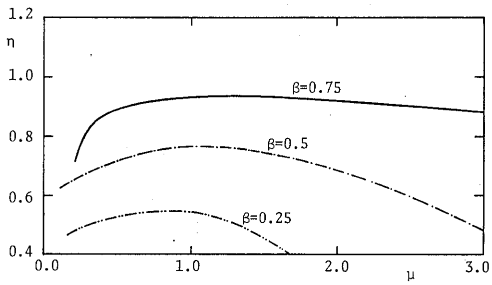

Fig. 5　First non-dimensional frequency vs. aspect ratio: case III for $\beta=0.25$, 0.50 and 0.75

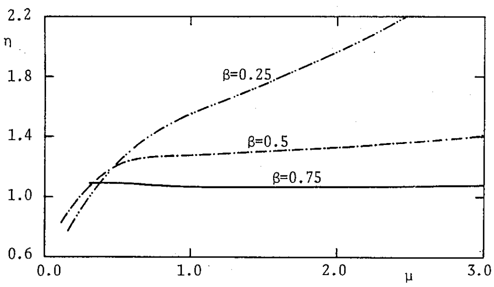

Fig. 6　Second non-dimensional frequency vs. aspect ratio: case III for $\beta=0.25$, 0.50 and 0.75

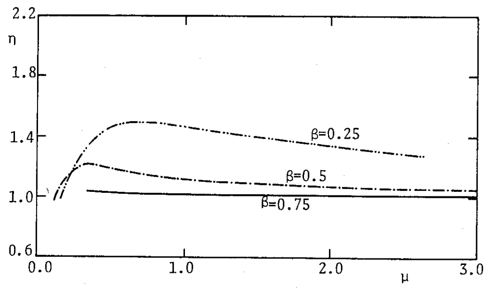

Fig. 7　Third non-dimensional frequency vs. aspect ratio: case III for $\beta=0.25$, 0.50 and 0.75.

近づく.

以上は，1次振動についての考察である．2次以上の高次振動について，case Ⅰ，Ⅱの場合には，高次振動についても，長方形板とよく一致することを確かめている．一方，Fig. 6，7にcase Ⅲの2次，3次振動の固有振動数曲線を示す．これらの図に示すように，case Ⅲの場合は，2次および3次の固有振動数は長方形板のそれよりも大きい．βが大きくなると，case Ⅲの振動数は長方形板の値に近づく．以上のように，case Ⅲの自由辺をもつ場合の固有振動数は，βが大きい場合には，長方形板に近似できる．しかし，βが小さい場合には，長方形板の値と大きな差がある．

4．まとめ

1）扇形板に長方形板と等価な縦横比を導入すると，円弧辺が単純支持あるいは固定の扇形板の固有振動数は，縦横比が小さい場合を除いて，対応する長方形板の値を用いて推定することができる．

2）円弧辺が自由の場合，内外径比が大きい領域を除いて，長方形板近似は不可能である．この理由は，扇形板と長方形板との固有振動形が大きく異なるためであると思われる．円弧辺が自由の場合は，扇形板としての取り扱いが必要である．

本研究の数値計算には，長崎大学情報処理センターのFACOM M-180AD/Ⅱを使用したことを付記する.

参考文献

1）夏秋・高橋・小西・平川：面内曲げを受ける曲線平板の座屈特性，構造工学論文集，Vol. 34A，pp. 181～190，1988.

2）高橋・小西・平川・夏秋：面内変動曲げを受ける曲線平板構造の動的安定性，構造工学論文集，Vol. 34A，pp. 807～815，1988.

3）山崎・樗木・金子：扇形板の自由振動解析，九州大学工学集報，第42巻，第4号，pp. 576～583，1969.

4）小坪：土木振動学，森北出版，pp. 255～258，1973.