熱勾配をもつ先端弾性支持変断面片持ちばりの動的安定性

高橋和雄*・其田智洋**
小西保則*

Parametric Instability of a Non-uniform Beam with Thermal Gradient and Elastic End Support

by

Kazuo TAKAHASHI*, Tomohiro SONODA**
and Yasunori KONISHI*

The dynamic stability of a non-uniform beam with thermal gradient and elastic end support subjected to a pulsating axial load is analysed.

An exact analytical approach to the parametric dynamic systems governed by Mathieu equation is presented.

The vibration and buckling properties for thermal gradient and end support stiffness are examined. Thereafter, dynamic unstable regions are obtained under various thermal gradient and end support stiffness and compared with the previous solution.

1．まえがき

柔軟宇宙構造物のダイナミックスが最近議論されるようになってきている。柔軟なゆえに推進力などによってダイバージェンスやフラッターなどの動的不安定が起こるおそれがある。また，原子力工学，宇宙工学などにおいては，温度が弾性定数に与える影響も重要になってきている。したがって，熱の影響を考慮した構造部材の動的安定性を把握しておくことが，柔軟宇宙構造物の制振対策を考えるときに必要である。このような研究の第一歩として，Kar[1]らは線形的な熱勾配をもつ先端でバネ支持された変断面片持ちばりの動的安定性を明らかにしている。しかし，不安定領域の解法として Bolotin[2]の近似解法を用いているために，すべての不安定領域を求めているわけではない。

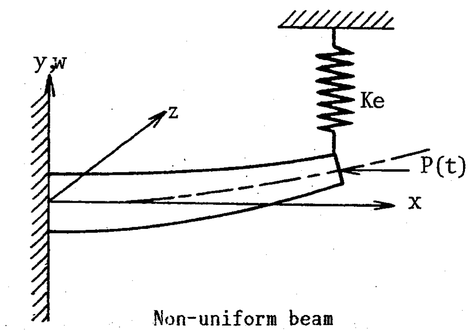
Bolotin の方法で得られる不安定領域は単純共振のみが求められる。単純共振に加えて，動的安定問題では，結合共振が重要な場合もある。そこで，本研究では，著者らが提案しているより厳密解に近い方法[3]を用いて，同じ問題を解析するものである。解法を示した後，数値解析において，熱勾配をもつ先端弾性支持変断面ばりの固有振動特性，座屈特性および動的不安定領域を明らかにし，Kar[1]らの解と比較する。

2．基礎式および解法

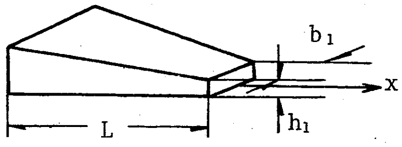
先端で周期的軸方向荷重 $P(t)=P_0+P_t\cos\omega t$ を受ける長さ方向に線形的に変化する長方形断面をもつ先端弾性支持の片持ちばりの一般図を Fig. 1 に示す。また，長さ方向に一様な温度勾配（定常温度分布）を

平成2年10月1日受理

*土木工学科（Department of Civil Engineering）
**大学院修士課程土木工学専攻（Graduate Student, Department of Civil Engineering）



Non-uniform beam



Tapered beam

Fig. 1 Geometry and configuation of the system.

もつ。はりの任意点のたわみ w, ヤング率 $E(x)$，断面2次モーメント $I(x)$，断面積 $A(x)$，密度 ρ とすれば，Bernoulli-Euler ばりの理論に基づくはりの運動方程式および境界条件は次のように与えられる。

運動方程式：

$$L(w)=\frac{\partial^2}{\partial x^2}[E(x)I(x)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}]+P(t)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\rho A(x)\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=0 \qquad (1)$$

境界条件：

$$w(0,t)=0,\quad \frac{\partial w(0,t)}{\partial x}=0,$$

$$[E(x)I(x)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}]\Big|_{x=L}=0, \qquad (2)$$

$$\{\frac{\partial}{\partial x}[E(x)I(x)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}]+P(t)\frac{\partial w}{\partial x}-K_e w\}\Big|_{x=L}=0$$

上式をはりの長さ L, 自由端の断面（b_1，h_1）とヤング率 E_1 および横波の伝播速度 c を用いて無次元化すると，次式が得られる

$$L(\eta)=\frac{\partial^2}{\partial \xi^2}[S(\xi)T(\xi)\frac{\partial^2\eta}{\partial\xi^2}]+p(\tau)\frac{\partial^2\eta}{\partial\xi^2}+m(\xi)\frac{\partial^2\eta}{\partial\tau^2}=0 \qquad (3)$$

$$\eta(0,\tau)=0,\quad \frac{\partial\eta(0,\tau)}{\partial\xi}=0,$$

$$[S(\xi)T(\xi)\frac{\partial^2\eta}{\partial\xi^2}]\Big|_{\xi=1}=0, \qquad (4)$$

$$\{\frac{\partial}{\partial\xi}[S(\xi)T(\xi)\frac{\partial^2\eta}{\partial\xi^2}]+p(\tau)\frac{\partial\eta}{\partial\xi}-\kappa_e\eta\}\Big|_{\xi=1}=0$$

ここに，$\xi=\frac{x}{L}$, $\eta=\frac{w}{L}$, $\tau=ct$, $\bar\omega=\omega/c$

$$c^2=\frac{E_1I_1}{\rho A_1L^4},\quad p(\tau)=\frac{P(t)L^2}{E_1I_1},\quad \alpha=\frac{P_0}{P^*},$$

$$\beta=\frac{P_t}{P^*},\quad p^*=\frac{P^*L^2}{E_1I_1},\quad \kappa_e=\frac{K_eL^3}{E_1I_1},$$

$$A(\xi)=A_1m(\xi),\quad E(\xi)=E_1T(\xi),$$

$$I(\xi)=I_1S(\xi),\quad P(\tau)=(\alpha+\beta\cos\omega\tau)P^*$$

式(3)の一般解を次のように仮定する。

$$\eta(\xi,\tau)=\sum_{r=1}^{n}f_r(\tau)\eta_r(\xi) \qquad (5)$$

ここに，$f_r(\tau)$：未知の時間関数，$\eta_r(\xi)$：境界条件を満足する座標関数。

式(5)の座標関数として，本論文では $\beta=0$ のときのはりの固有振動形を用いる［Appendix A］。

$$\eta_r(\xi)=\sum_{j=1}a_j^r\{1-\cos(2j-1)\pi\xi/2\} \qquad (6)$$

ここに，a_j^r：定数

式(3)に Galerkin 法を適用すると，

$$\int_0^1 L(\eta)\eta_s\,d\eta=0 \qquad (7)$$

ここに，$s=1,2\cdots$.

式(7)の積分を実行し，行列表示すれば，

$$[M]\{\ddot f(\tau)\}+([K]-\alpha p^*[H]-\beta p^*[H]\cos\bar\omega\tau)\{f(\tau)\}=\{0\} \qquad (8)$$

ここに，
$$M_{ij}=\int_0^1 m(\xi)\eta_j(\xi)\eta_j(\xi)d\xi,$$
$$E_{ij}=\int_0^1 S(\xi)T(\xi)\eta_i''(\xi)\eta_j''(\xi)d\xi,$$
$$H_{ij}=\int_0^1 \eta_i'(\xi)\eta_j'(\xi)d\xi,$$
$$R_{ij}=\eta_i(1)\ \eta_j(1),$$
$$[K]=[E]+\kappa_e[R]$$

$[M]$の逆行列を式(8)に掛けると，

$$[I]\{\ddot f(\tau)\}+([A]-\alpha p^*[B]-\beta p^*[B]\cos\bar\omega\tau)\{f(\tau)\}=\{0\} \qquad (9)$$

ここに，$[A]=[M]^{-1}[K]$，$[B]=[M]^{-1}[H]$

3．動的安定解析

式(9)は連立の Mathieu の方程式であり，その一般解は次のように仮定することができる[3]。

$$\{f(\tau)\}=e^{\lambda\tau}\{\frac{1}{2}\boldsymbol{b}_0+\sum_{k=1}(\boldsymbol{a}_k\sin k\bar\omega\tau+\boldsymbol{b}_k\cos k\bar\omega\tau)\} \qquad (10)$$

ここに，λ：未定定数，$\boldsymbol{b}_0$, $\boldsymbol{a}_k$, $\boldsymbol{b}_k$：未知のベクトル。

式(10)を式(9)に代入して，調和バランス法を適用すれば，未知のベクトルを求めるための同次方程式が得られる。

$$([I]\lambda^2+[A]-\alpha p^*[B])\boldsymbol{b}_0-\beta p^*[B]\boldsymbol{b}_1=\{0\}$$
$$2\{(\lambda^2-k^2\bar{\omega}^2)\ [I]+[A]-\alpha p^*[B]\}\boldsymbol{a}_k-4\lambda k\bar{\omega}\boldsymbol{b}_k-\beta p^*[B](\boldsymbol{a}_{k+1}+\boldsymbol{a}_{k-1})=\{0\} \quad (11)$$
$$4\lambda k\bar{\omega}[I]\boldsymbol{a}_k+2\{(\lambda^2-k^2\bar{\omega}^2)\ [I]+[A]-\alpha p^*[B]\}\boldsymbol{b}_k-\beta p^*[B](\boldsymbol{b}_{k+1}+\boldsymbol{b}_{k-1})=\{0\}$$

上式の級数を有限項（$n=N$）で打ち切れば，次のように行列表示される。

$$[D]\{X\}=\{0\} \quad (12)$$

ここに，$[D]$:係数行列 $\{(2N+1)\times(2N+1)\}$，

$$\{X\}=\{\boldsymbol{b}_0\boldsymbol{b}_1\boldsymbol{b}_2\cdots\boldsymbol{b}_N\,\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_2\cdots\boldsymbol{a}_N\}^T$$

係数行列$[D]$は，λ^0（定数），λ^1，λ^2のべき項で展開できる。すなわち，

$$[D]=[M_0]-\lambda\ [M_1]-\lambda^2\ [M_2] \quad (13)$$

ここに，$[M_0]$，$[M_1]$，$M_2]$：λ の0次，1次，2次の係数行列。

いま，$\{Y\}=\lambda\{X\}$なる新しいベクトルを導入すれば，式(12)は2倍サイズの固有値問題に変換される。

$$\begin{vmatrix} [0] & [I] \\ [M_2]^{-1}\ [M_0] & -[M_2]^{-1}\ [M_1] \end{vmatrix} \begin{Bmatrix} X \\ Y \end{Bmatrix}=\lambda\begin{Bmatrix} X \\ Y \end{Bmatrix} \quad (14)$$

ここに，$[0]$，$[I]$:$[M_0]$，$[M_1]$，$[M_2]$ と同じ大きさの零行列，単位行列

式(14)は一般に非対称行列であり，複素固有値問題に帰着される。

4．計算パラメーター

片持ちばりの断面は幅 b，高さ h の長方形断面で，長さ方向に直線的に変化するものとする。

$$b=b_1\ [1+\alpha^*(1-\xi)] \quad (15)$$
$$h=h_1\ [1+\beta^*(1-\xi)]$$

ここに，α^*，β^*：変断面パラメーター

このとき，質量と断面2次モーメントの分布関数は次のように表される[1]。

$$m(\xi)=[1+\alpha^*(1-\xi)][1+\beta^*(1-\xi)],$$
$$S(\xi)=[1+\alpha^*(1-\xi)][1+\beta^*(1-\xi)]^3 \quad (16)$$

温度は自由端を基準として，線形的に変化するものとする。すなわち，$\psi=\psi_1(1-\xi)$。このとき，ヤング率の変化は次のように表される[1]。

$$E(\xi)=E_1\mathrm{T}(\xi)$$
$$T(\xi)=[1-\delta(1-\xi)], \quad (17)$$

ここに，δ：温度パラメーター

この他に，式(3)，(4)で示したような無次元パラメーターが本論で用いられる。

κ_e:バネパラメーター

α：初期荷重

β：変動荷重の振幅

$\bar{\omega}$：励振振動数

荷重および振動数を無次元化する変断面ばりの1次の座屈荷重 p^*_1 および固有振動数 ω_1 は式(9)を用いて求めることができる［Appendix A, B］。

5．固有振動特性

本研究では片持ちばりの座屈波形を重ねあわせて，固有振動解析を行っている。本解法の有用性を確かめるために，一様断面の片持ちばり（$\kappa_e=0$）および一端固定，他端ヒンジばり（$\kappa_e=\infty$）の1次から3次までの固有値を求めると，Table 1の結果を得る。これらより，いずれも1％以下の精度で一致しており，振動解析に使用できることがわかる。

Table 1　Comparison of the present solution with the exact solution : $\alpha^*=2.0$, $\beta^*=1.0$, $\alpha=0.0$, and $\delta=0.0$.

(a)　Clamped-free beam

	1 st	2 nd	3 rd
present solution	1.8751	4.6949	7.8579
exact solution	1.8751	4.6941	7.8547

(b)　Clamped-simply supported beam

	1 st	2 nd	3 rd
present solution	3.9270	7.0710	10.2174
exact solution	3.9266	7.0686	10.2102

Fig. 2は静的軸力が作用しない（$\alpha=0$）の先端弾性支持（$\kappa_e=1000$）の変断面片持ちばり（$\alpha^*=2.0$, $\beta^*=1.0$）について，1次から3次までの固有振動数 ω_1 の収束状況を示したものである。温度勾配がない場合（$\delta=0$）とある場合（$\delta=0.8$）に分けて表示してあるが，いずれの場合も収束は良好で，3次振動までを対象とすれば6項程度採用すれば十分である。本論文の数値計算には $N=10$を用いることにする。

Fig. 3は1次から3次までの固有振動数 ω_1 と温度勾配 δ との関係を無次元バネ定数 κ_e をパラメーターに表示したものである。温度勾配δが大きくなれば，固有振動数は減少し，その傾向は高次ほど顕著になる。バネの効果は，振動数を高めるが，高次振動になるほど，大きなバネを入れないと効かないことが指摘でき

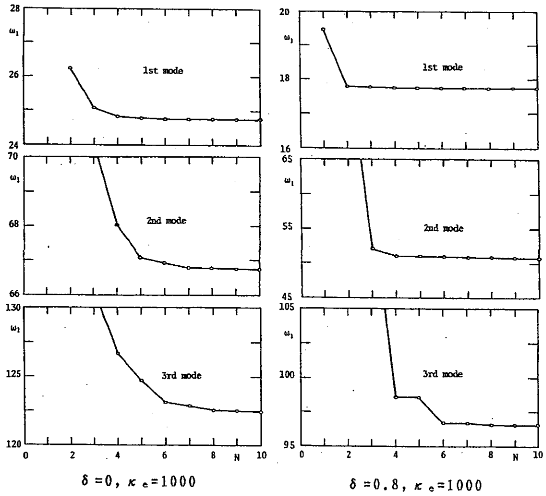


Fig. 2　Convergence of natural frequencies: $\alpha^*=2.0$, $\beta^*=1.0$ and $\alpha=0.0$.

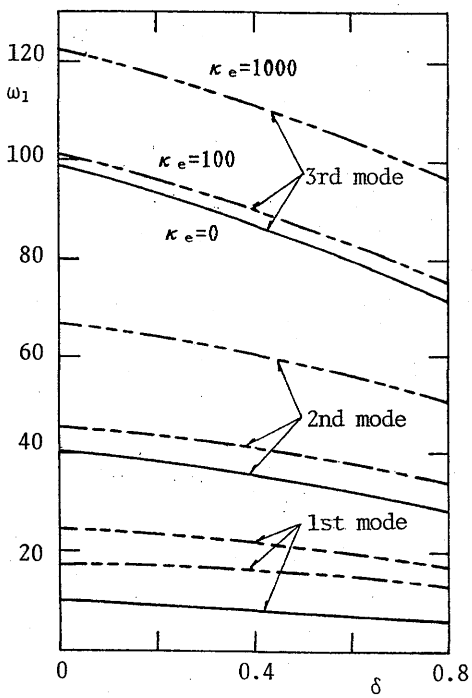


Fig. 3　Relation between natural frequency ω_1 and thermal gradient parameter δ for three values of end support stiffness κ_e : $\alpha^*=2.0$ and $\beta^*=1.0$.

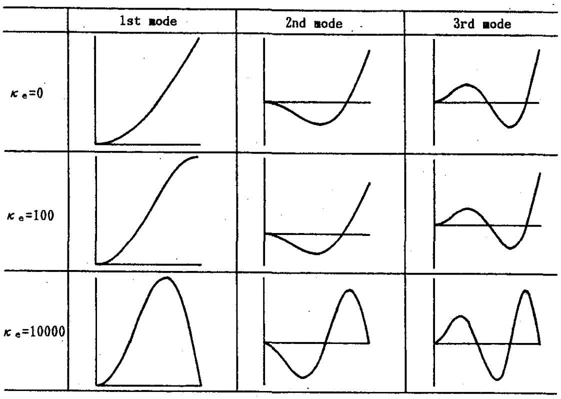


Fig. 4　Variation of frequency modes with end support stiffness κ_e : $\alpha^*=2.0$ and $\beta^*=1.0$.

る。Fig. 4 に $\kappa_e=0, 100, 1000$の場合（$\delta=0$）の固有振動形の変化を示す。バネの効果は，自由端の変化を小さくするが，高次振動になるにつれて，剛性の大きいバネを用いないと効果がないことがわかる。

6．座屈解析

座屈特性を明らかにするにあたって，解の収束状況を明らかにする。Fig. 5 は熱勾配をもつ先端弾性支持の変断面片持ちばりの座屈固有値 p_1^* と項数 N の関係である。座屈解析の場合の収束は，Fig. 5 に示した振動解析の場合の収束よりも遅くなる。$\delta=0.8$，$\kappa_e=1000$の場合の 3 次の座屈固有値は $N=10$項程度必要である。文献 1 ）の論文では $N=5$ の 5 項近似を採用しているために，3 次の座屈固有値にはかなりの

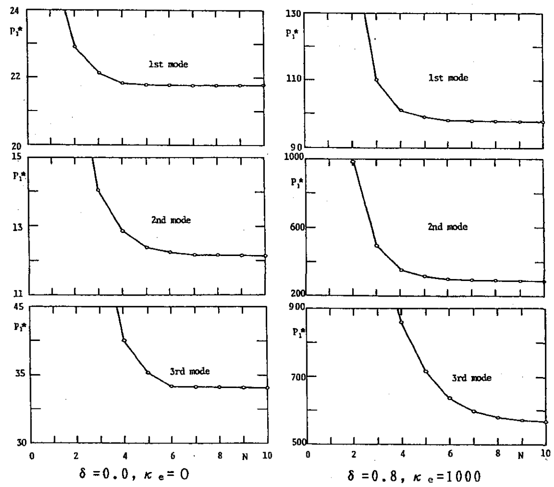


Fig. 5　Convergence of buckling loads: $\alpha^*=2.0$ and $\beta^*=1.0$.

誤差が含まれていることがわかる。本論文では，10項近似解（$N=10$）を用いて座屈解析を行う。

Fig. 6は，座屈荷重 p_1^* と温度勾配 δ との関係をプロットした結果である。温度勾配が大きくなると，座屈荷重が低下し，この割合は高次ほど大きくなる。また，バネの存在は，座屈荷重を増加させるが，その影響は高次ほど効いてくる。

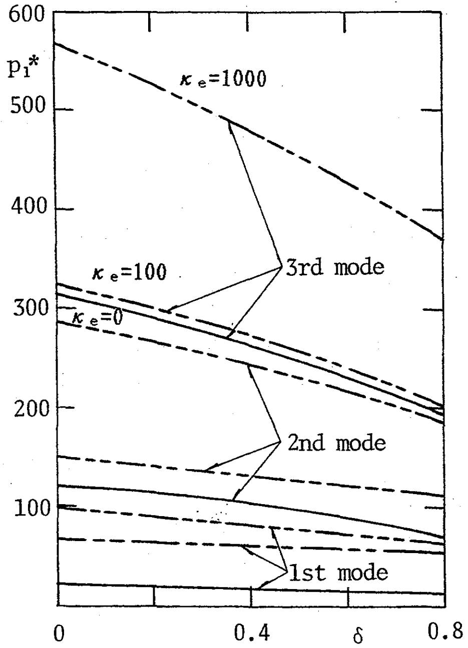


Fig. 6　Relation between buckling load p_1^* and thermal gradient parameter δ for three values of end support stiffness κ_e : $\alpha^*=2.0$ and $\beta^*=1.0$.

7．動的不安定領域

(1)　動的不安定領域

式(6)において，係数行列式$[B]$は次のように表される。

$$[B]=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1N} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2N} \\ \vdots & & & \vdots \\ b_{N1} & b_{N2} & \cdots & b_{NN} \end{bmatrix} \tag{17}$$

ここで，$b_{ij}\neq 0$，$b_{ii}\neq 0$，

b_{ij} と b_{ji} は同符号

つまり，本題の不安定領域には，主対角線要素から現われる単純共振と，非対角線要素から現われる結合共振が同時に含まれる。また，非対角線要素の b_{ij} と b_{ji} が同符号であるから，和型の結合共振のみが存在する。すなわち，

$\bar{\omega}=2\,\omega_i/k$　　付近に生ずる単純共振　(18)

$\bar{\omega}=(\omega_i+\omega_j)/k$　　付近に生ずる結合共振

ここに，$k=1, 2, \cdots$

$k=1$：主不安定領域

$k\geqq 2$：副不安定領域

(2)　動的不安定領域

Fig. 7は3次振動まで考慮にした温度勾配がない変断面片持ちばり（$\alpha^*=2.0$，$\beta^*=1.0$，$\delta=0.0$，$\kappa_e=0$，$\alpha=0.5$）の不安定領域である。Table 2にこのはりの固有振動数および座屈荷重を示している。図中の縦軸は変動軸力の振幅 β を，横軸は($\alpha=0.0, \delta=0.0$，$\kappa_e=0$）の変断面片持ちばりの1次振動の固有円振動数で無次元化した励振振動数 $\bar{\omega}$ である。図中の右上がりの斜線部が単純共振2 ω_i/k の不安定領域である。一方，右下がりの斜線部が結合共振の不安定領域を意味する。単純共振 $k=2$の副（第2）不安定領域が得られている。結合共振は $k=1$の主不安定領域のみが得られている。図に示すように，文献1）では求められていない結合共振の主不安定領域と単純共振の副不安定領域が存在する。これらのうち，単純共振の副不安定領域はその幅が狭く，重要でないと考えら

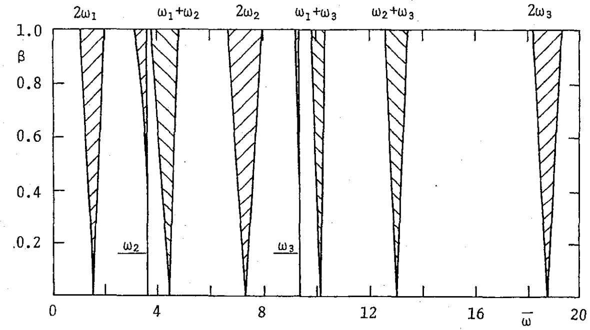


Fig. 7　Unstable regions for the beam : $\alpha^*=2.0$, $\beta^*=1.0$, $\alpha=0.5$, $\delta=0.0$ and $\kappa_e=0$.

Table 2　Natural frequency ω_1 and buckling load p_1^* : $\alpha^*=2.0$, $\beta^*=1.0$, $\alpha=0.5$, $\delta=0.0$ and $\kappa_e=0.0$.

κ_e	0	0	1000
α	0.0	0.5	0.5
ω_1	1.0	0.625	1.878
ω_2	3.970	3.215	6.056
ω_3	9.664	8.328	11.155
ω_0	10.236		
P_1^*	21.753908		

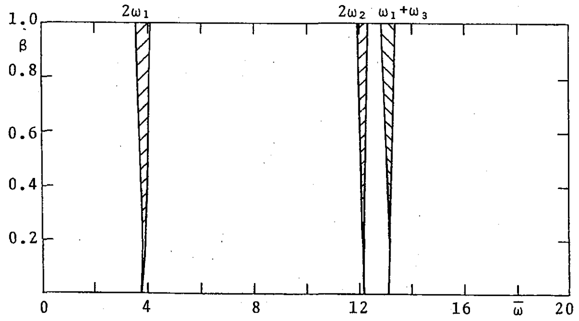


Fig. 8 Unstable regions for the beam : $\alpha^*=2.0$, $\beta^*=1.0$, $\alpha=0.5$, $\delta=0.0$ and $\kappa_e=1000$.

れる。しかし，結合共振の主不安定領域の幅は単純共振の主不安定領域の値と同程度である。したがって，結合共振を無視して，本題の構造部材の動的不安定領域を議論することはできない。つまり，文献1）の単純共振のみ求める方法では不十分である。

Fig. 8は，バネ定数（$\kappa_e=1000$）を変えたときの不安定領域である。また，バネ定数 κ_e の影響は，振動数および座屈荷重を増大させるので，不安定領域は，高い振動数側へ移動し，その幅は狭くなる。温度勾配 δ は振動数および座屈荷重を低下させるので，不安定領域は低い振動数側へ移動し，その幅が広くなる。これらの影響を把握するために，$\beta=1.0$における不安定領域の変化を温度勾配 δ およびバネ定数 κ_e をパラメーターに示せば，Fig. 9，10および11の結果を得る。

Fig. 9のように，バネがない場合には，不安定領域には温度勾配の影響を著しく受ける。しかし，Fig. 10のバネがある場合には，不安定領域は，温度勾配 δ の影響を受けなくなる。また，Fig. 11のように，バネの剛性(κ_e)が，増大すると，不安定領域は狭くなる。

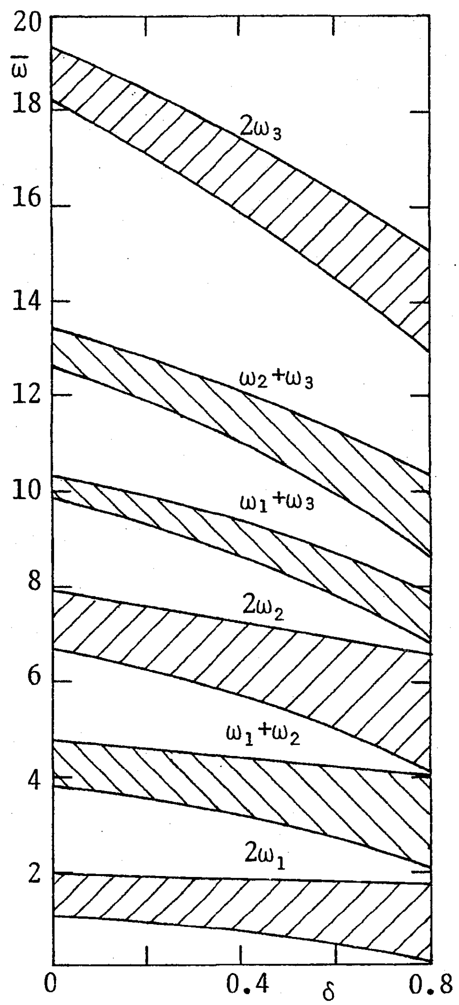


Fig. 9 Variation of unstable regions with thermal gradient δ:$\alpha^*=2.0$, $\beta^*=1.0$, $\alpha=0.5$, and $\kappa_e=0.0$.

8．まとめ

本論文は，一様な温度勾配をもつ先端弾性支持変断面片持ちばりの動的安定性を解析したものである。本研究によって得られた結果をまとめると，

(1) 一様断面ばりの座屈波形を重ね合わせて，熱勾配をもつ先端弾性支持変断面ばりの振動および座屈解析をすることが可能である。解の収束は良好であるが，座屈解析の方が項数を多くとる必要がある。

(2) 本題の不安定領域には，単純共振と和形の結合共振が同時に存在する。結合共振の幅は，単純共振の幅に比べ無視できない。したがって，単純共振のみに注目した従来の研究では不十分である。

最後に，本研究の数値計算には，長崎大学総合情報処理センターの電子計算機 FACOM M−760/30を使用したことを付記する。

参考文献

1）Kar, R. C. and Sujata, T. : Parametric Instability of a Non-uniform Beam with Thermal Gradient and Elastic End Support, Journal of Sound and Vibration, Vol. 122, pp. 209−215, 1988.

2）ボローチン：弾性系の動的安定，コロナ社，1972.

3）Takahashi, K. : Instability of Parametric Dynamic Systems with Non-uniform Damping, Journal of Sound and Vibration, Vol. 85, pp. 257−262, 1982.

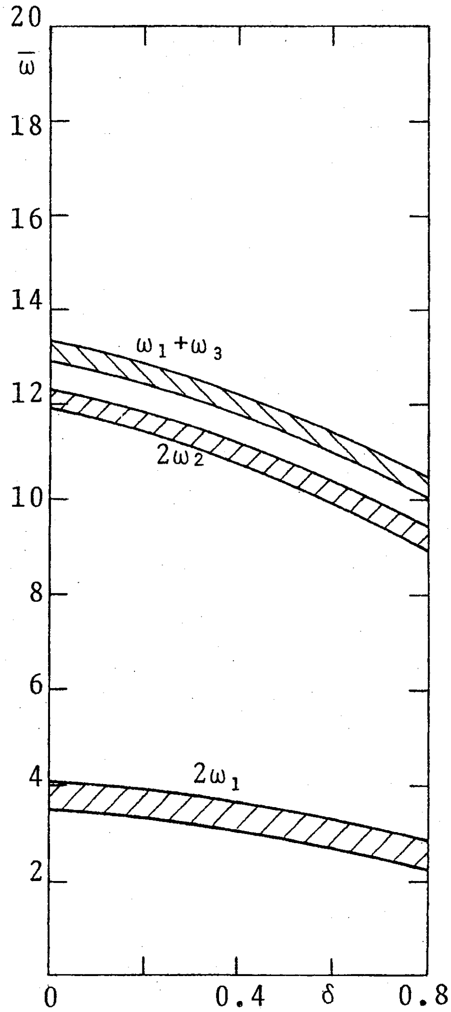


Fig. 10　Variation of unstable regions with thermal gradient δ : $\alpha^*=2.0$, $\beta^*=1.0$, $\alpha=0.5$, and $\kappa_e=1000$.

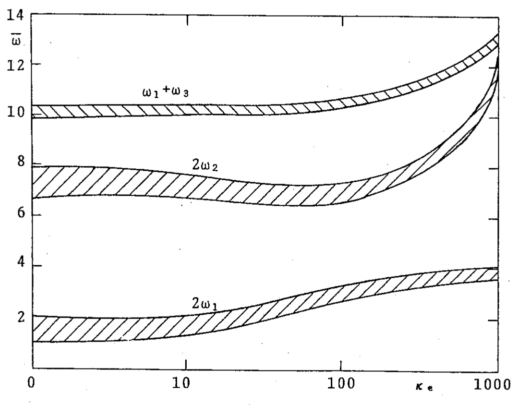


Fig. 11　Variation of unstable regions with end support stiffness κ_e : $\alpha^*=2.0$, $\beta^*=1.0$, $\alpha=0.0$, and $\delta=0.0$.

Appendix A　固有振動解析

式(3)において $\beta=0$ とおけば，振動の運動方程式が次のように与えられる。

$$L(\eta)=\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}\left[S(\xi)T(\xi)\frac{\partial^2\eta}{\partial\xi^2}\right]+\alpha p^*\frac{\partial^2\eta}{\partial\xi^2}+m(\xi)\frac{\partial^2\eta}{\partial\tau^2}=0 \qquad (A-1)$$

上式の解を次のように仮定する。

$$\eta=\sum_{j=1}^{n}a_j X_j e^{i\omega\tau} \qquad (A-2)$$

ここに，a_j:未定定数

$X_j=1-\cos(2j-1)\pi\xi/2$ ：一様断面のはりの座屈波形

式（$A-2$）を式（$A-1$）に代入して，Galerkin 法を適用すれば，次式が得られる。

$$-\omega_1^2[\bar{M}]\{a\}+([\bar{K}]-\alpha p^*[\bar{H}]\{a\}=\{0\} \qquad (A-3)$$

ここに，$\bar{M}_{ij}=\int_0^1 m(\xi)X_i(\xi)X_j(\xi)d\xi$,

$$\bar{E}_{ij}=\int_0^1 S(\xi)T(\xi)X_i''X_j''d\xi,$$

$$\bar{H}_{ij}=\int_0^1 X_i'X_j'd\xi,$$

$$\bar{R}_{ij}=X_i(1)X_j(1),$$

$$[\bar{K}]=[\bar{E}]+\kappa_e[\bar{R}]$$

上式は，次のように書き換えることができる。

$$[\bar{Z}]\{a\}=\lambda\{a\} \qquad (A-4)$$

ここに，$Z=[\bar{M}]^{-1}([\bar{K}]-\alpha p^*[\bar{H}])$,

$\lambda=\omega_1^2$

式（$A-4$）の行列の固有値問題より，振動の固有値 λ と固有ベクトル {a}が求められる。

Appendix B　座屈解析

一定軸力を受けるはりの座屈に関する方程式は，式（9）において，時間の項を除いて，$\alpha=1$ とおけば座屈の基礎式が得られる。

$$\{[A]-p_1^*[B]\}\{\bar{f}\}=\{0\} \qquad (B-1)$$

上式は次のような行列の固有値問題に変換される。

$$[Z]\{\bar{f}\}=\lambda\{\bar{f}\} \qquad (B-2)$$

ここに，$[Z]=[B]^{-1}[A]$，$\lambda=p_1^*$