

ねじりと曲げを受ける鋼管部材の弾塑性挙動

修 行 稔* · 江 藤 英 詞**
 増 崎 達 夫*** · 谷 口 秀 澄****

Inelastic Behavior of Steel Members with Hollow Circular Section under Combined Bending and Torsional Load

by

Minoru SHUGYO*, Eiji ETOH**, Tatsuo MASUZAKI***
 and Hidesumi TANIGUCHI****

An advanced plastic hinge method for steel members with hollow circular section is presented in this paper. This method uses the tangent coefficient matrix obtained by the numerical integration about the member section to calculate the generalized plastic strain increments. The effect of the shear stress due to torsional load is considered in the procedure. The accuracy of the stiffness matrix is examined by some numerical examples.

1. 序

著者の一人は先に H 形断面を持つ鋼構造立体骨組部材の弾塑性接線剛性行列を、塑性関節法に新しい考え方を導入して導いた¹⁾。この剛性行列は、対象が薄肉開断面材であるところから、材軸回りのねじりモーメントによるせん断応力が部材の塑性的な挙動におよぼす影響が考慮されていない。鋼管などの閉断面部材では、この影響が無視できない場合も有り得る。本論文では文献1で示した手法を援用して、材軸回りのねじりモーメントが降伏断面の力学的挙動におよぼす影響を考慮した弾塑性接線剛性行列を導く。ねじりの効果を考慮した鋼管部材の弾塑性接線剛性行列としては、断面の一般化応力を引数とする降伏曲面と塑性流れ則を用いたより簡略なものが既に著者の一人によって提示されているが²⁾、要求される解析精度および計算機環境や計算コストなどを勘案していずれかを採用すれば

よい。もちろん両者の混用も可能である。

2. 部材の弾塑性接線剛性行列

2.1 幾何学的非線形剛性

鋼管部材を対象とし、部材座標系として部材の一端 i の図心を原点にして材軸方向に x 軸、これと右手直交系をなすように y, z 軸をとる。部材を線材と考え、曲げ変形を3次、材軸方向変形と材軸回りのねじり変形を1次の関数で仮定してエネルギー原理を適用すれば、次式を満足する幾何学的非線形剛性 \mathbf{K}^e が得られる。

$$d\mathbf{Q} = \mathbf{K}^e d\mathbf{q} \quad (1)$$

ここに、 \mathbf{Q} と \mathbf{q} は部材端力と部材端変位であり、それぞれ次の12成分からなる。

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{Q} &= [F_{xi} F_{yi} F_{zi} M_{xi} M_{yi} M_{zi} F_{xj} F_{yj} F_{zj} M_{xj} M_{yj} M_{zj}]^T \\ \mathbf{q} &= [u_i v_i w_i \theta_{xi} \theta_{yi} \theta_{zi} u_j v_j w_j \theta_{xj} \theta_{yj} \theta_{zj}]^T \end{aligned} \right\} (2)$$

平成2年10月1日受理

*構造工学科 (Department of Structural Engineering)

**旭化成 (Asahikasei Industries Co., Ltd.)

***日産自動車 (Nissan Motor Co., Ltd.)

****十八ソフト (18 Software Co., Ltd.)

部材の任意点の各座標軸方向の変位成分を u, v, w , で表すと, (1)式の導出に用いたひずみ成分は次の通りである。

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \\ \gamma_{xz} &= \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \\ \epsilon_y &= \epsilon_z = \gamma_{yz} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

(3)式中の各変位成分は, x 軸上の各座標軸方向の変位成分と x 軸回りの回転をそれぞれ u_0, v_0, w_0, ϕ_0 として次の式で得た。

$$\left. \begin{aligned} u &= u_0 - y \frac{dv_0}{dx} - z \frac{dw_0}{dx} \\ v &= v_0 - z \phi_0 \\ w &= w_0 + y \phi_0 \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

2.2 塑性関節の塑性接線係数行列

2.2.1 繊維の弾塑性剛性

本解法では塑性関節の塑性変形増分の算定にその断面の塑性接線係数行列を用いる。この係数行列は, 塑性関節部を断面に垂直な微小な繊維に分割し, 各繊維のその時点での剛性を断面に関して数値積分することによって得られる。従って, まず繊維の弾塑性剛性³⁾を求める必要がある。

材料が Mises の降伏条件に従うものとし, 断面形状が降伏後も変わらないと仮定すると, 繊維の降伏条件は次のようになる。

$$f(\sigma_{ij}) = \sigma^2 + 3\tau^2 - \sigma_y^2 = 0 \quad (5)$$

ここに, σ は部材に働く軸力および曲げモーメントによって生じる垂直応力, τ は材軸回りのねじりモーメントによって生じるせん断応力, σ_y は素材の降伏応力である。いま一般的に, 前負荷による降伏曲面の移動量を α_{ij} で表すと, 前負荷後の降伏曲面は,

$$f(\sigma_{ij}, \alpha_{ij}) = 0 \quad (6)$$

となり, 塑性ひずみ増分量を規定する正のスカラールを $d\lambda$ とすると, 塑性流れ則より塑性ひずみ増分が次式で得られる。

$$d\epsilon_{ij}^p = \frac{\partial f(\sigma_{ij}, \alpha_{ij})}{\partial \sigma_{ij}} d\lambda \quad (7)$$

ここで塑性ひずみ増分 $d\epsilon_{ij}^p$ の c 倍 $cd\epsilon_{ij}^p$ が, 応力増分 $d\sigma_{ij}$ の降伏曲面の外側法線方向への正射影であると仮定すると, 初期降伏曲面が(5)式の場合, 比例定数 $d\lambda$ は次のようになる。

$$d\lambda = \frac{m_1 d\sigma + m_2 d\tau}{a} \quad (8)$$

ここに,

$$a = c(m_1^2 + m_2^2), \quad m_1 = \sigma - \xi, \quad m_2 = \tau - \eta \quad (9)$$

であり, ξ は σ 方向の, η は τ 方向の降伏曲面の現在までの移動量である。 c は素材のひずみ硬化挙動を表すパラメータであるが, 素材の一軸引張り状態における応力~塑性ひずみ関係の勾配 H' との間に次の関係がある。

$$c = \frac{2}{3} H' \quad (10)$$

さて, (8)式を(7)式に代入すると塑性ひずみ増分が次式で得られる。

$$d\epsilon^p = \frac{m_1^2 d\sigma + m_1 m_2 d\tau}{a} \quad (11)$$

$$d\gamma^p = \frac{m_2 m_1 d\sigma + m_2^2 d\tau}{a}$$

ところで, 繊維の弾性ひずみ増分 $d\epsilon_{ij}^e$ と応力増分 $d\sigma_{ij}$ との関係は,

$$\begin{Bmatrix} d\epsilon^e \\ d\gamma^e \end{Bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d\sigma \\ d\tau \end{Bmatrix} \quad (12)$$

であり, 繊維の全ひずみ増分 $d\epsilon_{ij}$ は弾性成分と塑性成分との和であると考えられるから, (11)式と(12)式より,

$$\begin{Bmatrix} d\epsilon \\ d\gamma \end{Bmatrix} = \left[\frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix} + \frac{1}{a} \begin{bmatrix} m_1^2 & m_1 m_2 \\ m_2 m_1 & m_2^2 \end{bmatrix} \right] \begin{Bmatrix} d\sigma \\ d\tau \end{Bmatrix} \quad (13)$$

が得られ, その逆関係として次式を満足する弾塑性応力マトリックス D^p が得られる。

$$\begin{Bmatrix} d\sigma \\ d\tau \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d\epsilon \\ d\gamma \end{Bmatrix} \equiv D^p \begin{Bmatrix} d\epsilon \\ d\gamma \end{Bmatrix} \quad (14)$$

なお, 降伏曲面は Ziegler の移動硬化則に従って移動するものとする。従って α_{ij} の増分は,

$$d\alpha_{ij} = (\sigma_{ij} - \alpha_{ij}) d\mu \quad (15)$$

で得られる。ここに, $d\mu$ は正のスカラールであり, 降伏曲面の全微分が 0 であるという条件から容易に求められる。初期降伏曲面が(5)式の場合,

$$d\mu = \frac{m_1 d\sigma + 3 m_2 d\tau}{\sigma_y^2} \quad (16)$$

となる。

2.2.2 塑性関節の塑性接線係数行列

断面の一般化応力 F と一般化ひずみ Δ を次のように定義する (Fig. 1)。

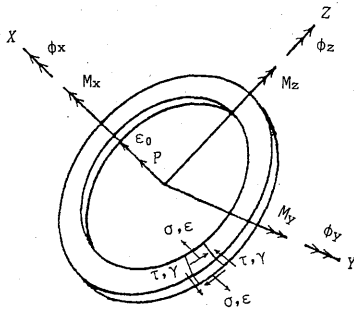


Fig. 1 Generalized stresses and strains.

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= [F_x, M_x, M_y, M_z]^T \\ \Delta &= [\epsilon_0, \phi_x, \phi_y, \phi_z]^T \end{aligned} \quad (17)$$

ここに、 F_x は軸力、 M_x はねじりモーメント、 M_y と M_z は曲げモーメント、 Δ の成分はそれぞれ \mathbf{F} の成分に対応する一般化ひずみである。一般化応力の増分と繊維の応力増分との関係、および一般化ひずみの増分と繊維のひずみ増分との関係はそれぞれ次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} dF_x &= \int d\sigma dA, & dM_x &= \int d\tau r dA \\ dM_y &= \int d\sigma z dA, & dM_z &= -\int d\sigma y dA \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

$$\left. \begin{aligned} d\epsilon &= d\epsilon_0 + z d\phi_y - y d\phi_z \\ d\gamma &= r d\phi_x \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

ここに、 r は板厚中心までの半径である。(14式)と(19式)を(18式)に代入すると、一般化応力増分と一般化ひずみ増分の関係が次のように求められる。

$$\begin{aligned} d\mathbf{F} &= \begin{bmatrix} \int D_{11} dA & \int r D_{12} dA & \int z D_{11} dA & -\int y D_{11} dA \\ \int r D_{21} dA & \int r^2 D_{22} dA & \int r z D_{21} dA & -\int r y D_{21} dA \\ \int z D_{11} dA & \int r z D_{12} dA & \int z^2 D_{11} dA & -\int y z D_{11} dA \\ -\int y D_{11} dA & -\int r y D_{12} dA & -\int y z D_{11} dA & \int y^2 D_{11} dA \end{bmatrix} d\Delta \\ &\equiv \mathbf{s} d\Delta \end{aligned} \quad (20)$$

いま、弾性時の \mathbf{s} を \mathbf{s}^e とし、 $d\Delta$ の弾性成分を $d\Delta^e$ で、同じく塑性成分を $d\Delta^p$ で表すと次式が成立する。

$$\left. \begin{aligned} d\mathbf{F} &= \mathbf{s}^e d\Delta^e \\ d\mathbf{F} &= \mathbf{s}^p d\Delta^p \\ d\Delta &= d\Delta^e + d\Delta^p \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

(21)式の第2式中の \mathbf{s}^p が塑性接線係数行列である。(20)式を(21)式に代入して整理すると \mathbf{s}^p が得られる。

$$\mathbf{s}^p = [\mathbf{s}^{-1} - \mathbf{s}^{e-1}]^{-1} \quad (22)$$

\mathbf{s}^e は断面の状態にかかわらず一定値を持つ。なお、 \mathbf{s}

の算定に当たっては反復計算と収束判定が必要であるため、諸量を無次元化して行う方がよい。⁴⁾

2.3 部材の弾塑性接線剛性行列

塑性関節の塑性接線係数行列として(22)式の \mathbf{s}^p を用い、塑性変形成分が軸力、二軸曲げモーメントおよびねじりモーメントに対応する4成分のみであるとして文献1の方法を適用すれば、次式を満足する弾塑性接線剛性行列 \mathbf{K}^p が得られる。

$$d\mathbf{Q} = \mathbf{K}^p d\mathbf{q} \quad (23)$$

また、剛性行列中に含まれる要素両端の仮定の弾塑性長さ l_{pi} 、 l_{pj} の算定も、算定に用いる部材端力の成分のうち、そりモーメントをねじりモーメントに置き換えることによって文献1と全く同じ考え方で行える。

3. 実験

3.1 実験計画

供試する材料は最も一般的な STK41 を用いる。供試体は片持りとして自由端にせん断力とねじりモーメントを比例的に負荷する。負荷は1.5サイクルの繰返し負荷とする。

3.2 供試体

供試体は101.6φ×4.0tの STK41 材である。鋸切断した後53.8cmの長さに機械仕上げして両端部に厚さ3cmの鋼板を溶接した。その後、残留応力を除去するために約630℃1時間の焼鈍を行い、同じ材料から採取した JIS12 号の取張試験片を同時に焼鈍した。

3.3 実験装置

実験装置を Fig. 2 に示す。供試体(a)は断面の主軸の一つを鉛直方向に合わせて反力壁に高力ボルト4本で固着される。供試体のもう一方の端には H 形鋼製で剛性の高いアーム(b)が取り付けられる。アームの他端には自動調心コロ軸受け(c)を介して引張り圧縮 10 ton 形のオイル・ジャッキ(d)と引張り圧縮両用のロード・セル(e)が取り付けられ、床に固定された H 形鋼にユニバーサル・ジョイントを介して接合されている。ジャッキによって荷重が負荷されれば、供試体にはせん断力とねじりモーメントがほぼ比例的に負荷されることになる。荷重の計測はロード・セルで、たわみとねじれ角の計測は供試体の自由端に溶接されている3cmの鋼板の板厚中心線上に設置された2個の変位計(f)で行う。また、供試体の反力壁側の厚板の下部にも変位計を設置してすべりの有無を監視する。

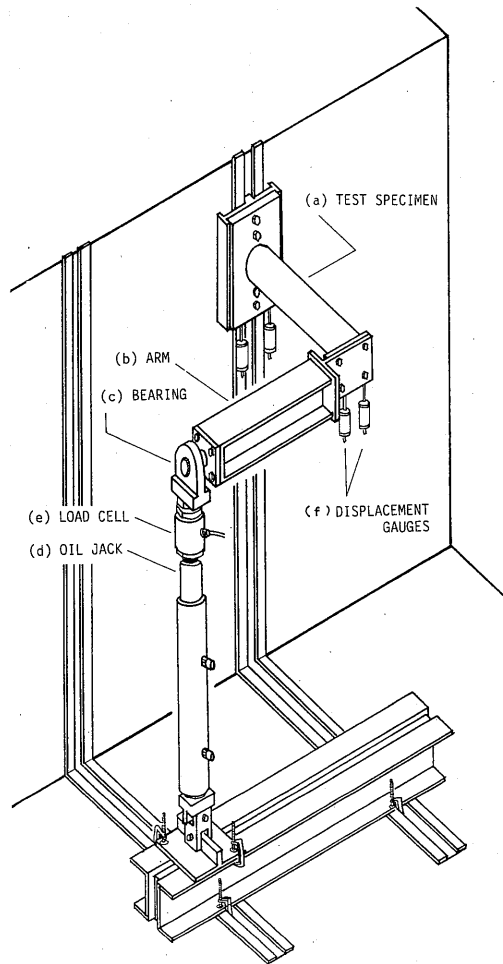


Fig. 2 Test setup.

3.4 実験方法

供試体には、壁に固定する方の厚板との溶接部先端から10mmのところ引いた線と断面主軸が交わる点(計4点)に三軸ロゼットゲージを貼付する。ゲージの健全さをチェックしたあと、供試体を反力壁に固定する。供試体の他の端にアームとオイル・ジャッキおよびロード・セルを取り付け、4個の変位計を供試体両端部の厚板の下部に設置する。この状態でロード・セル、変位計およびひずみゲージの零調整を行う。オイル・ジャッキの下部をユニバーサル・ジョイントを介して床に固定すれば実験可能となる。Fig. 3には実験系をモデル化して描いているが、変位計 D_1 の読みを δ_1 、 D_2 の読みを δ_2 とするとたわみ δ とねじれ角 θ は次式で得られる。

$$\delta = (\delta_1 + \delta_2) / 2 \quad (23)$$

$$\theta = \tan^{-1}((\delta_2 - \delta_1) / l_d) \quad (24)$$

なお、供試体にはアームとオイル・ジャッキおよびロード・セルの自重が初期荷重として負荷されるのに加え、反力壁のレールの寸法の制約から供試体固定用の高力ボルトのサイズを大きくとれずボルトの変形の影響が無視できないが、これらの影響についてはあらかじめ弾性域での実験によって検定しておき、実験終了後にデータの修正を行うこととした。

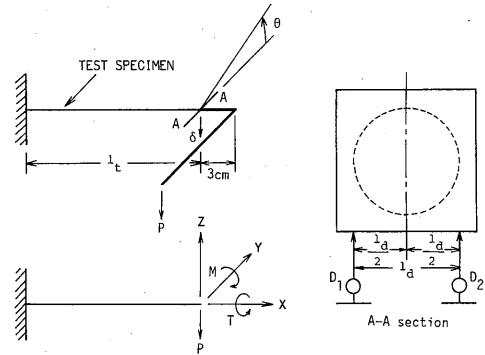


Fig. 3 Loading and measuring system.

4. 実験結果と解析結果の比較

供試体の実寸法は直径 $D=10.17\text{cm}$ 、板厚 $t=0.41\text{cm}$ 、固定端からたわみ測定点までの長さ $l_t=55.30\text{cm}$ である。また、単純引張り試験の結果は降伏応力 $\sigma_y=3.06\text{t/cm}^2$ 、弾性係数 $E=2120\text{t/cm}^2$ であった。荷重 P によって供試体の固定端部に生じる曲げモーメントとねじりモーメントの比は、初期降伏曲げモーメント M_{yy} と初期降伏ねじりモーメント M_{yx} を基準にとると、およそ1:1である。

解析に用いた諸量は次の通りである。断面積 $A=12.57\text{cm}^2$ 、断面二次モーメント $I_y=I_z=150.0\text{cm}^4$ 、ねじれ定数 $J=299.4\text{cm}^4$ 、素材の降伏応力 $\sigma_y=3.06\text{t/cm}^2$ 、ヤング率 $E=2120\text{t/cm}^2$ 、横弾性係数 $G=810.0\text{t/cm}^2$ 。解析は本解法¹⁾および既報の一般化応力による降伏曲面を用いる方法²⁾の両者で行うこととし、分割要素数の影響を調べるため、おのおの1要素近似と10要素近似の二種類で行った。本解法の場合、素材の降伏後のひずみ硬化係数 H を $E/100$ とし、塑性関節部の塑性接線係数行列を計算するための断面分割は60等分割として、応力ひずみ関係は繊維の重心について追跡した。一般化応力を用いる方法では、断面降伏後の硬化係数を弾性時の $1/100$ とした。荷重は、実験の状況を再現するため、Fig. 3に示すように供試体の自由端の Z 方向にせん断力 P 、 Y 軸回りにモーメント M 、 X 軸回りにトルク T を、数値的に $-1:3:73$ の割合で比例的に加えた。解析は除荷点のたわみの値が

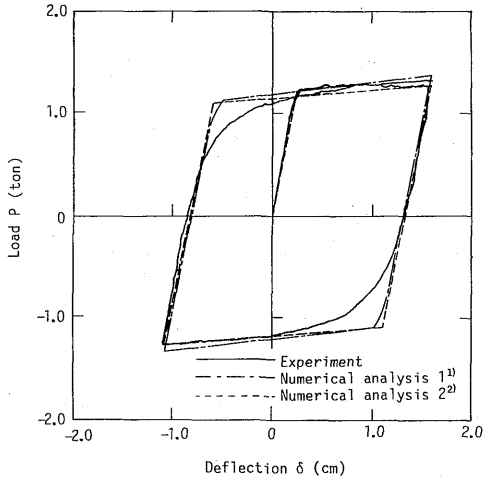


Fig. 4 Load-deflection relationships at the free end.

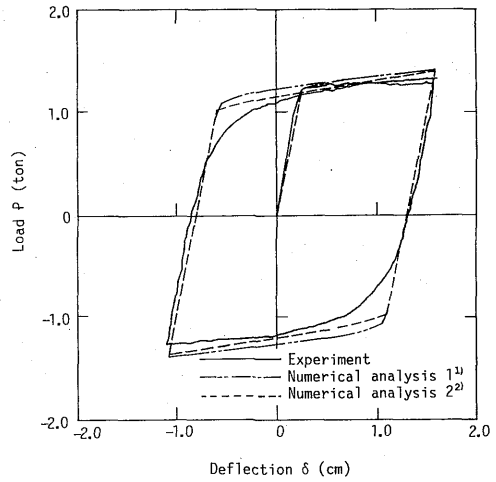


Fig. 6 Load-deflection relationships at the free end.

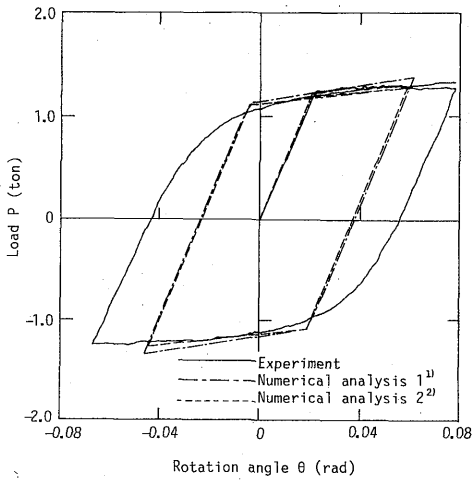


Fig. 5 Load-rotation angle relationships at the free end.

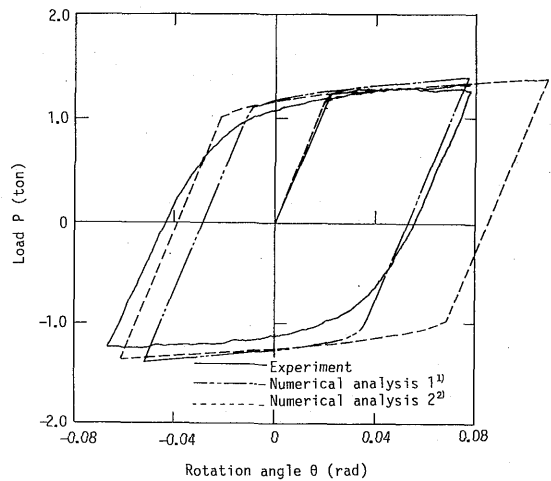


Fig. 7 Load-rotation angle relationships at the free end.

実験値と一致するように制御して行った。

Fig. 4 に荷重～たわみ関係, Fig. 5 に荷重～ねじれ角関係を, それぞれ1要素近似による解析の結果とともに示す。この供試体にせん断のみが負荷されたときに固定端の曲げモーメントが全塑性曲げモーメント M_{py} (M_{yy} の1.27倍) に達するのは, 計算上ではせん断力が2.08ton のときであるから, ねじりモーメントの影響でかなりの耐力低下がおきていることがわかる。解析結果は耐力を極めてよい精度で予測しているものの, ねじり変形をかなり少なく評価していることがわかる。解法の違いによる差はほとんど見られない。

Fig. 6 と Fig. 7 は10要素近似による解析結果との比較である。荷重～たわみ関係は1要素近似の場合とほとんど同じであるが, 荷重～ねじれ角関係は1要素近似のときから大きく変化し, 二つの解法とも1要素近似に比してねじり変形を大きく算定している。これは部材の内部に節点が存在するために, 塑性的な挙動がより正確に評価されたためであろうが, 本解法の結果が実験結果により近づくのに較べて, 一般化応力による降伏曲面を用いる解法は, むしろ誤差が大きくなる傾向が見られる。

Fig. 8 と Fig. 9 は、それぞれ図中に示した繊維の荷重～垂直ひずみ関係と荷重～せん断ひずみ関係の、本解法による結果との比較である。実験結果は固定端の溶接部先端から 1 cm のところに貼付されたひずみゲージの値、解析結果は固定端断面の値であるから厳密な比較はできないが、本解法の結果は妥当なものであると言えよう。また、要素分割数の違いによる差異はそれほど大きなものではない。

以上、わずか 1 体の実験結果との比較ではあるが、部材にねじりモーメントが負荷される可能性のある骨組構造物の弾塑性解析に、本解法も文献 2 の解法も 1 部材 1 要素近似程度で充分使用し得ると思われる。ねじり変形にある程度の誤差が生じるものの、耐力には充分な精度が期待できよう。ねじり変形を正確に知る

ためには、本解法による 1 部材多要素近似解析が必要である。

4. 結 語

本論文では、円形鋼管部材を対象とした弾塑性接線剛性行列を導いた。この剛性行列は、塑性関節部の部材繊維の塑性的な挙動に Mises の降伏条件と Ziegler の移動硬化則を仮定して導かれており、ねじりモーメントが部材の塑性的挙動におよぼす影響をかなり厳密に考慮することができる。解法の精度を実験結果との比較によって検討し、ねじり変形にある程度の誤差を覚悟すれば、耐力に関しては 1 部材 1 要素近似で充分な精度が期待できることを示した。

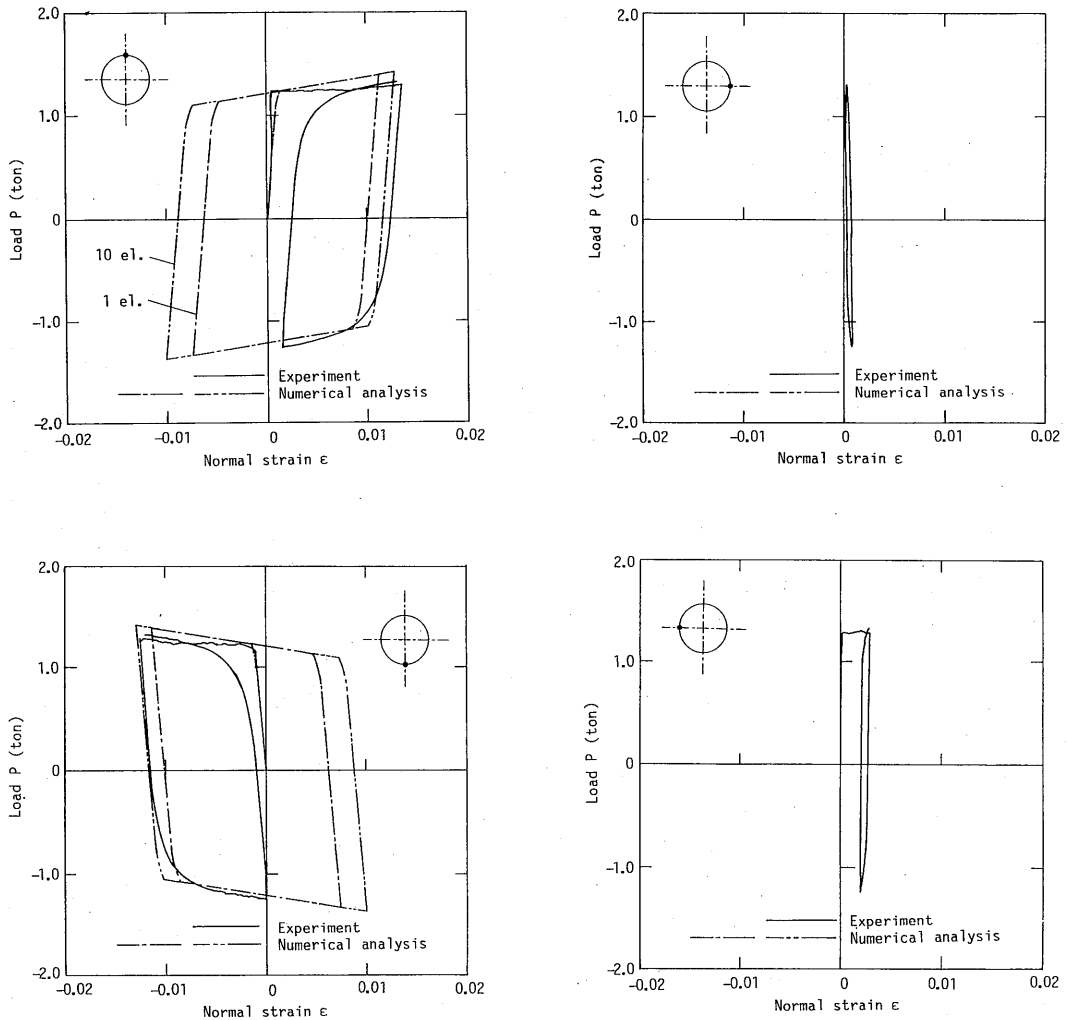


Fig. 8 Load-normal stress of a fiber relationships.

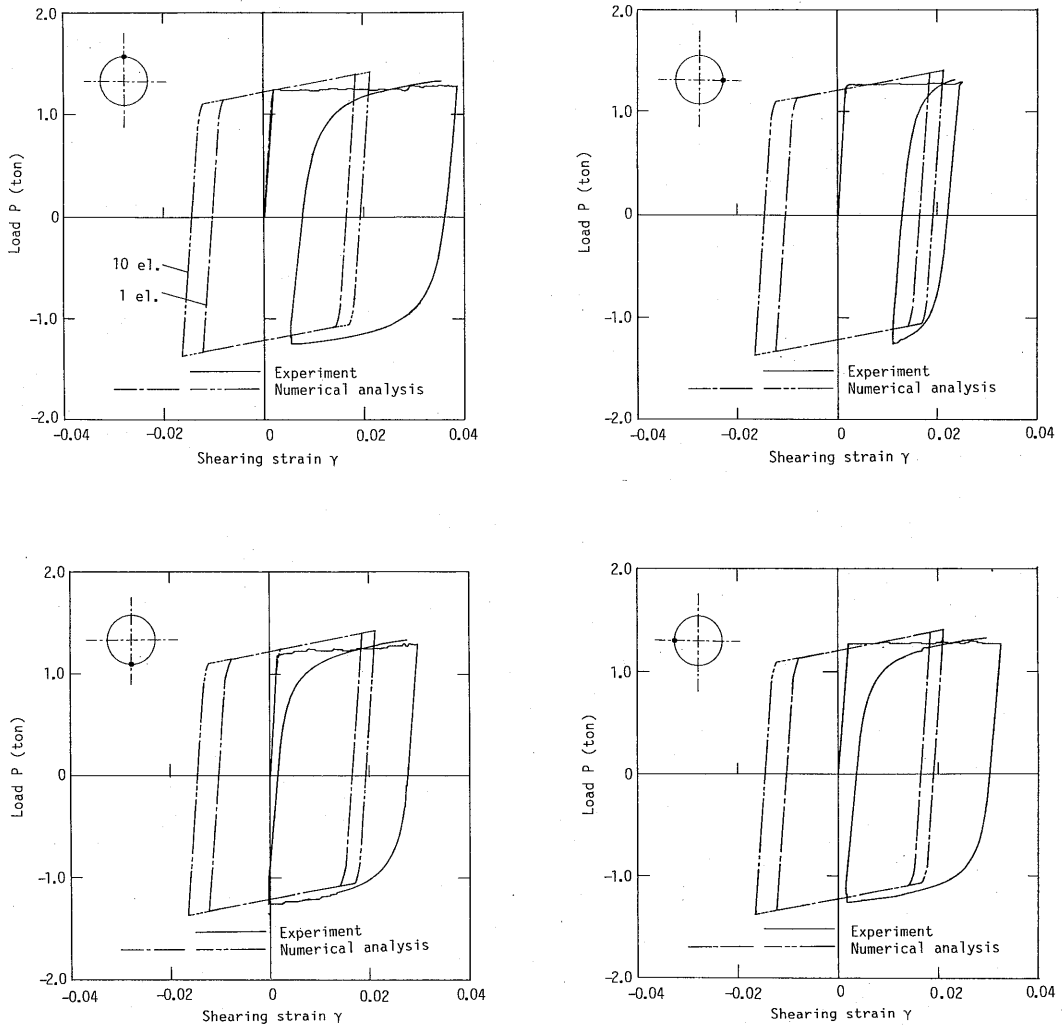


Fig. 9 Load-shear stress of a fiber relationships.

参考文献

- 1) Shugyo, M. : A new plastic hinge method for steel space frames, Theoretical and applied Mechanics, Vol.36, 1988, pp. 245-262.
- 2) 修行, 早田 : 鋼管部材の弾塑性接線剛性行列, 日本建築学会構造系論文報告集, 第400号, 1989, pp. 91-99.

- 3) Armen, H. Jr., Isakson, G. and Pifko, A. : Discrete Element Method for the Plastic Analysis of Structures subjected to Cyclic Loading, Int. Jour. Numerical Method in Engineering, Vol.2, 1970, pp. 189-206.
- 4) Chen, W. F. and Atsuta, T. : Theory of beam-columns, Vol.2, McGraw-Hill, 1977.