衝撃加振による道路橋の動的特性推定

岡林隆敏*・小西保則**
龍　博志***・有角　明****

Dynamic Paramer Estimation of Highway Bridge by Impact Excitation

by

Takatoshi OKABAYASHI*・Yasunori KONISHI**
Hiroshi RYU***・Akira ARIKADO****

An algorithm of the nonliner least square method for the multi-degree of freedom curve fitting method is developed for obtaining the stable and convergent solution. An observation response of a structural system is simulated by adding Gaussian white noise to the response which is calculated by the impact response analysis for a Trussed Langer bridge based on the FEM modeling.

The modal circle fitting method and the multi-degree of freedom curve fitting method are tested on simulation data varying SN ratio 0 to 20%. The numerical results are shown that the proposed procedure derives the stable solution and this solution has higher accuracy than the solution by the modal circle fitting method.

1．はじめに

橋梁の耐風安定性，道路環境改善のための橋梁の防振および振動による既設橋梁の健全度評価等において迅速でかつ精度の高い動特性推定法が望まれている(1)．橋梁の振動測定には不平衡型起振機を用いたり，長大橋の場合には，クレーンによる重錘の昇降法などが従来より実施されている方法であり，信頼性の高い結果を得ている．また，様々な微小外乱による橋梁の微動を高精度の加速度検出器で測定し，得られた不規則波形をF. F. Tによりスペクトル表示をすることにより，振動特性を推定する常時微動を測定する活用されてきた(2)．しかしながら，前者の方法では起振器の運搬，取り付けなど準備に多くの時間と経費が必要である．後者は，加速度検出器のみで実測ができるので広く用いられている方法であるが，外力が不明なために外乱の影響が誤差として含まれる可能性がある．

著者等は，実験が比較的簡単で高精度の振動特性推定が可能な衝撃加振法の橋梁振動への適用について検討してきた(3)(4)．衝撃加振法は，小型機械や自動車および航空機等の振動測定において発展させられた技術であり，比較的小規模の構造物に適用されている．この手法を大規模構造物である道路橋に適用するためには，従来の構造物と比較して，推定する振動数が極めて低い点，高いレベルの観測雑音が混在するなど，いくつかの理論的，技術的な問題を解決する必要がある．

本研究は，非線形最小二乗法の数値解析的な安定性を改善することにより，衝撃加振試験による構造物のモーダルパラメータ（固有振動数，減衰定数および固有モード）推定の精度向上を試みたものである．各種のモーダルパラメータ推定手法の有効性を検討するた

昭和63年9月30日受理
*機械第二工学科（Department of Mechanical Engineering II）
**土木工学科（Department of Civil Engineering）
***土木工学専攻修士課程（Graduate Student, Department of Civil Engineering）
****㈱長大（Chodai Co. Ltd）

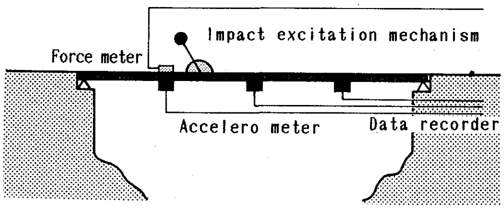


Fig. 1　Impact excitation test

めに，衝撃加振応答に任意の雑音レベルを設定可能な衝撃加振シミュレーションのためのプログラムを作成した．このシミュレータを用いて，トラスドランガー橋の衝撃加振応答を行なった．観測波形のノイズ比を増加させて，モーダルパラメータの推定誤差を評価することにより，モード円適合法と多自由度曲線適合法の有効性を検討した．

2．衝撃加振法と系のコンプライアンス

2．1　衝撃加振法について

衝撃加振試験による橋梁の振動特性推定は，次の手順で行う．Fig. 1のように，橋梁上にロードセルを置き，その上から橋梁に衝撃力を加え，橋に加えた力と同時に加速度計によって橋の応答加速度を集録する．

得られたデータをフーリエ変換し，構造系の伝達関数を推定する．橋梁を線形の多自由度系でモデル化すると理論的な伝達関数が与えられる．理論曲線と実測で得られた伝達関数に線形多自由度系の伝達関数を最小二乗法により適合させ，橋梁の振動特性（固有振動数，減衰定数，振動モード等）を推定する．

2．2　構造系の伝達関数

橋梁を n 自由度系と考えると，この系の運動方程式は，

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{x}}(t)+\boldsymbol{C}\dot{\boldsymbol{x}}(t)+\boldsymbol{K}\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{f}(t) \tag{1}$$

で与えられる．ここに，$\boldsymbol{x}(t)$ と $\boldsymbol{f}(t)$ は n 次元の変位ベクトルと外力ベクトルである．また，$\boldsymbol{M}$，$\boldsymbol{C}$ および $\boldsymbol{K}$ は，それぞれ $(n\times n)$ 行列であり，質量行列，減衰行列および剛性行列である．減衰行列として，一般粘性系と考える．(1)式を状態方程式で表示すると，次のようになる．

$$\boldsymbol{D}\dot{\boldsymbol{y}}(t)+\boldsymbol{E}\boldsymbol{y}(t)=\boldsymbol{P}(t) \tag{2}$$

ただし，

$$\boldsymbol{y}(t)=\begin{bmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \end{bmatrix},\ \boldsymbol{f}(t)=\begin{bmatrix} \boldsymbol{f}(t) \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{D}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{0} & \boldsymbol{M} \\ \boldsymbol{M} & \boldsymbol{0} \end{bmatrix},\ \boldsymbol{E}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{K} & \boldsymbol{C} \\ \boldsymbol{0} & -\boldsymbol{M} \end{bmatrix} \tag{3}$$

である．(2)式の系の固有モード $\boldsymbol{\Psi}$ $(2n\times 2n)$ が得られると，$\boldsymbol{D}$ 及び $\boldsymbol{E}$ が対角化できる．なお，$\boldsymbol{\Psi}$ は複素数となる．

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{\Psi}^T\boldsymbol{D}\boldsymbol{\Psi}&=[d_r] \\ \boldsymbol{\Psi}^T\boldsymbol{D}\boldsymbol{\Psi}&=[e_r] \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

固有モードマトリックス $\boldsymbol{\Psi}$ により，

$$\boldsymbol{y}(t)=\boldsymbol{\Psi}\boldsymbol{q}(t)$$

のような変換を考えると，(2)式は，次のような非連成化した方程式

$$d_r\dot{q}_r(t)+e_rq_r(t)=\boldsymbol{\Psi}_r{}^T\boldsymbol{P}(t)\qquad(r=1\cdots 2n) \tag{5}$$

で表すことができる．ここに $\boldsymbol{\Psi}_r$ は，$\boldsymbol{\Psi}$ の r 列である．

ここで，(2)式の系の固有モード $\boldsymbol{\Psi}$ は，(1)式の系の固有モード行列 $\boldsymbol{\Phi}$ $(n\times n)$ と固有値行列 $\boldsymbol{\Lambda}$ $(n\times n)$ により，

$$\boldsymbol{\Psi}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{\Phi} & \bar{\boldsymbol{\Phi}} \\ \boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{\Lambda} & \bar{\boldsymbol{\Phi}}\bar{\boldsymbol{\Lambda}} \end{bmatrix} \tag{6}$$

で表される．ここに，$\bar{}$ の記号は複素共役を表すものとする．

次に系の伝達関数を求めるために，(5)式の両辺をフーリエ変換し，若干の演算を行うことにより，k 点に外力が作用した場合の ℓ 点の周波数応答は，

$$X_l(\omega)=\sum_{r=1}^{n}\left(\frac{\phi_{rk}\,\phi_{rl}}{\omega_{dr}+e_r}+\frac{\bar{\phi}_{rk}\,\bar{\phi}_{rl}}{\bar{\omega}_{dr}+\bar{e}_r}\right)F_k(\omega) \tag{7}$$

となる．ここで，

$$\phi_{rk}\cdot\phi_{rl}/d_r=U_r+jV_r \tag{8}$$

と置き，さらに，

$$\lambda_r=-e_r/d_r,\ \bar{\lambda}_r=-\bar{e}_r/\bar{d}_r \tag{9}$$

の関係を用いて，

$$\lambda_r=-\sigma_r+j\omega_{dr} \tag{10}$$

で表す．変位応答の周波数伝達関数，コンプライアンスは次式で定義される．ここに，$j=\sqrt{-1}$ である．

$$G_{lk}(\omega)=X_l(\omega)/F_k(\omega) \tag{11}$$

よって，一般粘性系のコンプライアンスは，

$$G_{lk}(\omega)=\sum_{r=1}^{n}\left\{\frac{U_r+jV_r}{j(\omega-\omega_{dr})+\sigma_r}+\frac{U_r-jV_r}{j(\omega+\omega_{dr})+\sigma_r}\right\} \tag{12}$$

で与えられる．

3．周波数領域曲線適合法

3．1　モード円適合法

衝撃加振試験により，k 点を加振したときの ℓ 点の加速度応答 $\hat{\ddot{x}}_l(t)$ と力 $\hat{f}_k(t)$ を収録する．これらを，F. F. T. によりフーリエ変換し，これを $\hat{\ddot{x}}_l(\omega)$，$\hat{F}_k(\omega)$ で表す．加速度応答を変位応答に変換し，実測データに基づくコンプライアンスを求めることができる．

$$\hat{G}_{lk}(\omega)=\hat{X}_l(\omega)/\hat{F}_k(\omega) \tag{13}$$

多自由度系において，モード間の連成が少なく，r 次の固有振動数が卓越している共振点付近では，他のモードの影響が少ないと考えられるので，各共振点近傍の周波数範囲では，コンプライアンスは，次のよう

に１自由度系として表現できる．

$$G_{lk}(\omega)=\frac{U_r+jV_r}{j(\omega-\omega_{dr})+\sigma_r}+\frac{U_r-jV_r}{j(\omega+\omega_{dr})+\sigma r}+R_r+jI_r \quad (14)$$

ここに，$\omega_{dr}=\Omega_r\sqrt{1-h_r^2}$，$\sigma_r=\Omega_r h_r$ である．系を比例粘性減定数と仮定すると，Ω_r は r 次の固有円振動数，h_r は r 次の減衰定数である．また，R_r と I_r は他のモードからの影響を表す定数である．

(14)式の $G_{lk}(\omega)$ は複素数であり，ωを変化されて複素平面上で$G_{lk}(\omega)$を表示すると円を描く．一方，実測データのコンプライアンスも共振点付近では，近似的に円となると考えられる．そこで，実測データに(14)式を最小二乗法により曲線適合させる．すなわち，

$$\varepsilon^2=|G_{lk}(\omega_s)-\hat{G}_{lk}(\omega_s)|^2 \quad (\omega_L\leqq\omega_s\leqq\omega_U) \quad (15)$$

を最小とするパラメータを推定する．これをFig. 2 に示した．中心角の変化量，円の中心，半径等の情報により，モーダルパラメータを推定する．

$$\left.\begin{aligned}\sigma_r&=2\Delta\omega/\Delta\phi_r\\ \omega_{dr}&=(\omega_i+\omega_{i+1})/2\end{aligned}\right\} \quad (16)$$

ここに，$\Delta\omega$ は周波数刻み，$\Delta\phi_r$ は中心角の最大変化量および ω_i，ω_{i+1} は，$\Delta\phi_r$ を挟む周波数である．

この操作を各共振点付近について行ない，各振動次数のモーダルパラメータを求める．

3．2　多自由度曲線適合法

ある周波数範囲 $\omega_L\leqq\omega\leqq\omega_U$ に n 個の共振点を有する線形多自由度系のコンプライアンスは，近似的に

$$G(\omega)=\sum_{r=1}^{n}\left\{\frac{U_r+jV_r}{j(\omega-\omega_{dr})+\sigma_r}+\frac{U_r-jV_r}{j(\omega+\omega_{dr})+\sigma_r}\right\}-(C+jD)/\omega^2+E+jF \quad (17)$$

で表される．このコンプライアンスは，(16)式と同じく，

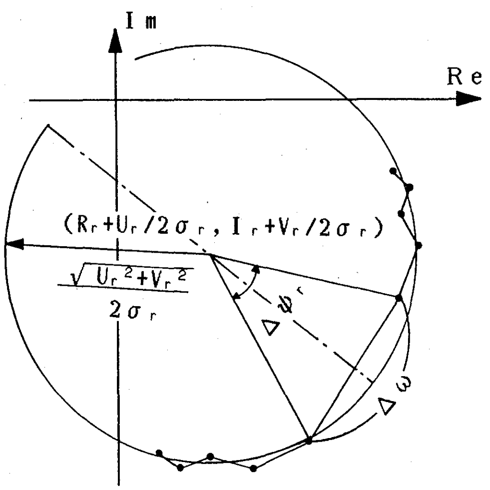


Fig. 2　Modal circle fitting method

k 点に力が作用したときの ℓ 点の応答によるものであるが，式を簡略化するために，この添字を省略する．ここに，C，D，E，Fは，この周波数範囲の他からの影響を表示するための定数である．

多自由度曲線適合法では，実測のコンプライアンスに(17)式を曲線適合させることにより，ω_{dr}，σ_r，U_r，$V_r(r=1\sim n)$ およびC，D，E，Fの $4n+4$ 個のパラメータを決定し，これよりモーダルパラメータを決定するものである．ここで，これらの推定するパラメータを $\boldsymbol{\alpha}$ で表すと，

$$\boldsymbol{\alpha}=[\omega_{d1}\cdots\omega_{dn}\sigma_1\cdots\sigma_n U_1\cdots U_n V_1\cdots V_n CDEF]^T \quad (18)$$

実測より周波数範囲 $\omega_L\leqq\omega_s\leqq\omega_U$ において，m個のコンプライアンスを，$\boldsymbol{\alpha}$ の関数として $\boldsymbol{G}_i(\boldsymbol{\alpha})$ で表す．m 個の周波数点における(17)式と実測値 $\hat{\boldsymbol{G}}_s$ の残差をベクトル表示する．

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{\alpha})=\boldsymbol{G}(\boldsymbol{\alpha})-\hat{\boldsymbol{G}} \quad (19)$$

ここに，$\boldsymbol{G}(\boldsymbol{\alpha})$と$\hat{\boldsymbol{G}}$は，それぞれ $\boldsymbol{G}_s(\boldsymbol{\alpha})$ と $\hat{\boldsymbol{G}}_s$ から構成されるm次元ベクトルである．

求めようとするパラメータ $\boldsymbol{\alpha}$ は，(17)式において非線形であるので，非線形最小二乗法によって，残差の二乗誤差

$$\varepsilon=\boldsymbol{H}(\boldsymbol{\alpha})^T\boldsymbol{H}(\boldsymbol{\alpha}) \quad (20)$$

を最小とするパラメータ $\boldsymbol{\alpha}$ を決定する．ここでは，パラメータを微小変化 $\boldsymbol{\alpha}+\Delta\boldsymbol{\alpha}$ させ，$\Delta\boldsymbol{\alpha}$ について線形した最小二乗法を用いると，$\Delta\boldsymbol{\alpha}$ に関する正規方程式[5]を得る．

$$\boldsymbol{B}^T(\boldsymbol{\alpha})\boldsymbol{B}(\boldsymbol{\alpha})\Delta\boldsymbol{\alpha}=-\boldsymbol{B}(\boldsymbol{\alpha})^T H(\boldsymbol{\alpha}) \quad (21)$$

ここに，$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{\alpha})$ は次式で定義されるコンプライアンス $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{\alpha})$ のヤコビアンで $m(4n+4)$ 行列である．

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{\alpha})=\partial\boldsymbol{H}(\boldsymbol{\alpha})/\partial\boldsymbol{\alpha} \quad (22)$$

この式に基づいてパラメータ $\boldsymbol{\alpha}$ を求める方程が文献(5)で示されている偏分反復法である．しかし，この方法は数値的に不安定である．そこで，安定にかつ収束性の良い解を求める算法として，Marguardt 法[7][8]がある．

$$(\boldsymbol{B}^T(\boldsymbol{\alpha})\boldsymbol{B}(\boldsymbol{\alpha})+v^2\boldsymbol{I})\Delta\boldsymbol{\alpha}=-\boldsymbol{B}^T(\boldsymbol{\alpha})\boldsymbol{H}(\boldsymbol{\alpha}) \quad (23)$$

ここに，定数 v は，$\Delta\boldsymbol{\alpha}$ の値により適応的に変化させる．さらに，数値誤差を小さくおさえる算法として，正規方程式を解くのではなく，等価な方程式

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{B}(\boldsymbol{\alpha})\\ v\boldsymbol{I}\end{bmatrix}=-\begin{bmatrix}\boldsymbol{H}(\boldsymbol{\alpha})\\ \boldsymbol{O}\end{bmatrix} \quad (24)$$

を，ハウスホールダー変換を用いて解く方法が知られている．本研究では，非線形最小二乗法の解法として，このような算法を適用した．

4．衝撃加振シミュレーション

4．1　衝撃加振シミュレータについて

各種の推定法によるパラメータ推定の精度を評価するために，構造物に所定の衝撃力を作用させ，応答波形から構造物のコンプライアンス及び単位衝撃応答関数を得るためのシミュレーションプログラムを作成した．実測では，様な雑音が観測波形に含まれているので，シミュレーションでも，任意のパワースペクトル密度およびSN比が実現できるように考えている．このシミュレータの概要をFig. 3に示した．

まず，構造解析の所定のデータを入力し，有限要素法によるモデル化に基づいて振動解析を行ない，固有振動数と固有モードを決定する．Fig. 1に示した衝撃加振試験により得られる衝撃力の波形は，半正弦波形に近い形になるので，衝撃力を

$$f(t)=\left\{\begin{array}{ll} a\sin(\pi t/b) & (0\leq t\leq b) \\ 0 & (b<t)\end{array}\right. \qquad (25)$$

とする．Fig. 5(a)にその波形を示した．構造系の減衰定数をこれまでの経験から仮定する．衝撃力による構造系の応答解析は，モード解析法により，Runge-Kuttaの法を用いて計算する．

観測雑音は，正規乱数を用いて帯域制限された白色雑音として発生させる．Fig. 5(c)に0～20Hzまで帯域制限された白色雑音モデルを示した．異なる系列の乱数を発生させることにより，互に独立な観測雑音を得ることができる．

衝撃加振試験では，数回の観測波形を時間領域で平均することにより，雑音の除去対策が可能である．そこで，このシミュレーションにおいても，このような操作を実行することにより，雑音の除去を行っている．

最後に，時間領域平均化された波形と衝撃力をFFTによりフーリエ変換して，構造系のコンプライアンスを求める．さらに，これを逆フーリエ変換することにより，構造系の単位衝撃応答関数を得ることができる．

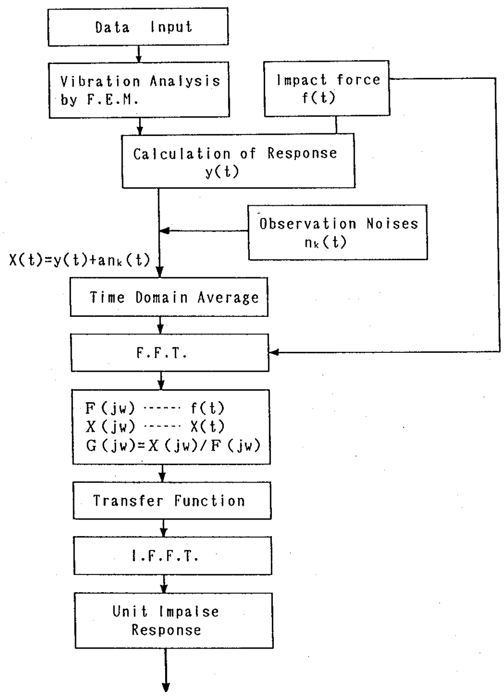


Fig. 3　Impact test simulater

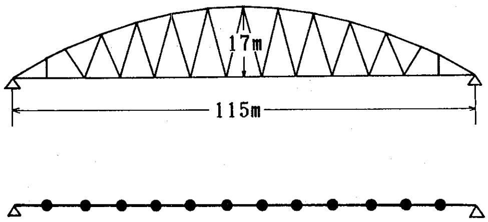


Fig. 4　Trussed Langer bridge

Table 1　Characteristics of bridge

Bridge length	115.0 (m)
Rise	17.0 (m)
Steel weight	469.0 (ton)

Table 2　Vibration characteristics

Mode	Frequency (Hz)	Dumping ratio
1	1.33	0.05
2	2.63	0.05
3	4.25	0.04
4	5.73	0.04
5	7.73	0.03
6	8.76	0.02
7	10.71	0.01

4．2　トラスドランガー橋のシミュレーション

このシミュレータを用いて，Fig. 4に示したトラスドランガー橋の衝撃加振シミュレーションを行った．橋梁の諸元をTable 1に示した．この橋梁を12節点の等価なはりモデルに置換し，振動解析した結果をTable 2に示した．なお，減衰定数は仮定した値である．この橋梁の2点を加振した場合の2点の変位応答は，Fig. 5(b)のようになる．

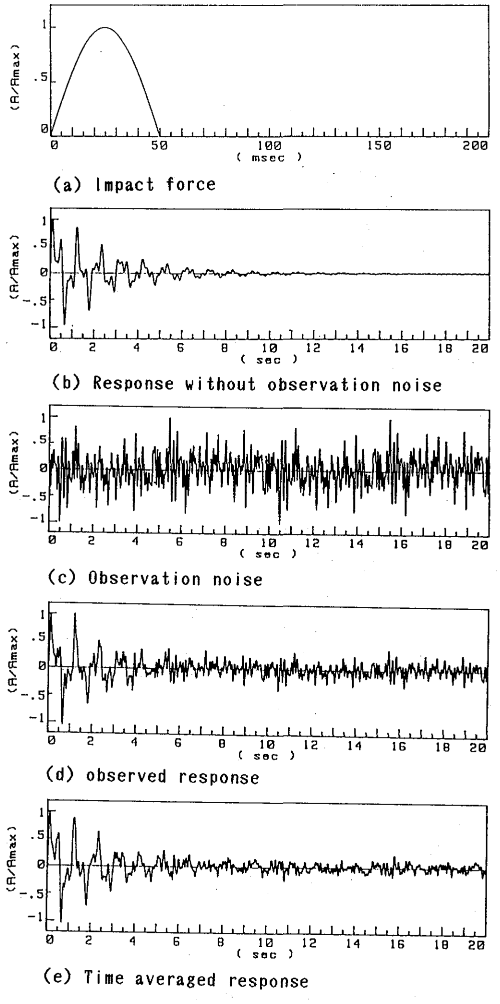
本論文では，観測応答のSN比を次のように定義し

た．応答解析より得られた応答の最大値 $y_{\max}$ を用いて，応答のパワーを $\sigma_s^2=y_{\max}/2$ で評価する．観測雑音のパワーを σ_n^2 としたとき，観測応答の SN 比を

$$\gamma=\sigma_n/\sigma_s \tag{26}$$

により定義する．Fig. 5 (d)は SN 比20％の観測雑音を付加した場合の，観測応答である．観測雑音を発生させ，加算平均処理を行ったものを Fig. 5 (e)に示した．この処理によって10％程度，すなわち雑音レベルをほぼ半減させることができる．

次に，応答波形と衝撃力をフーリエ変換し，コンプライアンスを求める．Fig. 6 (a)は，Fig. 5 (c)に対応する観測雑音がない場合のコンプライアンスである．Fig. 6 (b)は，SN 比20％の雑音付加した系のコンプライアンスであり，また Fig. 6 (c)は，上記の雑音処理をしたものである．雑音処理の効果が現われていることがわかる．



(a) Impact force
(b) Response without observation noise
(c) Observation noise
(d) observed response
(e) Time averaged response

Fig. 5　Time histories of impact force, response and observation noise

5．モーダルパラメータの推定精度

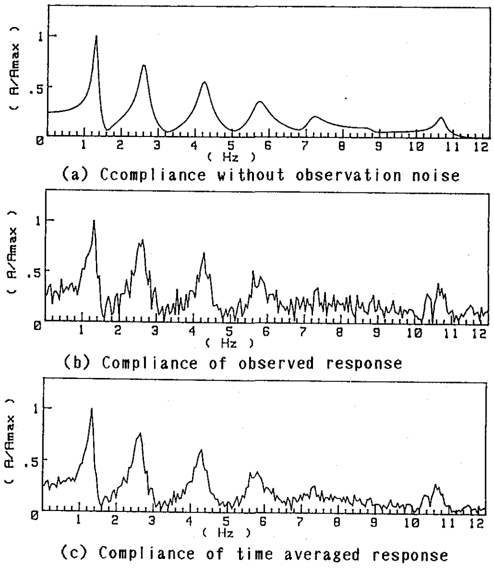
モーダルパラメータの推定は，一次処理としてモード円適合法を適用した．本研究では，観測応答に観測雑音を付加し，SN 比を 0 から20％まで 5 ％ごとに増加させ，SN 比の増加に伴う推定の精度について検討を行った．固有振動数と減衰定数の推定値は，2 点，5 点および 6 点加振を行った場合の，それぞれ，1～12点の応答から得られる．しかし，それぞれの応答点に節になる点がいくつかあり，この点の推定値は，誤差が大きい．明らかに妥当ではない推定値を除いて得られた推定値の平均を図示した．

1）固有振動数の推定

SN 比を 0 ％から20％まで 5 ％づつ増加させた観測応答に対して推定を行った．Fig. 7 (a)は，1 次振動から 7 次振動までの推定誤差を示したものである．点線がモード円適合法，実線が多自由度適合法による結果である．どの方法によっても，推定誤差は 5 ％以内にある．SN 比が増加すると，推定誤差も増加する．しかし，多自由度曲線適合法では，5 次振動を除いて，推定精度は，1 ％以内に収まっている．振動数の推定については，多自由度曲線適合法による推定の改善がなされていることがわかる．

2）減衰定数の推定

Fig. 7 (b)に両推定法による，減衰定数の推定誤差を



(a) Ccompliance without observation noise
(b) Compliance of observed response
(c) Compliance of time averaged response

Fig. 6　Compliance of response

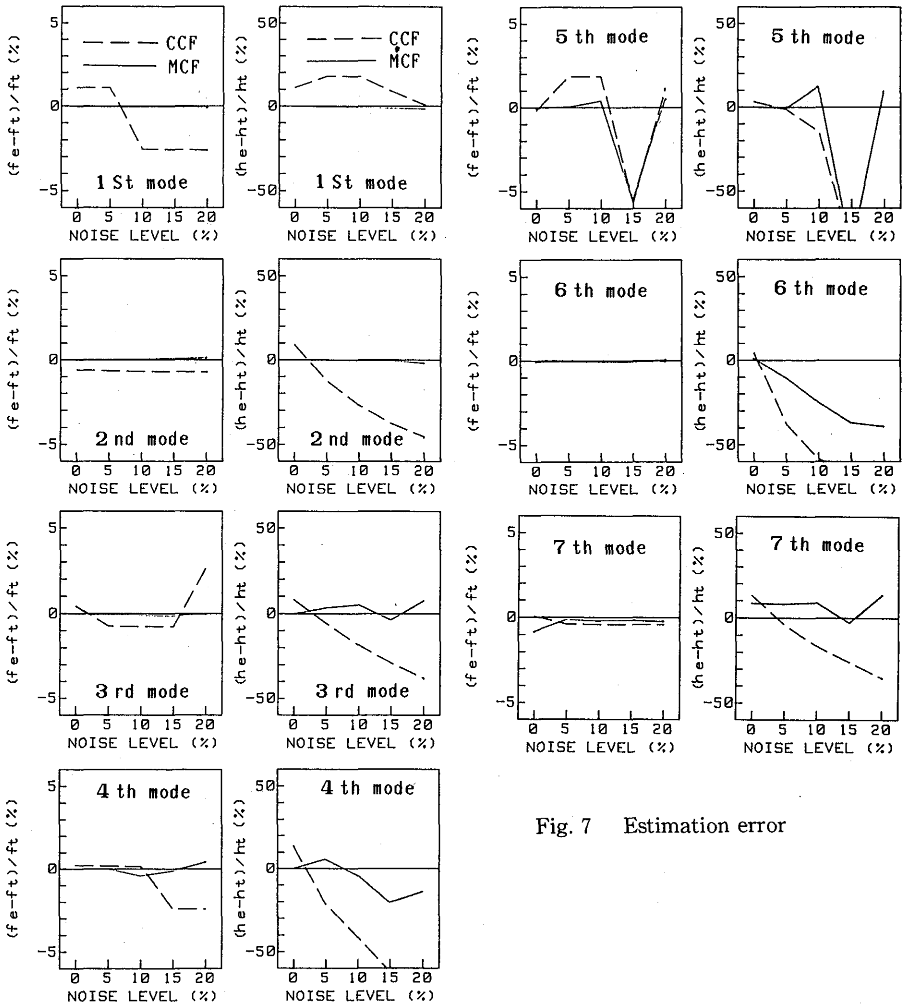


Fig. 7 Estimation error

示した．モード円適合法では，推定誤差の関係を見ると，SN 比の増加に伴って推定誤差は増加する．一方，多自由度曲線適合法では，5次振動では，推定誤差は50%を超えるが，それ以外では50%以内に収まっており，モード円適合法と比べて高い精度の推定が可能であることを示している．特に，1次から4次振動においては，SN 比が20%の場合でも，10数%の誤差で減衰定数を推定している．

3）振動モードの推定

SN 比10%の観測応答の場合，Fig. 8 は，1次から7次振動までのモード円適合法による振動モードの推定値を示したものである．実線は，有限要素法による解，○が推定結果である．2点，5点および6点を加振しても，1～12点の内いずれかが節かあるいは節に近い点になる．そこで，この図のモードは，3点の加振によって得られたモードの中から，真のモードに近いものを表示したものである．4次振動までは，図形の上で識別できない程度に真のモードと一致している．高次モードの5～7次振動において，真のモードと実測に若干の差が表われるが，振動モードを推定するのには十分な精度である．多自由度系曲線適合法による結果とモード円適合の結果を比較すると，多自由度曲線適合法による推定が，高次振動の推定において改善される．しかし，モードの推定においては，モード円適合法の推定によって，十分な精度の推定が可能であることが明らかになった．

6．おわりに

著者らは，道路橋の振動測定の新しい方法として，衝撃加振試験法を提案している．このような実測においては，測定データに観測雑音が含まれており，雑音のレベルがパラメータの観測精度に直接影響する．本研究では，観測雑音の発生と雑音除去対策を考慮した構造物の衝撃加振シミュレータを作成した．トラスド

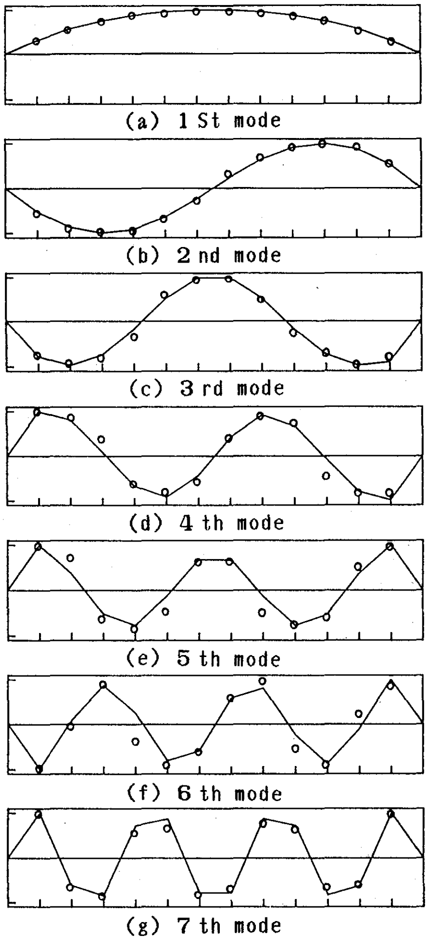


Fig. 8 Estimated modes by modal circle fitting method

ランガー橋の衝撃加振シミュレーションを行ない，モード円適合法と多自由度曲線適合法より，この橋梁のモーダルパラメータを推定した．さらに，応答と観測雑音のSN比に対するパラメータの推定誤差より，これらの推定法の信頼性について検討を加えた．得られた結果を要約すると，次のようになる．

(1) シミュレーションによりトラスドランガー橋の衝撃加振を行ない，加算平均による雑音除去対策の有効性を検討した．5回の加振より得られた観測応答を時間領域で加算平均すると，SN比が約½程低下することが確認できた．

(2) 衝撃加振シミュレーションより，トラスドランガー橋の振動数，減衰定数および振動モードの推定を試みた．モード円適合法では，応答に高いレベル，20%程度の雑音が付加されている場合でも，それぞれのパラメータについて信頼性のある推定が可能であることが確認できた．特に，モードの推定が有効であることがわかった．

(3) 多自由度曲線適合理論では，モード円適合法より得られた推定値を初期値として，パラメータの推定精度を高めることができた．特に，減衰定数の推定においては，高い精度の推定が可能である．

(4) 多自由度曲線適合理論では，非線形最小二乗法を用いて解を求める必要がある．通常の正規方程式による解法では，数値計算は不安定になる．本論文で用いたMarquart法によれば安定した解が得られる．

参考文献

1) 加藤・島田：橋梁の現地振動実験法，土木学会誌12月号，pp. 38-42，1981.
2) 小坪・島野：常時微動測定による構造物の振動性状解析，土木学会論文報告集，No.222，pp. 25-35，1974.
3) 岡林・原・太田・森：道路橋の衝撃加振試験による動特性推定，九州橋梁・構造工学研究会，土木構造・材料論文集第3号，pp. 107-113，1988.
4) 岡林・原：道路橋振動特性測定における衝撃加振法の適用，構造工学論文集，Vol. 34A，pp. 731-738，1988.
5) 長松：モード解析，培風館，1985.
6) Ewins, D. J, : Modal Testing : Thory and Practice, Research Studies Press LTD, England, 1984.
7) 中川・小柳：最小二乗法による実験データ解析，東京大学出版会，pp. 95-124，1987.
8) 刀根：プレイマイコンシリーズ① BASIC，培風館，pp. 108-113，1981.